

THERMODYNAMIQUE – soutien n° 8 :
Propriétés des variables aléatoires gaussiennes

Benjamin Langlois, Swann Piatecki et Guilhem Semerjian

Mai 2012

1 Cas unidimensionnel

On considère une variable aléatoire x , qui peut prendre toutes les valeurs réelles avec la densité de probabilité $C e^{-\frac{1}{2}ax^2}$, où $a > 0$ et C est une constante de normalisation. On notera $\langle \cdot \rangle$ les moyennes avec cette loi de probabilité.

1. Calculer la constante de normalisation C .
2. Que valent les moments d'ordre impair, $\langle x^{2p+1} \rangle$?
3. Calculer $G(h) = \langle e^{xh} \rangle$, où h est un réel arbitraire.
4. En déduire la valeur de la variance $\langle x^2 \rangle$.
5. Calculer plus généralement $\langle x^{2p} \rangle$.

2 Cas multidimensionnel

On considère maintenant k variables aléatoires $(x_1, \dots, x_k)$, avec la densité de probabilité jointe

$$C \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k x_i A_{i,j} x_j \right], \quad (1)$$

où A est une matrice symétrique définie positive et C une constante de normalisation.

1. Calculer la constante de normalisation C .
2. Calculer $G(h_1, \dots, h_k) = \langle \exp \left[\sum_{i=1}^k x_i h_i \right] \rangle$.
3. En déduire la valeur de $\langle x_i x_j \rangle$.
4. On définit les variables aléatoires $(X_1, \dots, X_k)$ qui sont des fonctions des x_i selon la relation $X_i = -\sum_{i'=1}^k A_{i,i'} x_{i'}$. Calculer les valeurs moyennes $\langle x_i X_j \rangle$ et $\langle X_i X_j \rangle$.