

THERMODYNAMIQUE – soutien n° 9 : Diffusion thermique

Benjamin Langlois, Swann Piatecki et Guilhem Semerjian

18 Mai 2011

1 Préliminaire : Équation de la chaleur

On considère un solide indéformable de capacité calorifique c , de masse volumique ρ et de conductivité thermique κ . À l'aide d'un bilan énergétique, établir l'équation de la chaleur.

2 Diffusion thermique dans un barreau

On considère un barreau semi-infini, calorifugé sur sa surface latérale, qui occupe le demi-espace $x \geq 0$. Sa température initiale est T_i . Pour $t \geq 0$, on impose la température T_0 en son extrémité $x = 0$. On notera κ la conductivité thermique du barreau, c sa capacité calorifique, ρ sa masse volumique, et D le rapport $\kappa/\rho c$.

1. Écrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température dans le barreau.
2. En utilisant un argument dimensionnel, montrer que la solution est fonction d'une variable réduite que l'on exprimera. Calculer la distribution de température dans le barreau. On pourra exprimer le résultat à l'aide de la fonction d'erreur définie par :

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} dx.$$

3. En déduire la densité de courant de chaleur. De quelle équation aux dérivées partielles est-elle une solution ?

3 Application : température de contact

On considère à présent deux barreaux semi-infinis de coefficients κ_i , c_i , ρ_i et D_i et de températures initiales T_i , avec $i \in \{1, 2\}$. À l'instant $t = 0$, on met les deux barreaux en contact par leur extrémité située en $x = 0$.

1. En supposant le courant de chaleur maximal à l'interface à tout instant, quelle est l'évolution de la température de contact ?
2. En utilisant les résultats précédents, donner la densité de courant de chaleur dans les deux matériaux et en déduire $T(x = 0)$. Tracer son allure à différents instants.
3. Déterminer la distribution de température dans les deux barreaux. Donner son allure à différents instants.
4. *Application numérique* : En assimilant le corps humain à de l'eau à 37°C , calculer la température de contact entre une main et un matériau à 20°C , dans le cas de l'eau, du bois et de l'aluminium. On donne :

eau	$D = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$\kappa = 0,63 \text{ J m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$
bois	$D = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$\kappa = 0,13 \text{ J m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$
aluminium	$D = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$\kappa = 236 \text{ J m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$

4 Modèle de la cave

On cherche à déterminer la distribution de température dans le sol ($z \geq 0$) en fonction de la température de surface ($z = 0$). On suppose que cette dernière oscille de façon sinusoïdale autour d'une valeur moyenne T_0 à une pulsation ω .

1. En utilisant une représentation complexe, résoudre l'équation de la chaleur dans ce matériau.
2. Interpréter le résultat obtenu en termes d'atténuation, de longueur d'onde et de vitesse de phase. Ce phénomène vous évoque-t-il d'autres situations physiques ?
3. Calculer la profondeur de pénétration de l'onde de chaleur dans le cas de fluctuations journalières et de fluctuations annuelles. On utilisera les valeurs suivantes :

$$\kappa = 0,4 \text{ J.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{K}^{-1}, \quad c = 800 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad \rho = 3.10^3 \text{ kg.m}^{-3}.$$