

Chapitre 2

Électrostatique et Magnétostatique

2.1 Électrostatique : rappels de cours

2.1.1 Notions de symétrie.

Plan de symétrie.

On dit que le plan (Π) (respectivement (Π')) est un plan de symétrie (resp. d'antisymétrie) du système étudié si à toute charge q correspond une charge identique (resp. opposée), symétrique par rapport à (Π) (resp. (Π')).

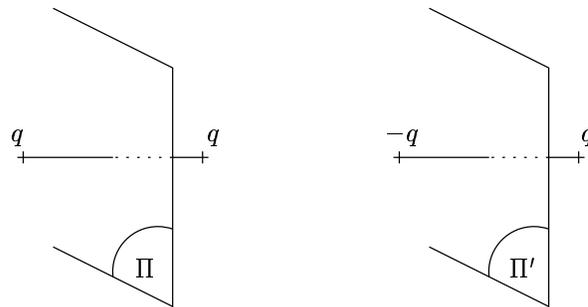


FIG. 2.1 - Exemple de plans de symétrie et d'antisymétrie.

Propriétés du vecteur champ électrostatique.

Le vecteur champ électrique \vec{E} est un « vrai vecteur » (on dit aussi vecteur polaire), c'est-à-dire que son orientation ne dépend pas de celle du trièdre de

référence. Du point de vue de ses propriétés de symétrie, il en résulte que

$$\begin{cases} \text{Si } M \in (\Pi), & \vec{E}(M) \in (\Pi) \\ \text{Si } M \in (\Pi'), & \vec{E}(M) \perp (\Pi') \end{cases}$$

Bien entendu, il est des situations où la distribution de charges est telle que les plans (Π) et/ou (Π') n'existent pas.

2.1.2 Lois générales.

Équations locales.

Le champ électrique \vec{E} vérifie les équations :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = \vec{0} & \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V \\ \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \end{cases}$$

où ρ est la densité volumique de charge et V le potentiel électrostatique. La combinaison de ces deux relations permet d'obtenir l'équation de POISSON-LAPLACE pour le potentiel V

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

À la traversée d'une surface portant la densité surfacique de charge σ , le potentiel est continu et le champ électrique vérifie les relations de passage :

$$\vec{E}_{t_2} = \vec{E}_{t_1} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{n_2} - \vec{E}_{n_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2},$$

où \vec{E}_n désigne la composante du champ perpendiculaire à la surface, et \vec{E}_t la composante tangentielle. On peut aussi écrire

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2},$$

où $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ est le vecteur unitaire normal à la surface, orienté de (1) vers (2). La composante tangentielle de \vec{E} est continue à la traversée d'une surface chargée. La composante normale présente une discontinuité proportionnelle à la charge surfacique σ .

Équations intégrales.

Le théorème d'OSTROGRADSKY (flux-divergence) permet d'obtenir, à partir de la deuxième des équations locales, le théorème de GAUSS :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int.}}}{\varepsilon_0},$$

où $Q_{\text{int.}}$ représente la charge totale intérieure à la surface fermée Σ considérée.

Lorsque l'on fait circuler le champ électrique le long d'un chemin allant d'un point 1 à un point 2, la première des équations locales fournit la relation

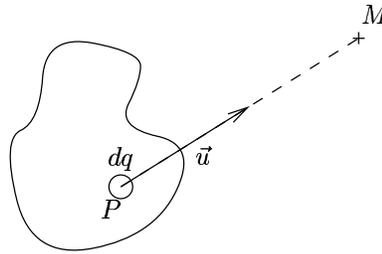
$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2.$$

Exemple : dans de nombreux cas, le théorème de GAUSS, adjoint à des considérations de symétrie, permet de trouver le champ engendré par une distribution de charges. On réserve en général le calcul direct, par les formules que nous allons énoncer dans le prochain paragraphe, à de rares cas. Calculons par exemple le champ d'une distribution de charges se présentant sous la forme d'une coquille sphérique infiniment mince, de centre O et de rayon R et portant une charge surfacique uniforme σ . La symétrie sphérique du problème restreint le nombre des variables pertinentes à la seule coordonnée radiale r . De plus, en un point M quelconque de l'espace, tous les plans contenant M et divisant la coquille en deux moitiés sont plans de symétrie de la distribution ; le champ \vec{E} est donc contenu dans chacun d'eux : $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ (\vec{e}_r est le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques, voir le chapitre 10). Appliquons le théorème de GAUSS en choisissant comme surface d'intégration la sphère Σ de rayon r . Il vient $4\pi r^2 E(r) = Q_{\text{int.}}/\epsilon_0$. On distingue alors deux régions. Dans la première (l'intérieur de la coquille qui est vide de charges) le champ est nul : $E(r) = 0$ pour $r < R$. À l'extérieur en revanche le champ s'écrit $E(r) = Q_{\text{coquille}}/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ c'est-à-dire que tout se passe pour $r > R$ comme si l'on avait une charge ponctuelle Q_{coquille} placée en O . Notons qu'en écrivant que $Q_{\text{coquille}} = 4\pi R^2 \sigma$, on retrouve que le champ subit au passage de la surface chargée, à laquelle il est perpendiculaire, une discontinuité σ/ϵ_0 .

Expression du champ et du potentiel.

Soit $\rho(\vec{r})$ la densité volumique de charge. Un volume élémentaire dv contient la charge élémentaire $dq = \rho dv$. L'expression du champ régnant en un point M est (\vec{u} est le vecteur unitaire joignant P à M : $\vec{u} = \vec{PM}/PM$)

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{points } P} \frac{dq \vec{u}}{PM^2}.$$



Dans le cas où le domaine chargé ne s'étend pas jusqu'à l'infini, l'expression du potentiel est quant à elle

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{points } P} \frac{dq}{PM}.$$

On vérifie que les expressions précédentes permettent de retrouver les formules usuelles dans le cas de charges ponctuelles.

La linéarité des équations reliant le champ électrostatique à la densité de charge est à l'origine du principe dit de superposition : *le champ créé par deux domaines de charges est la somme des champs créés par chacun d'eux.*

2.1.3 Dipôle électrostatique.

Considérons deux charges opposées placées comme sur la figure 2.2.

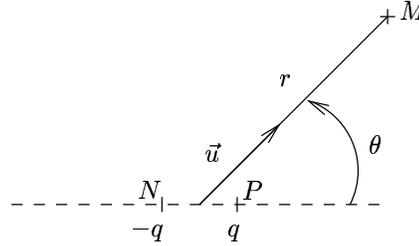


FIG. 2.2 - Notations employées. Dans l'approximation dipolaire, $r \gg PN$.

Le potentiel qu'elles engendrent s'écrit :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right).$$

Or on peut toujours écrire, en appelant O le milieu de NP ,

$$\begin{aligned} PM &= \sqrt{\overrightarrow{PM}^2} \\ &= \sqrt{\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}\right)^2} \\ &= OM \sqrt{1 - 2 \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^2} + \frac{OP^2}{OM^2}}. \end{aligned}$$

Si l'on s'intéresse à M tel que $OM \gg OP$ alors au premier ordre on obtient

$$\frac{1}{PM} \simeq \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^3}.$$

On procède de même pour le calcul de NM . Ainsi, dans la limite où la distance à laquelle on calcule le potentiel est grande devant la distance entre les charges, un développement limité de la somme des potentiels électrostatiques créés par les charges en N et P (figure 2.2) conduit à l'expression

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = q\overrightarrow{NP}.$$

On dit alors que le couple (N, P) constitue un dipôle électrique de moment dipolaire \vec{p} .

Le champ électrique correspondant se déduit du potentiel précédent

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} [3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}].$$

L'allure des lignes de champs et des équipotentielles du dipôle est présentée dans la partie I. du problème 3.5.6.

2.1.4 Conducteurs à l'équilibre électrostatique.

État du conducteur.

On appelle conducteur un matériau à l'intérieur duquel des charges peuvent se mouvoir sous l'action d'un champ électrique même faible. En conséquence, le champ à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre —pour lequel les porteurs de charge doivent être au repos— est nul.

La circulation de \vec{E} entre deux points quelconques du conducteur est alors, elle aussi, nulle, ce qui signifie :

un conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel ($V = C^{te}$).

La nullité du champ entraîne celle de sa divergence; il vient de ce fait pour la charge volumique ρ d'un conducteur à l'équilibre

$$\rho = 0.$$

La charge surfacique est, elle, en général non nulle.

Champ électrostatique au voisinage d'une surface chargée, pression électrostatique.

Soit un conducteur \mathcal{C} de charge surfacique $\sigma(M)$. Puisque le champ électrostatique est nul à l'intérieur de \mathcal{C} , la condition de passage énoncée précédemment nous assure que

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (\text{Théorème de COULOMB})$$

où le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est le champ qui règne immédiatement à l'extérieur du conducteur au point M et \vec{n} représente la normale sortante en M à \mathcal{C} .

Ce champ électrostatique, créé par la distribution surfacique de charge σ , exerce sur les charges qui le créent une force \vec{F} . On montre que la force élémentaire ainsi exercée sur une portion de surface dS du conducteur a pour expression

$$d\vec{F} = P d\vec{S} \quad \text{avec} \quad P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}.$$

La grandeur P est appelée pression électrostatique. La force est orientée vers l'extérieur du conducteur : la pression électrostatique tend à faire « exploser » le conducteur.

Notion d'écran, cavité dans un conducteur.

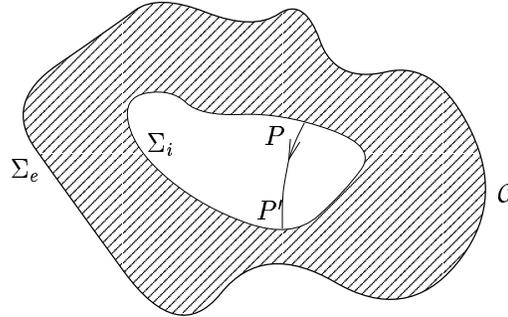


FIG. 2.3 - Cavité dans un conducteur.

Supposons que la charge surfacique au point P de la surface intérieure (figure 2.3) soit strictement positive (on pourrait la supposer négative de façon équivalente); considérons alors le chemin \mathcal{L} correspondant à la ligne de champ reliant P à P' . Par hypothèse la circulation du champ électrostatique le long de \mathcal{L} est strictement positive d'une part, et d'autre part puisque le potentiel électrostatique est identique en P et en P' cette même circulation doit être nulle. Cette contradiction avec l'hypothèse conduit à énoncer la propriété:

la surface interne de la cavité, vide de charge, d'un conducteur est non chargée. Le champ électrostatique y est nul et le potentiel constant.

Ces propriétés sont indépendantes des charges et champs régnant à l'extérieur du conducteur. Celui-ci fait écran entre les deux milieux: ce rôle de blindage est par exemple utilisé dans les cages de FARADAY (un simple grillage suffit alors).

2.1.5 Condensateurs.

Capacité d'un conducteur seul dans l'espace.

Du principe de superposition, il découle que le rapport entre la charge Q et le potentiel V d'un conducteur \mathcal{C} seul dans l'espace est une constante propre à celui-ci (elle ne dépend que de sa géométrie). On définit ainsi la capacité de \mathcal{C} par

$$C = \frac{Q}{V},$$

en supposant que le potentiel tend vers 0 loin du conducteur. La capacité s'exprime en Farad (F).

Définitions.

On appelle condensateur un système de deux conducteurs en influence totale, c'est-à-dire présentant deux surfaces de charge opposée. La définition ci-

dessus implique que dans le cas d'un condensateur de deuxième espèce (figure 2.4), les deux corps soient seuls dans l'espace.

Relation fondamentale.

Comme pour le conducteur isolé, il existe un coefficient positif C , ne dépendant que de la géométrie et de la position relative des deux conducteurs tel que

$$Q_1 = C(V_1 - V_2).$$

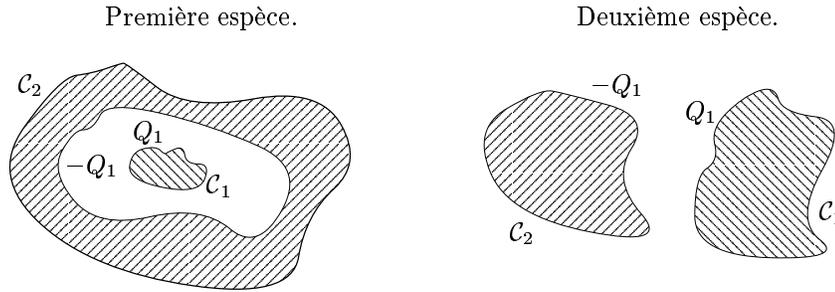


FIG. 2.4 - Les différents types de condensateurs.

Exemple : le cas le plus simple est celui du condensateur plan. Il est constitué de deux surfaces conductrices chargées parallèles d'aire S , séparées par une région vide de charge d'épaisseur e . Pour trouver le potentiel électrostatique régnant dans la région médiane, on applique l'équation de LAPLACE qui en l'absence de charges se réduit à $\Delta V = 0$. On suppose que V varie uniquement suivant la direction x , perpendiculaire aux surfaces (on néglige les effets de bord). Dans ces conditions, l'équation de LAPLACE s'écrit $d^2V/dx^2 = 0$, d'où $V(x) = ax + b$. a et b étant deux constantes. En écrivant $V(0) = V_1$ et $V(e) = V_2$ on trouve $a = (V_2 - V_1)/e$. D'après la définition du potentiel, le champ électrostatique dans le vide interstitiel est alors uniforme de valeur $E_x = (V_1 - V_2)/e$. Le champ étant nul à l'intérieur de la surface conductrice 1, le champ immédiatement à l'extérieur de celle-ci a pour valeur $\sigma/\epsilon_0 = Q_1/(\epsilon_0 S)$. L'identification des deux expressions conduit à la capacité du condensateur plan : $C = \epsilon_0 S/e$.

2.1.6 Énergie et force électrostatique.

Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur.

Le travail élémentaire de la force exercée par le champ \vec{E} sur une charge q déplacée de $d\vec{l}$ a pour expression

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= q \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= -d(qV). \end{aligned}$$

En identifiant avec la relation de définition de l'énergie potentielle, il vient pour une charge q dans un potentiel extérieur V

$$E_{\text{pot.}} = qV + C^{\text{te}}.$$

Énergie potentielle de charges en interaction.

Cette énergie correspond au travail réversible nécessaire pour construire la distribution de charge :

$$E_{\text{pot. int.}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i,$$

où V_i est le potentiel perçu par la charge q_i c'est-à-dire le potentiel créé par l'ensemble des charges q_j différentes de q_i :

$$V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}.$$

Énergie électrostatique d'une distribution de charge.

Soit une distribution de charge de densité volumique ρ , créant un potentiel V et un champ \vec{E} . La généralisation au cas continu des résultats du paragraphe précédent permet de définir l'énergie électrostatique de la distribution de charges

$$E_e = \frac{1}{2} \int_{\text{distribution}} \rho V d\tau.$$

En utilisant la densité d'énergie électrique $w_e = \epsilon_0 E^2/2$, on peut réécrire E_e sous la forme (voir l'exercice 3.4.1)

$$E_e = \int_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau > 0.$$

Attention, les deux expressions diffèrent par le domaine d'intégration.

Dans le cas de deux distributions de charges (1) et (2), l'application du principe de superposition permet de définir l'énergie d'interaction mutuelle $E_{em_{1,2}}$ des deux distributions :

$$E_{e_{(1+2)}} = E_{e_1} + E_{e_2} + E_{em_{1,2}}$$

avec

$$E_{em_{1,2}} = \int_{\text{espace}} \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau.$$

Contrairement à l'énergie électrostatique de chaque distribution, cette énergie mutuelle est de signe quelconque.

Dipôle électrostatique.

En utilisant l'énergie potentielle associée à une charge dans un potentiel extérieur, et ce dans la limite où l'écart entre les deux charges est très inférieur à la distance aux sources du champ, on obtient

$$E_{\text{pot.}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Ce champ électrostatique exerce une force sur chacune des charges du dipôle et le torseur des efforts qui en résulte a pour expression

$$(F) = \begin{cases} \vec{R} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \\ \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}. \end{cases}$$

Si, de plus, $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$, la résultante de ce torseur se met sous la forme :

$$\vec{R} = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

en considérant \vec{p} constant lors de la dérivation.

Énergie électrostatique d'un ensemble de conducteurs.

Pour un système de conducteurs de charge Q_i et de potentiel V_i , on a

$$E_{\text{pot.}} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i.$$

Dans le cas particulier de deux conducteurs formant un condensateur ($Q_1 = -Q_2 = C(V_1 - V_2)$), il vient

$$E_{\text{pot.}} = \frac{1}{2} Q_1 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{Q_1^2}{2C}.$$

2.2 Magnétostatique : rappels de cours**2.2.1 Propriétés de symétrie.**

Les sources du champ magnétique \vec{B} sont les courants ; les plans de symétrie d'un problème de magnétostatique vont donc être ceux de la distribution de courant.

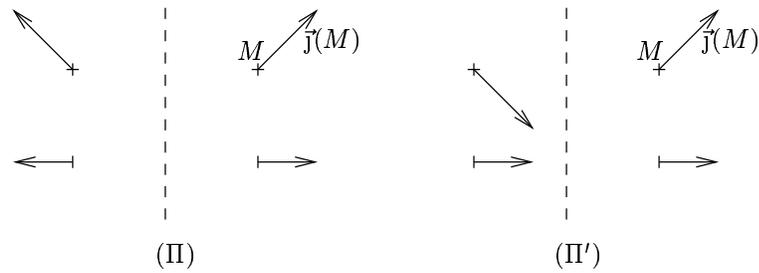


FIG. 2.5 - Exemples de plans de symétrie (Π) et d'antisymétrie (Π').

Contrairement au champ électrique, le vecteur champ magnétique est un pseudo-vecteur (on dit aussi vecteur axial), ce qui signifie que son sens dépend de l'orientation du trièdre de référence (c'est-à-dire de la convention d'orientation de l'espace). Ses propriétés de symétrie sont de ce fait « opposées » à celles de \vec{E}

$$\begin{cases} \text{Si } M \in (\Pi), & \vec{B}(M) \perp (\Pi) \\ \text{Si } M \in (\Pi'), & \vec{B}(M) \in (\Pi'). \end{cases}$$

On rappelle qu'on a noté les plans de symétrie (Π) et ceux d'antisymétrie (Π').

2.2.2 Lois générales.

Équations locales.

Les équations de la magnéto-statique sont

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 & \Leftrightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \end{cases}$$

Si l'on combine ces deux relations, on obtient pour le potentiel vecteur \vec{A} une équation analogue à celle de POISSON-LAPLACE pour le potentiel électrostatique :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

On a posé pour cela que $\text{div } \vec{A} = 0$ ce qui est mathématiquement possible et usuellement utilisé (on qualifie ce choix de « condition de jauge »).

Les conditions de raccordement à la traversée d'une surface parcourue par des courants de densité surfacique \vec{j}_s sont quant à elles

$$\vec{B}_{n_2} = \vec{B}_{n_1} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{t_2} - \vec{B}_{t_1} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}.$$

La composante du champ normale à la surface est donc continue à la traversée de la surface. La composante transverse est en revanche discontinue.

Théorème d'Ampère.

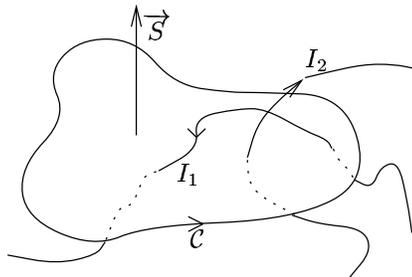
La première des deux équations locales vérifiées par le champ magnétique indique que celui-ci est à flux conservatif, c'est-à-dire que pour toute surface fermée

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

La circulation de \vec{B} le long d'un contour fermé \mathcal{C} donne quant à elle, en utilisant la deuxième des équations locales, le théorème d'AMPÈRE

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S(\mathcal{C})} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{S(\mathcal{C})},$$

où $S(\mathcal{C})$ est une surface s'appuyant sur le contour \mathcal{C} . Les courants qui « percent » cette surface dans le sens positif défini par l'orientation de \mathcal{C} (en utilisant la « règle du tire-bouchon », voir la figure 10.1 du chapitre 10) sont comptabilisés avec un signe positif (cf. problème 2.4.2).



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3).$$

FIG. 2.6 - Illustration du théorème d'AMPÈRE.

Exemple : le théorème d'AMPÈRE est fréquemment utilisé pour calculer le champ magnétique créé par une distribution de courant. Considérons un fil vertical rectiligne infini, parcouru par un courant I dans le sens ascendant. Adoptons le système des coordonnées cylindriques (voir le chapitre 10), la verticale ascendante définissant l'axe z . La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe z , et par translation suivant cet axe. Par conséquent, la seule variable pertinente du problème est la coordonnée radiale r : $\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r)$. Considérons en outre un point M quelconque de l'espace (en dehors du fil). Le plan passant par M et contenant le fil est un plan de symétrie de la distribution de courant ; le champ magnétique en M lui est donc perpendiculaire et ainsi $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.

Pour appliquer le théorème d'AMPÈRE, choisissons pour contour \mathcal{C} un anneau de rayon r et d'axe le fil. Ce cercle est orienté par l'axe z et la règle du tire-bouchon. Il vient $2\pi r B(r) = \mu_0 I$ ce qui nous permet de connaître le champ magnétique en tout point de l'espace, hors du fil: $\vec{B} = \mu_0 I / (2\pi r) \vec{e}_\theta$.

Expression du champ magnétique et du potentiel vecteur.

Par analogie entre les équations vérifiées par V et par \vec{A} , on a

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{points } P} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau.$$

Cette expression ne convient pas s'il y a des courants « à l'infini ». Dans le cas de courants filiformes, $\vec{j}(P)d\tau$ devient simplement $I d\vec{l}$, où I est l'intensité circulant dans le fil. Du potentiel vecteur, il est possible d'obtenir le champ magnétique au moyen de $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ et l'on en déduit la loi de BIOT et SAVART

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{points } P} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau.$$

Comme exemples de champs classiques, on peut citer le champ créé par une spire (cf. 2.4.2) et celui engendré par un solénoïde (cf. 4.3.2).

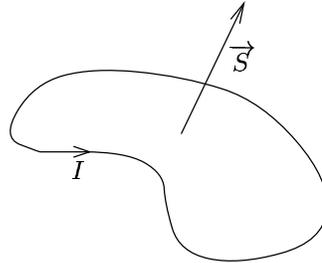
Dans le cas où le champ magnétique est uniforme, une expression possible pour le potentiel vecteur en M dans le repère d'origine O est (voir l'exercice 4.2.2)

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{2} \left(\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM} \right).$$

2.2.3 Dipôle magnétique.**Définition.**

Soit une boucle de courant \mathcal{C} , orientée par le courant I qui la parcourt. On définit le vecteur surface \vec{S} associé à \mathcal{C} par

$$\vec{S} = \int_{s(\mathcal{C})} d\vec{S}.$$



À une distance grande devant la taille de la boucle de courant \mathcal{C} , le champ est entièrement déterminé par le moment magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}.$$

Le vecteur surface admet aussi pour expression :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}.$$

Champ et potentiel vecteur d'un dipôle.

Le potentiel vecteur créé par cette boucle est, à grande distance (approximation dipolaire)

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}).$$

Le champ magnétique \vec{B} qui en résulte est alors formellement identique au champ créé par un dipôle électrique

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \left[3 (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{\mathcal{M}} \right].$$

2.2.4 Actions mécaniques d'un champ magnétique.**Sur un circuit : force de Laplace.**

Un élément de volume $d\tau$ parcouru par une densité de courant \vec{j} est soumis à une force magnétique d'expression

$$d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau.$$

En effet, chaque porteur de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} est soumis à la force

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Dans le cas d'une distribution filiforme, $\vec{j}d\tau$ devient $I d\vec{l}$ ce qui conduit à la formule de la force de LAPLACE s'exerçant sur une portion $d\vec{l}$ d'un circuit (C)

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

D'un point de vue microscopique, cette force est exercée sur les porteurs de charge de C . Ceux-ci transmettent cet effort au réseau (par exemple le métal du conducteur) par l'intermédiaire des chocs avec celui-ci ; en régime permanent la force transmise au réseau est exactement égale à la force magnétique exercée sur les porteurs.

Sur un dipôle magnétique.

Comme pour le dipôle électrique, on trouve que le torseur des efforts exercés sur $\vec{\mathcal{M}}$ par le champ magnétique est

$$(F) = \begin{cases} \vec{R} = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} & \text{si } \text{rot } \vec{B} = \vec{0} \\ \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}. \end{cases}$$

En considérant $\vec{\mathcal{M}}$ constant lors de la dérivation, on peut écrire :

$$\vec{R} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}).$$

Sur un conducteur : pression magnétique.

Le champ magnétique à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul —ceci constitue l'un des effets MEISSNER liés à la supraconductivité (voir le problème 3.5.3).

La condition de passage entre l'intérieur et l'extérieur du conducteur, siège de courants surfaciques \vec{j}_s , nous donne pour le champ magnétique en un point M du voisinage de \mathcal{C}

$$\vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n},$$

où \vec{n} est la normale sortante en M au conducteur.

Comme en électrostatique, le champ induit par la distribution surfacique exerce une action mécanique sur cette dernière et on trouve que la force exercée sur une portion d'aire dS de \mathcal{C} s'écrit

$$d\vec{F} = P d\vec{S} \quad \text{avec} \quad P = -\frac{\mu_0 j_s^2}{2}.$$

La pression ainsi exercée sur le conducteur est dirigée vers l'intérieur de celui-ci.

2.2.5 Travail de la force de Laplace.**Expression du travail.**

Soit un circuit \mathcal{C} , éventuellement déformable, parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$. On considère un déplacement élémentaire de ce circuit (figure 2.7)

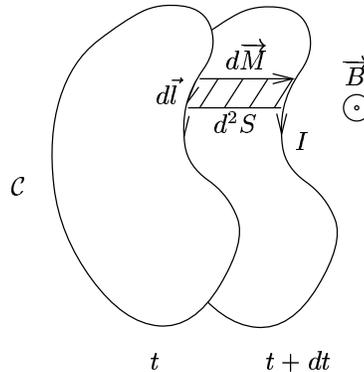


FIG. 2.7 - Déplacement élémentaire d'un circuit.

Le travail élémentaire de la force de LAPLACE s'exerçant sur la portion $d\vec{l}$

du circuit a pour expression

$$\begin{aligned} \delta^2 W &= \left(I d\vec{l} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{M} \\ &= I \left(d\vec{M} \wedge d\vec{l} \right) \cdot \vec{B} \\ &= I d^2 \vec{S} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

où $d^2 \vec{S} = d\vec{M} \wedge d\vec{l}$ est l'élément de surface latérale balayé par $d\vec{l}$ lors d'un déplacement $d\vec{M}$.

Par définition, le flux coupé ψ est le flux de \vec{B} à travers la surface latérale engendrée par le déplacement du circuit, cette surface latérale étant orientée vers l'intérieur du volume balayé dans l'exemple de la figure 2.7. Dans ces conditions, le travail élémentaire agissant sur l'élément $d\vec{l}$ s'écrit :

$$\delta^2 W = I \delta^2 \psi.$$

Comme I est le même en tout point du circuit, le travail total des forces de LAPLACE s'exerçant sur le circuit lors d'un déplacement élémentaire est alors

$$\delta W = I \delta \psi \quad \text{avec} \quad \delta \psi = \oint_{\mathcal{C}} \delta^2 \psi.$$

L'expression précédente est valable même si I n'est pas constant.

Théorème de Maxwell.

On fait maintenant l'hypothèse que le champ magnétique \vec{B} est indépendant du temps et que le circuit \mathcal{C} est indéformable. Ce dernier est déplacé d'une position (1) à une position (2).

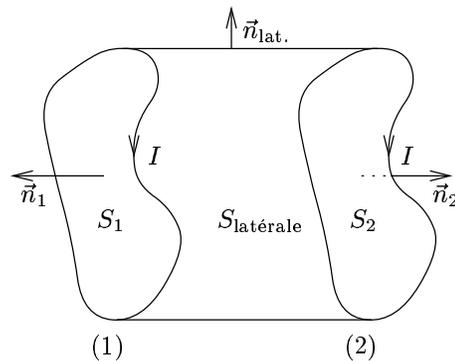


FIG. 2.8 - Surface fermée associée au déplacement d'un circuit indéformable. On suppose que le déplacement entre les positions (1) et (2) est infinitésimal.



Le champ magnétique étant de divergence nulle, son flux à travers la surface fermée définie par la figure 2.8 est nul. Or, ce dernier se décompose en un flux latéral et deux flux sur les extrémités S_1 et S_2 . En prenant garde aux conventions d'orientation, on trouve

$$-\phi_1 - \psi + \phi_2 = 0,$$

où ϕ_α est le flux de \vec{B} à travers le circuit orienté par I , et se trouvant à la position repérée par (α) . En utilisant le résultat du paragraphe précédent, il s'ensuit que le travail de la force de LAPLACE lors de ce déplacement s'écrit

$$\delta W = W_{1 \rightarrow 2} = I(\phi_2 - \phi_1) = Id\phi.$$

Ce résultat constitue le théorème de MAXWELL. Sous la forme précédente, il est valable même si I n'est pas constant au cours du temps.

Énergie potentielle d'un circuit dans un champ magnétique.

Dans l'hypothèse où le champ magnétique est stationnaire et le circuit C rigide, le travail de la force magnétique est donné par le théorème de MAXWELL. Si l'on suppose en outre le courant I constant, alors

$$\delta W = Id\phi = d(I\phi).$$

On peut ainsi définir une énergie potentielle d'interaction par $\delta W = -dE_{\text{pot.}}$, soit

$$E_{\text{pot.}} = -I\phi + C^{\text{te}}.$$

De cette expression découle la règle dite du **flux maximal**: dans un champ constant, une spire rigide parcourue par un courant constant s'oriente de façon à minimiser son énergie potentielle, ce qui est obtenu en maximisant le flux de \vec{B} qui la traverse.

2.3 Exercices

2.3.1 Et si le champ électrique...

D'après un examen blanc de l'Université Paris VI

Nous donnons ci-dessous l'ensemble des propriétés vérifiées par le champ coulombien (électrostatique) \vec{E} .

1. Théorème de GAUSS :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho d^3v$$

où V et S sont respectivement un volume fini et la surface fermée qui limite ce volume.

2. Théorème de la divergence :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} d^3v.$$

3. Théorème de STOKES

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où S et C sont respectivement une surface ouverte et le contour sur lequel elle s'appuie.

4. Équation locale (MAXWELL) :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

5. \vec{E} est irrotationnel :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}.$$

6. \vec{E} dérive d'un potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi.$$

Supposez qu'au lieu d'être de la forme

$$\vec{E} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r,$$

le champ électrostatique produit par une charge ponctuelle soit de la forme :

$$\vec{E} = \frac{k}{r^2} e^{-\lambda r} \vec{u}_r,$$

k et λ étant des constantes. Quelles sont les propriétés du champ électrostatique, parmi celles mentionnées ci-dessus, qui restent encore valables dans ce cas ?

Solution

Les propriétés (2) et (3) sont des résultats d'analyse vectorielle : elles sont valables pour tous les champs de vecteurs. La propriété (4) est une forme locale de (1) : (4) vraie \Leftrightarrow (1) vraie puisque (2) est toujours vraie. Si l'on considère que ρ est la densité volumique de charge, ces deux propriétés sont ici fausses. En effet, calculons le flux du champ électrique à travers une sphère de rayon R centrée sur la charge :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ke^{-\lambda R}.$$

Pour que (1) soit vraie, il faudrait que l'expression précédente soit une constante indépendante de R . Ce n'est pas le cas : (1) et (4) sont ici fausses.

Tous les champs de vecteurs radiaux ne dépendant que de r sont de rotationnel nul (on peut vérifier cette propriété à l'aide d'un formulaire) : la propriété (5) est vraie. Quant à la dernière, elle est équivalente à (5) et donc valable.

Remarque : un champ électrique de la forme proposée se rencontre en physique des plasmas. Il dérive du potentiel de YUKAWA qui est étudié plus en détail dans l'exercice 2.3.3. Ce champ ayant une réalité physique, les propriétés (1) à (6) sont valables. Bien entendu, un tel champ ne correspond pas à une charge ponctuelle (cf. exercice 2.3.3).

2.3.2 Pouvoir des pointes

Durée 10 min

On se propose d'étudier le champ électrostatique au voisinage des extrémités du conducteur \mathcal{C} représenté figure 2.9.

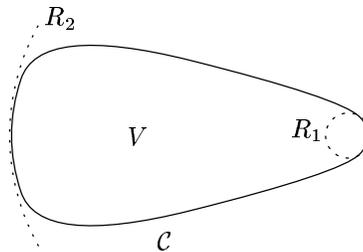


FIG. 2.9 - Conducteur comportant une partie pointue.

1. Calculer la capacité d'un conducteur sphérique seul dans l'espace.

2. En supposant que les propriétés électrostatiques de chacune des extrémités sont identiques à celles de sphères de rayons respectifs R_1 et R_2 , comparer les champs en chacun des deux bouts. Conclusion.

Solution

1. Puisque le potentiel électrostatique V est uniforme à l'intérieur d'un conducteur

$$V = V(O),$$

où O désigne le centre de la sphère. Le conducteur ne peut porter de charges qu'en surface. Soit R le rayon de la sphère, le potentiel est relié à la distribution surfacique de charge σ par

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{M \in \mathcal{S}(C)} \frac{\sigma dS}{OM}.$$

Tous les points M étant à la distance R de O , on a

$$V(O) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

Q désignant la charge totale portée par la sphère. Par définition de la capacité d'un conducteur seul dans l'espace, on obtient finalement

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

2. Si l'extrémité (1) se comporte comme une sphère de rayon R_1 , elle porte une charge

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V.$$

Sa charge surfacique est donc de l'ordre de

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \\ &= \frac{\epsilon_0 V}{R_1}. \end{aligned}$$

Le champ au voisinage de la partie (1) s'obtient grâce au théorème de COULOMB (voir les rappels de cours) et a pour ordre de grandeur

$$E_1 = \frac{V}{R_1}.$$

On traite de la même façon la zone (2), d'où le rapport des champs électriques aux deux extrémités

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Le champ électrique au voisinage d'un conducteur est donc extrêmement intense près des pointes. Ce phénomène est mis à profit dans les paratonnerres : le champ électrique de claquage de l'air est plus rapidement atteint dans les zones pointues. C'est la raison pour laquelle il est conseillé de s'accroupir et de s'éloigner des arbres pour se protéger de la foudre (il faut éviter de former une pointe avec son corps ou de se trouver à proximité d'une pointe). Le pouvoir des pointes explique aussi les feux de SAINT-ELME : une pointe fortement chargée peut ioniser l'air dans son voisinage ; il se forme alors des filaments bleus et on entend des crépitements...

2.3.3 Le potentiel de Yukawa

Université d'Angers

Durée 40 min

Aucun document autre qu'un formulaire rappelant les expressions des gradient, divergence et rotationnel n'est autorisé.

Une distribution volumique de charge à symétrie sphérique autour d'un point O crée un potentiel électrostatique :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\lambda r} \quad \text{avec } \lambda > 0 \text{ et } q > 0$$

en un point M quelconque situé à une distance r de O .

1. Calculer le champ électrique \vec{E} dérivant de ce potentiel.
2. De l'expression locale du théorème de GAUSS, déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$.
3. En intégrant $\rho(r)$ dans une sphère de rayon R et de centre O , calculer la charge $Q(R)$ contenue dans cette sphère. On montrera que, compte tenu de la symétrie sphérique, l'intégrale de volume se réduit à une intégrale simple.
4. Calculer la charge $Q'(R)$ contenue dans la même sphère de rayon R , en utilisant le théorème de GAUSS.
5. Calculer $Q'(R) - Q(R)$. En faisant $\lambda = 0$ dans $V(r)$, on obtient le potentiel créé par une charge ponctuelle q placée à l'origine des coordonnées. Quelle est, d'après vous, la méthode de calcul donnant la bonne valeur pour la charge contenue dans la sphère de rayon R ?

EXERCICES

Solution

1. Par définition, le champ électrostatique se déduit du potentiel par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V.$$

Dans le cas présent,

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} e^{-\lambda r} \right] \vec{e}_r$$

où $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/OM$ est le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques. Ainsi,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\lambda r} \vec{e}_r.}$$

2. L'expression locale du théorème de GAUSS est aussi appelée équation de MAXWELL-GAUSS et affirme que :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

On note aussi, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E}$. Pour un champ $\vec{A} = A(r) \vec{e}_r$ à symétrie sphérique, on a

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial [r^2 A(r)]}{\partial r}.$$

Ainsi,

$$\rho(r) = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [e^{-\lambda r} (1 + \lambda r)]$$

soit encore,

$$\boxed{\rho(r) = -\frac{q}{4\pi r} \lambda^2 e^{-\lambda r}.}$$

3. Intégrons la densité volumique de charge trouvée à la question précédente dans une sphère de centre O et de rayon R .

$$Q(R) = \int_{\text{sphère}} \rho(\vec{r}) d^3v$$

où d^3v représente l'élément de volume des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

$$d^3v = dr \, r d\theta \, r \sin \theta d\phi.$$

Ici, la densité $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ ne dépend pas des variables θ et ϕ sur lesquelles l'intégration est donc immédiate :

$$\begin{aligned} Q(R) &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, r^2 \sin \theta \rho(\vec{r}) \\ &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr. \end{aligned}$$

L'intégrale de volume se réduit à une intégrale simple :

$$Q(R) = -q\lambda^2 \int_0^R r e^{-\lambda r} dr.$$

La charge contenue dans la sphère considérée est par conséquent :

$$Q(R) = q(1 + \lambda R) e^{-\lambda R} - q.$$

4. Calculons cette même (!) quantité en utilisant la forme intégrale (globale) du théorème de GAUSS :

$$\oint_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q'(R)}{\varepsilon_0}$$

où $d\vec{S}$ est un élément de surface orienté par la normale sortante à la sphère. Le symbole \oint est conventionnellement utilisé pour désigner des flux sur des surfaces *fermées*. Comme le champ électrique est radial et ne dépend que de r , il vient :

$$Q'(R) = \varepsilon_0 4\pi R^2 E(R)$$

c'est-à-dire :

$$Q'(R) = q(1 + \lambda R) e^{-\lambda R}.$$

5. Les deux méthodes de calcul ne donnent pas le même résultat :

$$Q'(R) - Q(R) = q.$$

Pour déterminer celle qui est correcte, plaçons nous dans le cas $\lambda = 0$ qui correspond au potentiel créé par une charge q seule dans tout l'espace. Les valeurs correspondantes des charges présentes dans une sphère centrée en O sont :

$$\begin{aligned} Q_{\lambda=0}(R) &= 0 \\ Q'_{\lambda=0}(R) &= q. \end{aligned}$$

Manifestement, la valeur donnée par $Q(R)$ est fautive ! En effet, la méthode exposée aux questions 2. et 3. calcule la densité volumique de charge $\rho(r)$ correctement pour $r \neq 0$, mais ne tient pas compte d'une éventuelle charge ponctuelle située en O . Cette charge est pourtant présente, comme en atteste la divergence du potentiel pour $r \rightarrow 0$, et elle est précisément égale à q . Il faudrait donc définir $Q(R)$ par

$$Q(R) = q + \int_{\text{sphère}} \rho(\vec{r}) d^3v$$

et l'on obtiendrait alors $Q(R) = Q'(R)$. La méthode de calcul de Q' est globale et tient automatiquement compte de la charge ponctuelle située en O .

Complément : ce type de potentiel apparaît fréquemment en physique des plasmas (systèmes de charges) ou des électrolytes et illustre la notion d'« écranage ». Considérons une charge positive q située au point O . Lorsqu'elle se trouve seule dans l'espace, elle crée un potentiel :

$$V_{\text{charge nue}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

En revanche, dans un plasma, elle va attirer des charges négatives qui vont s'accumuler autour d'elle de façon à écranter (diminuer) sa charge en formant un nuage dont la densité décroît avec la distance à O . On peut montrer qu'une approximation raisonnable du potentiel régnant en un point situé à une distance r de l'origine est dans ce cas :

$$V_{\text{charge+nuage}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/r_0},$$

où r_0 est une longueur dépendant de la température et de la densité de charge, appelée longueur de DEBYE. Par rapport au cas où la charge est « nue », le potentiel décroît très vite (exponentiellement au lieu d'algébriquement en $1/r$).

Signalons aussi que le potentiel étudié ici est le potentiel moyenné sur le temps que prédit la mécanique quantique pour un atome d'hydrogène dans son état fondamental. La charge q est celle du proton. La quantité $-4\pi r^2 \rho(r)/q$ est la densité de probabilité de trouver l'électron à une distance r du noyau. En d'autres termes, $-4\pi r^2 dr \rho(r)/q$ est la probabilité de trouver l'électron entre les sphères de rayon r et $r + dr$. On peut remarquer que

$$\frac{d}{dr} (r^2 \rho(r)) = 0 \quad \text{pour} \quad r = r_0.$$

Par conséquent, l'électron se trouve préférentiellement à une distance r_0 du proton. Cette « orbite » est la première orbite de BOHR caractéristique de l'état fondamental ($r_0 = 0.529 \text{ \AA}$).

2.3.4 Étude d'un condensateur cylindrique

*D'après un partiel de l'Université de Versailles
Durée 30 min*

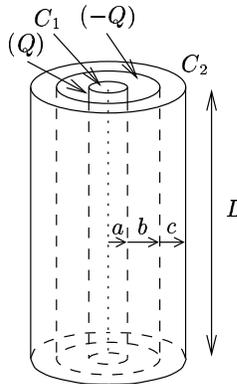


FIG. 2.10 - Le condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux C_1 et C_2 , portant sur leurs surfaces en regard les charges Q et $-Q$

uniformément réparties. C_1 a un rayon a , C_2 a un rayon interne b et un rayon externe c . On suppose que la longueur L des cylindres est très supérieure aux rayons a , b et c .

1. Indiquer la direction et le sens du champ électrique \vec{E} . Calculer son module en tout point de l'espace (4 zones). Représenter le module de \vec{E} en fonction de la distance r à l'axe.
2. Calculer la capacité C de ce condensateur.
3. Calculer l'énergie électrostatique U_e emmagasinée dans ce condensateur.

Solution

1. Le condensateur cylindrique que l'on étudie ici a une longueur L très grande par rapport aux rayons des cylindres qui le composent. Il est alors licite de négliger les effets de bords pour le calcul du champ électrique \vec{E} dû à l'ensemble de conducteurs considéré. En d'autres termes, le champ électrique sera le même que si les conducteurs étaient infinis dans la direction z (en portant la même charge surfacique).

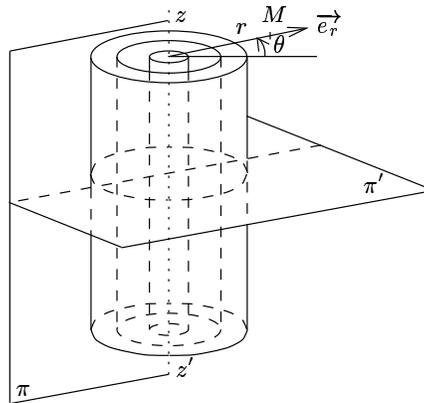


FIG. 2.11 - Les notations utilisées

On travaille avec les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et dans la base associée $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ pour un point M quelconque. Le système considéré et la distribution de charges associée sont invariants :

- par rotation autour de l'axe $z'z$, donc le champ est indépendant de la coordonnée angulaire θ ;
- par translation parallèlement à l'axe $z'z$, donc le champ est indépendant de la coordonnée spatiale z .

Par conséquent, on peut écrire $\vec{E} = \vec{E}(r)$. De plus, le système est symétrique par rapport à tout plan méridien (π), donc, pour tout point M appartenant à (π), le champ électrique est contenu dans ce plan. De même, le système étant symétrique par rapport à tout plan (π') contenant une section droite des conducteurs, le champ électrique en M est contenu dans ce plan (π'). Ainsi le champ \vec{E} est contenu dans l'intersection des deux plans (π) et (π'), pour tout point M de l'espace. En définitive, on peut écrire $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$.

Pour ce qui est du sens du champ électrique \vec{E} , les lignes de champs sont dans le sens des charges décroissantes : en effet, à l'intérieur du conducteur, le champ est identiquement nul, donc, en utilisant les relations de passage pour le champ électrique à la surface d'un conducteur, on arrive à $\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \vec{n}$ où σ est la densité surfacique de charges du conducteur et \vec{n} est la normale à la surface entourant le conducteur, dirigée vers l'extérieur. L'expression précédente du champ électrique, connue sous le nom de théorème de COULOMB, permet d'expliquer le sens des lignes de champ électrique. Pour l'ensemble de conducteurs étudié, en supposant $Q > 0$ sans que cela soit restrictif, on a :

$$\boxed{\vec{E} = E(r) \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad E(r) \geq 0.}$$

Le champ électrique étant radial et ne dépendant que de r , il est intéressant d'appliquer le théorème de GAUSS, avec comme surface d'intégration un cylindre de rayon r et de longueur L , coaxial à l'axe $z'z$ du système :

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r L E(r),$$

où Q_{int} est la charge totale contenue à l'intérieur du cylindre considéré. L'expression générale de $E(r)$ est :

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 r L}.$$

Les quatre zones de l'espace à considérer sont :

1. $r < a$: $Q_{int} = 0$
2. $a < r < b$: $Q_{int} = Q$
3. $b < r < c$: $Q_{int} = Q + (-Q) = 0$
4. $c < r$: $Q_{int} = Q_{ext}$ car la surface extérieure porte *a priori* une charge totale Q_{ext} due aux conducteurs extérieurs entourant le condensateur étudié. Si le condensateur se trouve seul dans le vide, alors $Q_{ext} = 0$. Dorénavant, nous considérerons $Q_{ext} = 0$.

D'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} r < a \quad : \quad \vec{E} = \vec{0} \\ a < r < b \quad : \quad \vec{E} = Q/(2\pi\varepsilon_0 r L) \vec{e}_r \\ r > b \quad : \quad \vec{E} = \vec{0} \end{array}.}$$

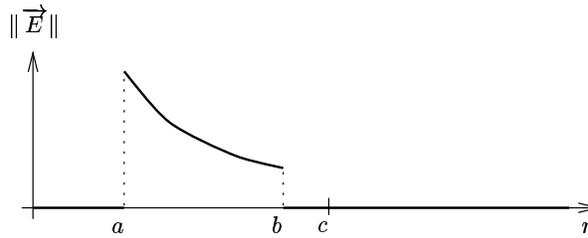


FIG. 2.12 - Allure du module du champ électrique en fonction de r , pour $Q_{ext} = 0$.

Le champ électrique est discontinu sur les surfaces des conducteurs, ce qui est normal puisque les conducteurs portent une charge surfacique non nulle, et que le champ leur est perpendiculaire.

2. La capacité C du conducteur est définie par :

$$C = \frac{Q}{V_{C_1} - V_{C_2int}} = \frac{Q}{V(a) - V(b)}$$

où $V(r)$ est le potentiel scalaire associé au champ électrique. De la relation $\vec{E} = -\text{grad}V$, on déduit le potentiel sur les deux surfaces conductrices :

1. $r < a$: $E(r) = 0$ d'où $V(r) = V_1$
2. $a < r < b$: $E(r) = Q/(2\pi\epsilon_0 rL)$, d'où $V(r) = V_1 + Q/(2\pi\epsilon_0 L) \ln(a/r)$

en utilisant la continuité du potentiel électrostatique en tout point de l'espace.

Par conséquent :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

3. Puisque l'on a un système de conducteurs à l'équilibre électrique, on peut appliquer, pour le calcul de l'énergie emmagasinée dans le condensateur, la relation :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint \rho V d\tau = \frac{1}{2} [QV_{C_1} + (-Q)V_{C_2int}] = \frac{Q^2}{2C}$$

On arrive ainsi à :

$$U_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Remarque : on peut calculer différemment U_e en sommant la densité volumique d'énergie sur tout l'espace (voir exercice 3.4.1) :

$$U_e = \iiint_{\text{espace}} \epsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} d\tau.$$

Dans le cas présent, la nullité du champ électrique pour $0 < r < a$ et $r > b$ permet d'écrire

$$U_e = \int_a^b \frac{Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 L^2} \frac{1}{r^2} \underbrace{L 2\pi r dr}_{d\tau} = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

2.3.5 Images électriques et interaction dipôle-conducteur

Université Joseph FOURIER, Grenoble

Durée 1 h

On amène un dipôle électrique à une distance d d'un conducteur remplissant le demi-espace d'équation $z < 0$, mis à la terre. L'orientation du moment dipolaire \vec{p} est repérée par ses angles polaires θ et φ (en choisissant pour axe Oz la normale à la paroi du conducteur passant par le centre du dipôle).

1. Montrer, en utilisant la méthode des images électriques, que l'énergie d'interaction électrostatique du dipôle avec le conducteur s'écrit :

$$E_p = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{p^2}{8d^3} (1 + \cos^2 \theta)$$

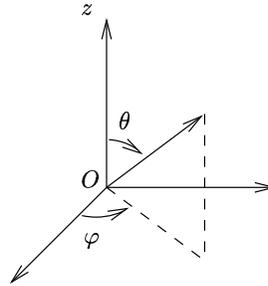
On rappelle que l'énergie d'interaction entre deux dipôles de moments \vec{p}_1 et \vec{p}_2 , séparés par le vecteur \vec{r}_{12} , est donnée par la formule :

$$E_d = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^3} \left(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3 \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_{12})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r}_{12})}{r_{12}^2} \right).$$

2. En supposant dans un premier temps que seule l'orientation de \vec{p} peut varier, indiquer pour quelles valeurs de θ le dipôle est en équilibre, stable ou instable.
3. Le dipôle est-il attiré ou repoussé par le conducteur?

Solution

1. Remarquons que l'on peut toujours se placer dans un plan contenant le dipôle et l'axe Oz , puisque le conducteur est invariant par rotation autour de cet axe : seul comptera l'angle θ que fait le dipôle avec l'axe Oz (voir la figure jointe).



La méthode des images électriques est très générale et part de la constatation suivante : soit un domaine (\mathcal{D}) de l'espace limité par une surface (\mathcal{S}). Si l'on fixe les conditions aux limites sur les conducteurs contenus dans (\mathcal{D}) et sur la surface (\mathcal{S}) (charge ou potentiel), alors le potentiel électrostatique V dans le domaine (\mathcal{D}) est unique. En l'absence de charges libres et en dehors des conducteurs, V est solution de l'équation de LAPLACE $\Delta V = 0$.

Ainsi, pour déterminer le potentiel électrostatique (et par la suite le champ électrique, les forces...) dans le domaine (\mathcal{D}), on peut remplacer la répartition de charges D_1 en dehors de (\mathcal{D}) par une autre répartition D_2 qui donnera sur la surface (\mathcal{S}) des conditions aux limites identiques. C'est la méthode des images électriques, dont l'intérêt est de choisir une répartition D_2 « plus simple » que D_1 pour le calcul des différentes grandeurs.

Ici, le domaine (\mathcal{D}) est le demi-espace $z > 0$. Supposons que le conducteur situé en $z \leq 0$ soit parfait : son volume est à potentiel constant. La surface (\mathcal{S}) est donc le plan $z = 0$ à potentiel constant et la distribution de charges D_1 est le conducteur remplissant le demi-espace $z < 0$. Il nous faut trouver D_2 –simple– qui impose un potentiel constant sur le plan $z = 0$. Pour cela, exploitons les propriétés de symétrie du champ électrique. Nous savons que celui-ci est contenu dans le plan de symétrie (lorsqu'il existe) d'une répartition de charges quelconque, et qu'il est orthogonal à un plan d'antisymétrie. Cela signifie qu'un plan d'antisymétrie est une surface équipotentielle (les surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ).

Le dipôle qui nous intéresse est placé au point P , à une distance d du plan $z = 0$. Nous allons choisir D_2 de telle façon que le plan $z = 0$ soit un plan d'antisymétrie pour la répartition de charges {dipôle + D_2 }. Soit Π la symétrie plane par rapport au plan $z = 0$; le dipôle de moment

$$\vec{p}' = -\Pi(\vec{p})$$

placé au point $P' = \Pi(P)$ convient. Le dipôle \vec{p} ayant pour coordonnées polaires (θ, φ) , $\Pi(\vec{p})$ a pour coordonnées $(\pi - \theta, \varphi)$ et $-\Pi(\vec{p})$ est repéré par les angles $(\theta, \varphi + \pi)$. Cela signifie que :

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = \vec{p} \cdot [-\Pi(\vec{p})] = |\vec{p}|^2 \cos(2\theta) = |\vec{p}|^2 (2 \cos^2 \theta - 1).$$

Le dipôle placé en P' est l'image électrique du dipôle \vec{p} (voir la figure 2.13) comme on peut le vérifier en calculant le potentiel électrostatique d'un point

M du plan $z = 0$:

$$V_{\text{tot}}(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3} + \frac{\vec{p}' \cdot \overrightarrow{P'M}}{4\pi\epsilon_0 P'M^3} = 0.$$

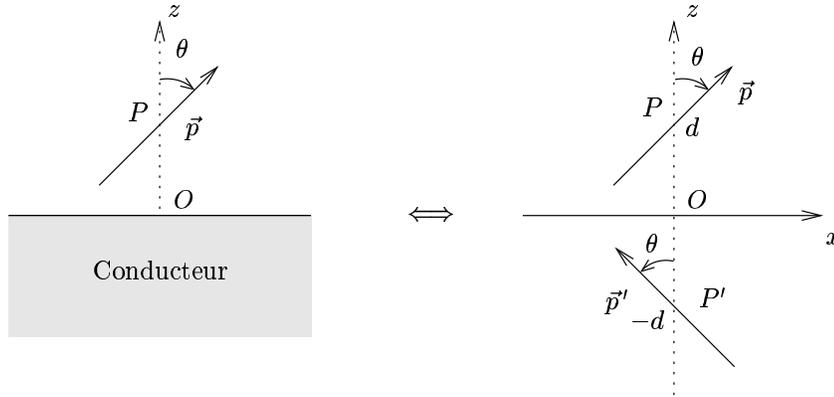


FIG. 2.13 - Équivalence électrostatique des deux descriptions ; définition de l'image électrique du dipôle \vec{p} .

L'énergie d'interaction électrostatique entre le dipôle \vec{p} et le conducteur est la même que l'énergie d'interaction entre \vec{p} et \vec{p}' . Ainsi,

$$\begin{aligned} E_p &= E_d(\vec{p}, \vec{p}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2d)^3} \left\{ \vec{p} \cdot \vec{p}' - \frac{3}{(2d)^2} (2dp \cos \theta)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{8d^3} (\cos 2\theta - 3 \cos^2 \theta), \end{aligned}$$

d'où l'expression demandée :

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{8d^3} (1 + \cos^2 \theta).$$

2. Supposons que seul θ puisse varier ; une position d'équilibre est donnée par

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

et une position d'équilibre stable correspond à la réalisation simultanée des conditions :

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \geq 0.$$

Dans le cas présent,

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{8d^3} \sin 2\theta,$$

quantité qui, dans l'intervalle $[0, \pi]$ s'annule en $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi$.

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{8d^3} \cos 2\theta.$$

En ce qui concerne les degrés de liberté de rotation seule, les positions repérées par les angles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ sont des positions d'équilibre stable alors que pour $\theta = \pi/2$, le dipôle est en équilibre instable.

Remarque : les résultats de stabilité précédents peuvent aussi être obtenus en calculant le moment des forces exercées par un dipôle sur l'autre. Soit par exemple $\vec{E}[\vec{p}'](\vec{r})$ le champ créé par le dipôle \vec{p}' au point \vec{r} . Le moment des forces exercées sur le dipôle \vec{p} est

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}[\vec{p}'](\vec{r}_{12})$$

avec

$$\vec{E}[\vec{p}'](\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} [3(\vec{p}' \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}'r^2].$$

Pour $\theta = 0, \pi/2$ ou π , on a bien $\vec{\Gamma} = \vec{0}$. Comment se comporte le moment lorsque le dipôle \vec{p} est perturbé de $\delta\vec{p}$, c'est-à-dire lorsque

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \delta\vec{p}$$

où \vec{p}_0 est la valeur du moment dipolaire \vec{p} à l'équilibre, et $\delta\vec{p}$ est orthogonal à \vec{p}_0 ? Cette contrainte d'orthogonalité, jointe à $|\delta\vec{p}| \ll |\vec{p}_0|$ assure qu'au premier ordre en $\delta\vec{p}$, la perturbation affecte uniquement l'orientation θ du dipôle, et pas son module. Pour $\theta = 0$, $\delta\vec{p} = \delta p \vec{e}_x$ ($\delta\vec{p}$ est dans le plan contenant Oz et \vec{p}):

$$\vec{p}' = -\Pi(\vec{p}) = \vec{p}_0 - \delta\vec{p},$$

et le champ électrique créé au point P est

$$\vec{E}[\vec{p}'](P) = \frac{1}{32\pi\epsilon_0 d^3} (2\vec{p}_0 + \delta\vec{p}).$$

Ainsi,

$$\vec{\Gamma}(\theta = 0) = \frac{1}{32\pi\epsilon_0 d^3} \delta\vec{p} \wedge \vec{p}_0,$$

qui tend à faire revenir le dipôle vers sa position d'équilibre $\vec{p} = \vec{p}_0$, d'où la stabilité. En revanche, pour $\theta = \pi/2$, $\delta\vec{p} = \delta p \vec{e}_z$ et

$$\vec{p}' = -\Pi(\vec{p}) = -\vec{p}_0 + \delta\vec{p}.$$

Le champ électrique correspondant est

$$\vec{E}[\vec{p}'](P) = \frac{1}{32\pi\epsilon_0 d^3} (\vec{p}_0 + 2\delta\vec{p}),$$

et le moment des forces a pour expression :

$$\vec{\Gamma}(\theta = \pi/2) = \frac{1}{32\pi\epsilon_0 d^3} \vec{p}_0 \wedge \delta\vec{p},$$

ce qui a tendance à amplifier la perturbation. . .

Ces résultats concernant les moments se retrouvent directement en dérivant l'énergie potentielle d'interaction par rapport à 2θ (voir la remarque faite à la question suivante pour l'origine du facteur 2).

3. L'énergie potentielle d'interaction électrostatique est d'autant plus faible que d est petit. Le dipôle est donc attiré par le conducteur.

Le même phénomène se produit lorsque l'on met une charge q de signe quelconque en regard d'un conducteur. La méthode des images électriques permet de remplacer le conducteur par une charge $-q$ qui va donc attirer la charge q (voir la figure 2.14).

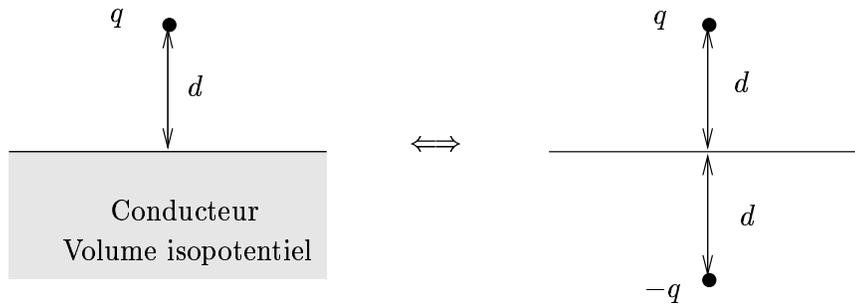


FIG. 2.14 - Image électrique d'une charge ponctuelle. Dans les deux situations, le potentiel électrostatique dans le demi-espace supérieur est le même.

Remarque : on peut calculer explicitement la force subie par le dipôle situé en P . Celle-ci est donnée par

$$\vec{f} = -\vec{\text{grad}} E_p,$$

mais il faut prendre le gradient par rapport aux coordonnées définies en considérant le point P' comme l'origine de l'espace : c'est, d'après la méthode des images électriques, le dipôle image situé en P' qui crée le champ électrique en P . Cela signifie que dans ce repère, \vec{f} a pour coordonnées polaires

$$\vec{f} = - \begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial r'} \\ \frac{1}{r'} \frac{\partial E_p}{\partial \theta'} \end{cases} \quad \text{avec} \quad r' = 2d \quad \text{et} \quad \theta' = 2\theta.$$

En d'autres termes, la variation d'énergie potentielle E_p correspond au travail fourni par un opérateur qui déplacerait le dipôle de \vec{r}_1 à \vec{r}_2 , tout en s'assurant que le conducteur reste à l'équilibre électrostatique. L'opérateur devra pour cela faire migrer des charges à la surface $z = 0$, et fournir un travail correspondant au déplacement du dipôle image de $-\vec{r}_1$ à $-\vec{r}_2$:

$$\begin{aligned} E_p(2) - E_p(1) &= \int_1^2 -\vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{\Pi(1)}^{\Pi(2)} -\vec{f} \cdot d\vec{r} \\ &= 2 \int_1^2 -\vec{f} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Il y a donc un facteur 2 entre la variation d'énergie potentielle et le travail de la force ressentie par le dipôle situé en P .

Pour $\theta = 0$, on obtient :

$$\vec{f} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_p}{\partial d} \vec{u}_z = -\frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 d^4} \vec{u}_z,$$

dont le signe traduit bien une attraction entre le dipôle et le conducteur.

Ce résultat peut être vérifié par un calcul direct : en règle générale, un dipôle placé dans un champ électrique subit une force

$$\vec{f} = \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E}.$$

Pour $\theta = 0$, il vient

$$\vec{f} = \left(p \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}[\vec{p}'](\vec{r}) \right) (z = 2d, \theta = 0).$$

Comme précédemment, le champ est donné par

$$\vec{E}[\vec{p}'](\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} [3(\vec{p}' \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}'r^2],$$

et on retrouve

$$\vec{f} = -\frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 d^4} \vec{u}_z.$$

Pour $\theta = \pi/2$, un calcul analogue donnerait :

$$\vec{f} = -\frac{3p^2}{64\pi\epsilon_0 d^4} \vec{u}_z.$$

EXERCICES

2.3.6 Champ magnétique créé par un cylindre conducteur

Durée 20 min.

On considère un cylindre conducteur de rayon R et de hauteur $h \gg R$. Dans l'exercice, on travaillera dans le système des coordonnées cylindriques, l'axe du cylindre s'identifiant à l'axe ($z'z$).

Ce cylindre est parcouru par un courant volumique orthoradial

$$\vec{j}(M) = \alpha r \vec{e}_\theta$$

en un point $M(r, \theta, z)$ du cylindre. En dehors du cylindre, $\vec{j} = \vec{0}$.

Calculer le champ magnétique \vec{B} créé en tout point de l'espace par cette distribution de courant.

Solution

Le cylindre a une hauteur $h \gg R$: on peut donc négliger les effets de bord. Ainsi, la distribution de courant est invariante par toute translation d'axe $(z'z)$. Cette distribution étant également invariante par toute rotation d'angle θ , le champ magnétique ne dépend que de la coordonnée radiale: $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

De plus, la distribution de courant est symétrique par rapport à tout plan (Π) perpendiculaire à l'axe du cylindre. Le champ magnétique \vec{B} est donc antisymétrique par rapport à ce même plan. Ainsi, le champ magnétique est dirigé selon l'axe $(z'z)$:

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$$

Afin de calculer le champ magnétique créé par une telle distribution, utilisons le théorème d'AMPÈRE :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{S(C)}$$

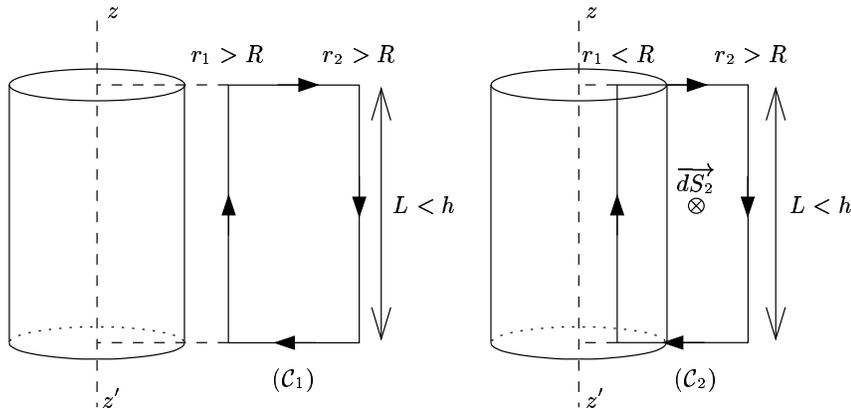


FIG. 2.15 - Définition des contours (C_1) et (C_2) et des orientations

Pour $r > R$, on choisit le contour (C_1) défini sur la figure 2.15. L'application du théorème d'AMPÈRE donne

$$B(r_2) = B(r_1).$$

Par ailleurs, le champ magnétique s'annule pour $r \rightarrow \infty$, ce qui signifie

$$\boxed{\forall r > R, \quad \vec{B}(r) = \vec{0}},$$

comme c'est le cas pour un solénoïde infini. Ce résultat peut être montré en utilisant la loi de BIOT et SAVART :

$$|B(M)| \leq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \text{cylindre}} \frac{|\vec{j}(P)|}{PM^2} d\tau \leq \frac{\alpha R \mu_0}{4\pi} \int_P \frac{d\tau}{PM^2},$$

d'où

$$|B(r)| \leq \frac{\alpha R \mu_0}{4\pi} \pi R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + (r - R)^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Pour $r < R$, on choisit le contour (\mathcal{C}_2) défini sur la figure 2.15, la surface $S(\mathcal{C}_2)$ étant la portion de plan limitée par ce contour avec $d\vec{S}_2 = dS \vec{e}_\theta$. L'application du théorème d'AMPÈRE donne

$$[B(r_1) - \underbrace{B(r_2)}_{=0}]L = \mu_0 \iint_{S(\mathcal{C}_2)} \vec{j} \cdot d\vec{S}_2 = \mu_0 L \int_{r_1}^R j(r) dr = \frac{\mu_0 \alpha L}{2} (R^2 - r_1^2).$$

On en conclut :

$$\boxed{\forall r \leq R, \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \alpha}{2} (R^2 - r^2) \vec{e}_z}.$$

Remarque : on peut vérifier la continuité du champ magnétique en $r = R$, ce qui est bien conforme aux relations de passage puisqu'il n'y a pas de courant surfacique circulant en $r = R$.

EXERCICES

2.3.7 Sphère chargée en rotation

Durée 15 min

Une surface sphérique de rayon R porte une charge surfacique σ . Elle tourne autour de son diamètre Oz à la vitesse angulaire ω .

1. Déterminer le champ magnétique au centre O de la sphère.
2. Calculer son moment magnétique.

Solution

1. En raison de la rotation du support (la sphère), les charges sont mises en mouvement : une densité surfacique de courant apparaît. Elle s'exprime en fonction de la densité surfacique de charge et de la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{j}_s &= \sigma \vec{v} \\ &= \sigma (R \sin \theta) \omega \vec{T}, \end{aligned}$$

où la colatitude θ et le vecteur tangent à la trajectoire \vec{T} sont définis figure 2.16.

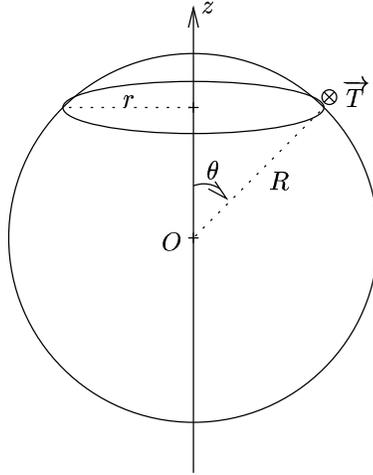


FIG. 2.16 - Spire élémentaire de la sphère en rotation.

La nappe de courant peut être considérée comme la superposition d'une infinité de spires élémentaires, parcourues par un courant di et reconstituant ainsi la sphère complète. Le courant infinitésimal associé à une spire de colatitude θ (figure 2.16) vaut alors

$$\begin{aligned} di &= j_s \cdot R d\theta \\ &= R^2 \sigma \omega \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

La contribution de cette spire au champ magnétique est (cf. problème 2.4.2)

$$\begin{aligned} d\vec{B}(O) &= \frac{\mu_0 di}{2r} \sin^3 \theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 R^2 \sigma \omega \sin \theta}{2R \sin \theta} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z, \end{aligned}$$

et le champ magnétique total est

$$\vec{B}(O) = \int_0^\pi d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z.$$

On décompose la puissance troisième du sinus en

$$\sin^3 \theta = -\frac{1}{4} (\sin 3\theta - 3 \sin \theta),$$

d'où

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}.$$

Le champ magnétique au centre de la sphère a donc pour expression :

$$\vec{B}(O) = \frac{2\mu_0\sigma\omega R}{3} \vec{e}_z.$$

2. Le moment élémentaire d'une spire de rayon $r = R \sin \theta$ est :

$$d\vec{M} = \vec{S} di = \pi r^2 di \vec{e}_z.$$

On somme les contributions de chacune de ces boucles de courant pour obtenir le moment magnétique total de la sphère chargée en rotation

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \int_0^\pi S di \vec{e}_z \\ &= \int_0^\pi \pi (R \sin \theta)^2 di \vec{e}_z, \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{M} = \frac{4\pi}{3} \sigma R^4 \omega \vec{e}_z.$$

2.4 Problèmes

2.4.1 Électrostatique d'un cylindre conducteur ; spires et dipôles magnétiques.

Université Paris VI
Durée 3h

PROBLÈMES

PROBLÈME I : Étude d'un cylindre conducteur

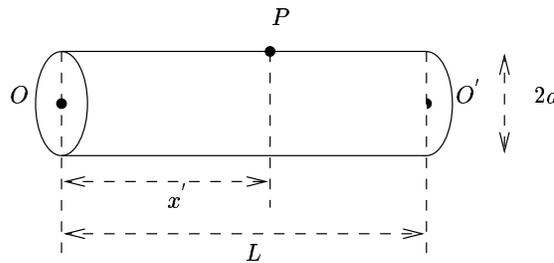


FIG. 2.17 - Définition des principales grandeurs

On considère un cylindre de rayon a et de longueur L ($L > a$, cf. figure 2.17). Ce cylindre est uniformément chargé en surface, portant la charge totale

Q. Ce cylindre est placé dans le vide, loin de tout conducteur. Le problème consiste à calculer le potentiel électrique $\varphi(P)$ en un point P à la surface du cylindre. Dans ce calcul, on fera l'approximation suivante: la distribution réelle de charges est remplacée par celle d'un fil rectiligne OO' (figure 2.18) de longueur L , chargé avec la densité linéique $\lambda = Q/L$.

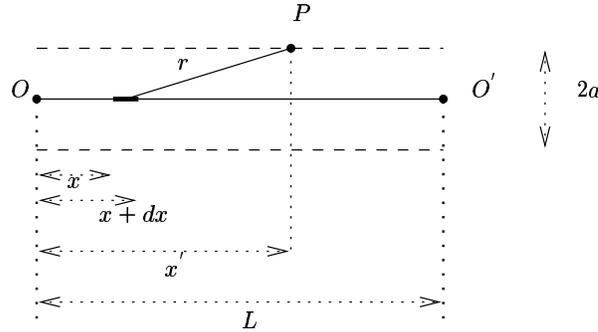


FIG. 2.18 - Approximation du cylindre par une ligne OO'

1. Écrire la contribution $d\varphi(P)$ au potentiel $\varphi(P)$ d'un élément dx du fil.
2. En déduire que l'expression de $\varphi(P)$ est :

$$\varphi(P) = \varphi(x') = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{x'}{a} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{x' - L}{a} \right) \right].$$

3. Quelle est la forme asymptotique de $\varphi(L/2)$ lorsque $L \gg a$?
4. On considère maintenant un fil infiniment long chargé dont la densité linéique est λ . À partir du théorème de GAUSS, calculer le potentiel $\varphi(P)$ créé par ce fil en un point P situé à une distance a du fil. Comparer le résultat obtenu à celui de la question précédente.
5. Si le cylindre de longueur L finie est métallique, la densité surfacique de charge ne peut plus être constante. Cependant le potentiel φ l'est. Pourquoi?
6. On admettra que ce potentiel φ constant peut être calculé approximativement en moyennant le potentiel $\varphi(x')$ obtenu à la question 2. sur toute la longueur L du cylindre. Déterminer φ .

Formulaire :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) = \operatorname{argsh}(x),$$

$$\int_0^x \operatorname{argsh}(t) dt = x \operatorname{argsh}(x) - \sqrt{1+x^2} + 1.$$

PROBLÈME II : Spires magnétiques

A. Une bobine mince de centre O , d'axe zOz' , de rayon a , comporte au total N spires jointives sur une longueur h , parcourues par un courant continu d'intensité I . À la distance r du centre O telle que $r \gg a$ et $r \gg h$, cette bobine peut être assimilée à un dipôle magnétique élémentaire de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = NI\pi a^2 \vec{e}_z$ (voir la figure 2.19).

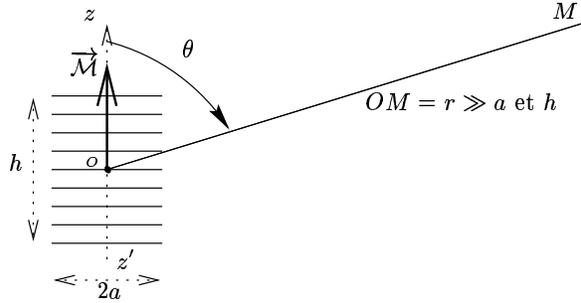


FIG. 2.19 - La bobine mince

On rappelle que le potentiel vecteur créé par un dipôle placé en O , en un point M situé à la distance $r = OM$ du dipôle très grande devant les dimensions de celui-ci est :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mathcal{M}} \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{r^3}.$$

Calculer le champ d'induction magnétique $\vec{B}(M)$. En déduire son expression en un point du plan xOy .

B. On se place maintenant en un point M du plan xOy situé à une distance ρ de O comparable à la hauteur h de la bobine, le rayon a étant très petit devant h et ρ . Dans ces conditions, la bobine peut être assimilée à un empilement de dipôles élémentaires (figure 2.20). Chaque tranche de bobinage d'épaisseur dz sera assimilable à un dipôle de moment magnétique :

$$d\vec{\mathcal{M}} = nI\pi a^2 dz \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad n = \frac{N}{h}.$$

1. En utilisant des considérations de symétrie, montrer qu'en des points du plan médiateur, \vec{B} est parallèle à l'axe des z .
2. Exprimer la contribution dB_z à B_z d'une tranche d'épaisseur dz à la cote z en fonction de dB_r et dB_θ (question A), puis en fonction de α et de ρ (figure 2.20).
3. En déduire l'expression de B_z en fonction de ρ et de la valeur maximum α_m de α .

4. Que devient l'expression de B_z :
- a) Lorsque $\rho \gg h$. Retrouver les résultats de la question A.
 - b) Lorsque h devient très grand (n restant fini).

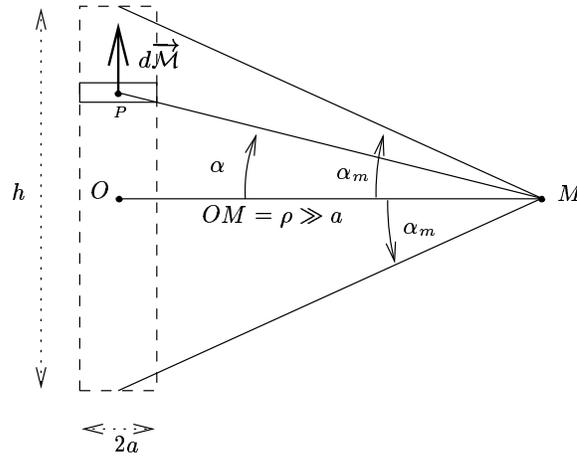


FIG. 2.20 - L'empilement de dipôles élémentaires

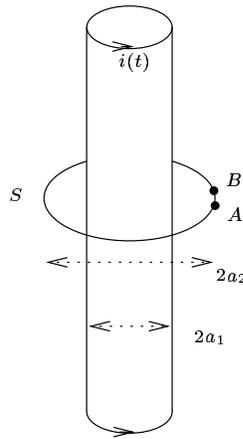


FIG. 2.21 - Position de la spire conductrice ; $h \gg a_2 > a_1$.

C. On considère maintenant un solénoïde de section circulaire, de rayon a_1 , d'axe $z'Oz$, de longueur h pratiquement infinie, constitué d'un enroulement de

spires jointives (n spires par mètre). Le solénoïde est alimenté par un courant sinusoïdal de basse fréquence :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t).$$

Une spire conductrice circulaire (S), ouverte, de rayon a_2 plus grand que le rayon a_1 , centrée sur l'axe $z'Oz$ est placée dans un plan de cote z (figure 2.21)

1. Déterminer le champ d'induction magnétique $\vec{B}(M, t)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(M, t)$ créés par le solénoïde en tout point M loin des extrémités.
2. Quelle est la différence de potentiel $V_A - V_B$ induite aux bornes de la spire S (figure 2.21)?
3. On court-circuite la spire S et on obtient ainsi un circuit de résistance R et d'inductance propre L . En régime sinusoïdal établi, quel courant $i_2(t)$ circule dans la spire S ?

Formulaire : en coordonnées sphériques r, θ, φ :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \vec{e}_r \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \right\} \\ &+ \vec{e}_\theta \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right\} + \vec{e}_\varphi \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \right\} \end{aligned}$$

Solution du problème I

1. La notation proposée dans l'énoncé pour le potentiel créé au point P par un élément de longueur dx de fil, est incomplète. Il faudrait en effet préciser en quel point x l'élément de longueur est placé. Notons $d\varphi(x \rightarrow P)$ la contribution au potentiel de l'élément de fil en question. Avec les notations de la figure 2.18,

$$d\varphi(x \rightarrow P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} dx.$$

2. Le potentiel électrostatique est la somme de toutes les contributions élémentaires $d\varphi(x \rightarrow P)$:

$$\varphi(P) = \int_{x=0}^{x=L} d\varphi(x \rightarrow P) = \int_0^L \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r(x)} dx,$$

où

$$r(x)^2 = (x' - x)^2 + a^2.$$

En posant $t = (x - x')/a$, il vient $dt = dx/a$ et :

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-x'/a}^{(L-x')/a} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^{(L-x')/a} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - \int_0^{-x'/a} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{L-x'}{a} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{-x'}{a} \right) \right].\end{aligned}$$

La fonction sh étant impaire, argsh l'est aussi, d'où

$$\boxed{\varphi(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{x'}{a} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{x' - L}{a} \right) \right] + C^{\text{te}}.}$$

Il ne faut pas oublier la constante additive : seules les dérivées du potentiel ont un sens physique.

3. Étant donné que pour $x \rightarrow \infty$, $\operatorname{argsh}(x) \sim \ln x$, la forme asymptotique de $\varphi(L/2)$ pour $L \gg a$ est

$$\boxed{\varphi \left(\frac{L}{2} \right) \sim \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L}{a} \right) + C^{\text{te}}.}$$

4. Pour calculer le potentiel créé en dehors de son axe par un fil infiniment long, considérons un cylindre de même axe, de rayon r , hauteur h et appliquons le théorème de GAUSS (nous calculons d'abord le champ électrique). Attention, r n'a ici plus la même signification qu'aux questions précédentes : r désigne maintenant la distance au fil.

$$\oiint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}.$$

Le symbole \oiint désigne traditionnellement le flux d'un champ de vecteurs sur une surface fermée (ici, le cylindre). Le champ \vec{E} n'a pas de composante suivant le fil car tout plan orthogonal au fil est plan de symétrie de la répartition de charges. De même, tout plan contenant le fil est plan de symétrie, d'où

$$\vec{E} = E(\vec{r}) \vec{u}_r$$

en coordonnées cylindriques. Par ailleurs, le système est invariant par translation d'axe parallèle au fil, et par toute rotation dans un plan orthogonal au fil, d'où $E(\vec{r}) = E(r)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}2\pi r h E(r) &= \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.\end{aligned}$$

Le potentiel se déduit du champ par :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi.$$

On obtient :

$$\varphi(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C^{\text{te}}.$$

Si l'on choisit la constante de telle sorte que le potentiel s'annule à une distance r_0 du fil :

$$\boxed{\varphi(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_0}{r} \right)}.$$

Dans la limite où $L \rightarrow \infty$, le potentiel trouvé à la question 3 doit tendre vers celui que nous venons de calculer. Mais dans cette limite l'expression de la question 3 diverge ! Pour pouvoir comparer les deux calculs, il faut reconsidérer le problème de la constante additive dans :

$$\varphi \left(\frac{L}{2} \right) \sim \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L}{a} \right) + C^{\text{te}}.$$

Pour être cohérent, il nous faut ici aussi choisir la constante de telle sorte que

$$\varphi(P) = 0 \quad \text{pour} \quad r = r_0,$$

ce qui donne,

$$\varphi \left(\frac{L}{2} \right) \sim \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_0}{a} \right),$$

qui est bien le potentiel régnant à la distance a d'un fil infini. Les résultats des questions 3 et 4 sont, sous cette forme, identiques.

Remarque : la formule

$$\varphi(P) = \iiint_{M \in \mathcal{D}} \frac{\rho(M)}{4\pi\epsilon_0 PM} d^3v$$

n'est valable que pour des distributions de charges \mathcal{D} d'extension finie. C'est ce qui explique que dans le cas du fil infini, nous avons d'abord calculé le champ électrique, duquel on a déduit le potentiel électrostatique. Pour obtenir le champ, nous avons utilisé le théorème de GAUSS qui est toujours valable, mais nous aurions pu aussi exploiter la relation

$$\vec{E}(P) = \iiint_{M \in \mathcal{D}} \frac{\rho(M)}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \frac{\vec{MP}}{MP} d^3v.$$

Contrairement à son analogue pour le potentiel, cette expression est valable même pour des distributions d'extension infinie, tant que la densité volumique de charge $\rho(M)$ est bornée. Cette différence tient à ce que :

$$\int_1^\infty \frac{1}{r} dr \quad \text{est une intégrale impropre divergente}$$

alors que :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \quad \text{est une intégrale impropre convergente.}$$

5. Dans un corps métallique supposé parfaitement conducteur (*i.e.* de conductivité « infinie »), il ne peut exister de champ électrique (sinon, la densité volumique de courant serait infinie, en vertu de $\vec{j} = \sigma \vec{E}$). Or, en régime permanent, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, ce qui signifie que le potentiel est constant dans tout le volume et sur la surface d'un conducteur parfait.

En revanche, il n'est pas possible que la charge surfacique du cylindre soit constante. Contrairement à la géométrie sphérique, la géométrie cylindrique ne permet pas d'avoir simultanément une charge surfacique constante et un potentiel constant. Les calculs justifiant cette affirmation sont lourds...

6. Par hypothèse,

$$\varphi = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(x') dx'.$$

En posant $t = x'/a$, il vient :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 L} \int_0^{L/a} [\operatorname{argsh}(t) - \operatorname{argsh}(t - L/a)] dt \\ &= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 L} \int_0^{L/a} \operatorname{argsh}(t) dt, \end{aligned}$$

soit finalement,

$$\varphi = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 L} \left\{ \frac{L}{a} \operatorname{argsh}\left(\frac{L}{a}\right) - \sqrt{1 + \left(\frac{L}{a}\right)^2} + 1 \right\}.$$

Solution du problème II

A. Par définition, le champ magnétique est relié au potentiel vecteur par :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Dans le cas présent,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4} N a^2 I \underbrace{(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r)}_{\sin \theta \vec{e}_\varphi} \frac{1}{r^2}$$

où \vec{e}_z est un vecteur unitaire de l'axe des z . Ainsi, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$$\vec{A} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0}{4} N a^2 I \frac{\sin \theta}{r^2} \end{cases}$$

ce qui implique, d'après la formule donnée dans l'énoncé :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4} \frac{Na^2 I}{r^3} \begin{cases} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{cases} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{r^3} \begin{cases} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{cases}.$$

On retrouve que \vec{B} n'a pas de composante suivant \vec{e}_φ . En effet, le plan passant par M et l'axe $z'Oz$ de la bobine est un plan d'antisymétrie pour la répartition des courants ; il contient donc le champ magnétique.

Si l'on se place en un point du plan xOy , on a alors $\theta = \pi/2$ d'où :

$$\vec{B}_{\text{plan}} = \frac{\mu_0}{4} \frac{Na^2 I}{r^3} \vec{e}_\theta.$$

Dans le plan de symétrie des courants, le champ magnétique n'a qu'une composante orthogonale à ce plan.

Remarque : les expressions du champ du dipôle magnétique peuvent être déduites de celles du dipôle électrique par substitution de \vec{B} à \vec{E} , de $\vec{\mathcal{M}}$ à \vec{p} et de μ_0 à $1/\epsilon_0$.

B.1. Tout plan de symétrie pour les courants est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique et réciproquement. Formellement cette affirmation se traduit comme suit. Soit Π_S un plan de symétrie et Π_A un plan d'antisymétrie pour les courants. Cela signifie :

$$\begin{aligned} \vec{i}(\Pi_S(M)) &= \Pi_S(\vec{i}(M)) \\ \vec{i}(\Pi_A(M)) &= -\Pi_A(\vec{i}(M)) \end{aligned}$$

où $\Pi_S(M)$ et $\Pi_A(M)$ représentent le symétrique du point M par rapport au plan considéré et $\vec{i}(M)$ est le vecteur densité de courant au point M . Les règles de symétrie s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\Pi_S(M)) &= -\Pi_S(\vec{B}(M)) \\ \vec{B}(\Pi_A(M)) &= \Pi_A(\vec{B}(M)). \end{aligned}$$

On dit aussi que le champ magnétique est un *pseudo-vecteur*, c'est-à-dire que contrairement au champ électrique, il change de signe lorsque la convention d'orientation de l'espace change.

En résumé, le champ magnétique est contenu dans un plan d'antisymétrie des courants et il est orthogonal à tout plan de symétrie des courants. Bien entendu, on peut trouver des situations où ces plans n'existent pas.

Dans le cas qui nous intéresse, le plan xOy est un plan de symétrie des courants, ce qui permet d'affirmer que

$$\vec{B} \text{ est parallèle à l'axe des } z.$$

B.2. On ne s'intéresse qu'à la contribution suivant l'axe des z de chaque dipôle élémentaire. Cette contribution provient à la fois de dB_r et dB_θ :

$$dB_z = \cos \theta dB_r - \sin \theta dB_\theta.$$

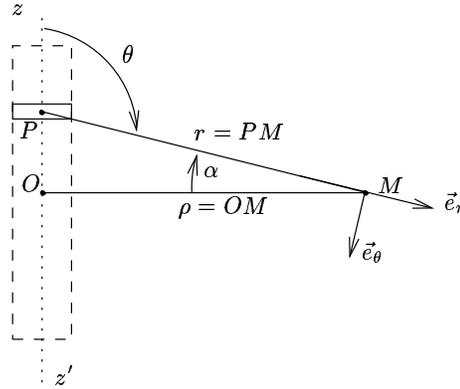


FIG. 2.22 - Relation entre α , θ , ρ et r .

Nous avons montré à la question A que :

$$dB_r = \frac{\mu_0}{4\pi} d\mathcal{M} \frac{2 \cos \theta}{r^3}$$

$$dB_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} d\mathcal{M} \frac{\sin \theta}{r^3}.$$

À l'aide de la figure 2.22, nous pouvons écrire $\theta = \alpha + \pi/2$ et :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\sin \alpha \\ \sin \theta &= \cos \alpha \\ r &= \rho / \cos \alpha, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$dB_r = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathcal{M}}{\rho^3} 2 \sin \alpha \cos^3 \alpha$$

$$dB_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathcal{M}}{\rho^3} \cos^4 \alpha.$$

Ainsi,

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathcal{M}}{\rho^3} \cos^3 \alpha (3 \sin^2 \alpha - 1).$$

B.3. On a $d\mathcal{M} = nI\pi a^2 dz$ avec $z = \rho \tan \alpha$, soit :

$$dz = \rho \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Nous pouvons maintenant écrire $B_z = \int dB_z$ sous la forme

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} nI\pi a^2 \frac{1}{\rho^2} \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \cos \alpha (3 \sin^2 \alpha - 1) d\alpha,$$

qui s'intègre en posant $u = \sin \alpha$ pour donner :

$$B_z = -\frac{\mu_0}{2} nIa^2 \frac{1}{\rho^2} \sin \alpha_m \cos^2 \alpha_m.$$

B.4.a) Dans la limite où $\rho \gg h$, $\alpha_m \rightarrow 0$ puisque $\tan \alpha_m = h/(2\rho)$. Plus précisément, $\sin \alpha_m \sim \alpha_m$, $\cos \alpha_m \sim 1$ et

$$\alpha_m \sim \frac{h}{2\rho} \Rightarrow B_z \sim -\frac{\mu_0}{4} nIa^2 \frac{h}{\rho^3},$$

d'où

$$B_z \sim -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{\rho^3}.$$

Compte tenu de $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_z$ pour $\theta = \pi/2$, on retrouve bien le résultat de la question A :

$$\vec{B}_{\text{plan}} = -\frac{\mu_0}{4} \frac{Na^2 I}{r^3} \vec{e}_z.$$

B.4.b) Dans la limite où h devient très grand (sous-entendu, par rapport à ρ), on a $\alpha_m \rightarrow \pi/2$ par valeurs inférieures. Posons

$$\alpha_m = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{avec bien sûr } \varepsilon > 0 \text{ et } \varepsilon \ll 1,$$

il vient :

$$\tan \alpha_m = \frac{1}{\tan \varepsilon} = \frac{h}{2\rho}.$$

On a alors $\varepsilon \sim 2\rho/h$, d'où

$$\sin \alpha_m \cos^2 \alpha_m \sim \varepsilon^2.$$

Ainsi,

$$B_z \sim -2\mu_0 nI \frac{a^2}{h^2} \quad \text{et} \quad |B_z| \ll \mu_0 nI.$$

Ce résultat est indépendant de ρ mais il suppose $\rho \gg a$. À titre de vérification, nous pouvons remarquer que lorsque h tend vers l'infini, le champ magnétique tend vers 0. Dans ce cas, il est égal à $\mu_0 nI$ à l'intérieur du solénoïde et nul en dehors. Le signe $-$ présent dans l'expression précédente assure que les lignes de champ sont fermées (cf. figure 2.23 où le solénoïde est supposé très allongé : $h \gg a$)

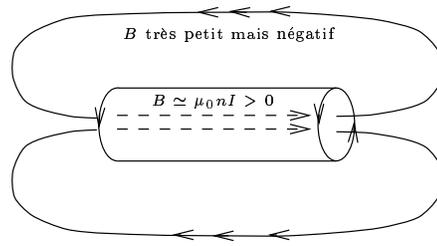


FIG. 2.23 - Représentation des lignes de champ.

C.1. À des distances bien supérieures à a_1 , le champ magnétique est uniforme :

$$\vec{B} \simeq -2\mu_0 ni(t) \frac{a_1^2}{h^2} \vec{e}_z.$$

Par ailleurs, on peut vérifier que le potentiel vecteur correspondant à un champ magnétique constant est :

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}.$$

Dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ des coordonnées cylindriques (à ne pas confondre avec la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ des coordonnées sphériques), on a (voir figure 2.24)

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi.$$

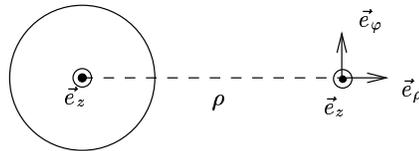


FIG. 2.24 - La base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ des coordonnées cylindriques.

Ainsi,

$$\vec{A} = -\mu_0 ni(t) \frac{a_1^2}{h^2} \rho \vec{e}_\varphi.$$

Le potentiel vecteur possède bien la même symétrie que les courants.

C.2. En règle générale, le champ électromoteur a pour expression :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Ici, la spire est immobile et le champ \vec{E}_m devient :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Nous supposons les points A et B très proches. La différence de potentiel induite aux bornes de la spire S est

$$V_B - V_A = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \text{avec} \quad \vec{e}_\varphi \cdot d\vec{l} = -dl,$$

d'où

$$V_B - V_A = 2\pi\mu_0 n \frac{a_1^2}{h^2} a_2 I_0 \omega \sin(\omega t).$$

C.3. Le circuit équivalent à la spire peut se schématiser comme sur la figure 2.25 qui précise la convention d'orientation pour l'intensité i_2 .

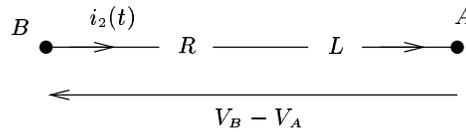


FIG. 2.25 - Circuit obtenu après court circuit de la spire S .

On a donc :

$$V_A - V_B + Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} = 0,$$

ce qui signifie que l'on observera un régime transitoire de temps caractéristique L/R avant qu'un régime sinusoïdal forcé ne s'établisse. Dans ce régime, la dépendance temporelle de i_2 est sinusoïdale. Pour résoudre l'équation différentielle précédente, il est commode de définir la grandeur complexe \bar{i} :

$$i_2(t) = \text{Re}(\bar{i}) \quad \text{où} \quad \bar{i} = \mathcal{A} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} \in \mathcal{C}.$$

Ainsi,

$$-2\pi\mu_0 n \frac{a_1^2}{h^2} a_2 I_0 \omega \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{Re}[-j \exp(j\omega t)]} + \text{Re}(R\bar{i} + j\omega L\bar{i}) = 0,$$

d'où

$$j 2\pi\mu_0 n \frac{a_1^2}{h^2} a_2 I_0 \omega e^{j\omega t} + (R + j\omega L) \mathcal{A} e^{j\omega t} = 0.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -j 2\pi\mu_0 n \frac{a_1^2}{h^2} a_2 I_0 \omega \frac{1}{R + j\omega L} \\ &= -2\pi\mu_0 n \frac{a_1^2}{h^2} a_2 I_0 \omega \frac{L\omega + jR}{R^2 + L^2\omega^2}. \end{aligned}$$

En définitive,

$$i_2(t) = -2\pi\mu_0 n \frac{a_1^2}{h^2} a_2 I_0 \frac{\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \{ L\omega \cos(\omega t) - R \sin(\omega t) \}.$$

Comme il se doit, la partie inductive du signal (terme en $L \cos(\omega t)$) est en quadrature, c'est-à-dire déphasée de $\pi/2$ par rapport à la partie réactive $R \sin(\omega t)$. On peut vérifier que pour $L = 0$, on a bien :

$$i_2(t) = \frac{1}{R} (V_B - V_A).$$

2.4.2 Champ magnétique permanent créé par une spire circulaire ; étude d'un câble coaxial ; dilatation des durées en relativité restreinte

Université Paris VI
Durée : 3 h.

L'utilisation des calculettes n'est pas autorisée

I. Question de Cours

Énoncer la loi de BIOT et SAVART et définir les grandeurs concernées. Calculer le champ \vec{B} en un point M de l'axe d'une spire circulaire parcourue par un courant d'intensité I .

II. Problème : Étude d'un câble coaxial

On considère un câble coaxial constitué par un conducteur cylindrique (âme) de rayon extérieur R_1 et un conducteur cylindrique extérieur (gaine) de rayon intérieur R_2 ($R_2 > R_1$). Les deux conducteurs ont pour axe commun $z'z$ et sont séparés par un espace vide. La longueur h du câble peut être considérée comme infiniment grande devant le rayon R_2 .

Dans tout le problème, on utilisera le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

A. Électrostatique

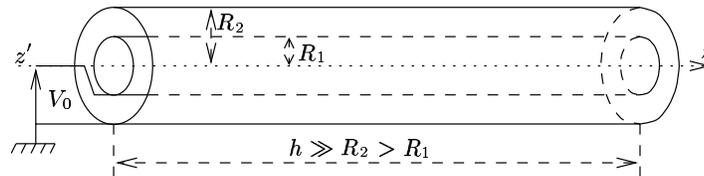


FIG. 2.26 - Modélisation du câble coaxial en électrostatique

Une tension continue V_0 est appliquée sur le conducteur central (figure 2.26).

L'ensemble constitue un condensateur dont l'armature centrale porte la charge Q répartie uniformément avec la densité surfacique σ_1 .

1.

- a) À partir de considérations de symétrie, montrer qu'en tout point M de l'espace, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est radial et que sa composante ne dépend que de la distance r du point M à l'axe $z'z$.
- b) En utilisant le théorème de GAUSS, déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.

2. Calculer l'énergie électrostatique W_e emmagasinée dans le câble de longueur h . En déduire l'expression de la capacité C d'un câble coaxial de longueur h .

B. Magnétostatique

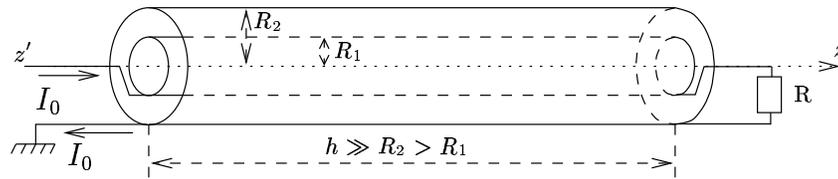


FIG. 2.27 - Modélisation du câble coaxial en magnétostatique

Une résistance R ferme le circuit en $z = h$: un courant continu d'intensité I_0 circule parallèlement à l'axe $z'z$, dans le sens $z'z$, sur l'âme centrale et un courant de même intensité I_0 circule dans le sens inverse zz' sur la gaine (figure 2.27).

1. On assimile l'ensemble des courants à deux nappes de courants cylindriques coaxiales, infiniment minces, de rayons respectifs R_1 et R_2 . L'âme et la gaine sont des tubes conducteurs creux infiniment minces.
 - a) Quelle est, en un point M quelconque de l'espace, la direction du champ d'induction magnétique $\vec{B}(M)$ et de quelles variables d'espace dépend la composante en coordonnées cylindriques de $\vec{B}(M)$?
 - b) En utilisant le théorème d'AMPÈRE, calculer $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.
2. Calculer l'énergie magnétostatique W_m emmagasinée dans le câble de longueur h ainsi que son coefficient L d'inductance propre.

C. Régime sinusoïdal rapidement variable

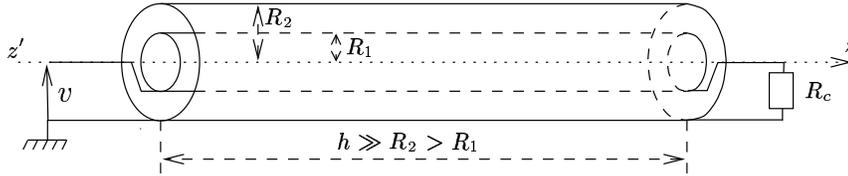


FIG. 2.28 - Modélisation du câble coaxial en régime variable

Un signal sinusoïdal rapidement variable $v = V_0 \cos \omega t$ est appliqué à l'entrée du câble (figure 2.28). Si le câble est fermé à sa sortie sur une résistance R_c convenable, les ondes électromagnétiques sinusoïdales générées par le signal sont susceptibles de se propager uniquement dans le sens $z'z$ dans l'espace vide compris entre les conducteurs cylindriques. On se propose de déterminer R_c .

La fréquence angulaire ω du signal est telle que les conducteurs peuvent être considérés comme parfaits ; la propagation de l'onde se fait sans perte.

1. Rappeler les équations de MAXWELL dans le vide.
2. Parmi les différents modes possibles d'ondes susceptibles de se propager avec une fréquence donnée dans le câble, on envisage une onde à la fois transverse électrique et transverse magnétique. Les champs \vec{E} et \vec{B} n'ont pas de composante E_z et B_z et leurs composantes radiale ou orthoradiale ne dépendent que de r , z et t .

Compte-tenu des conditions aux limites à la surface des conducteurs parfaits, on cherche une onde qui s'écrit, en utilisant un système de coordonnées cylindriques et la notation complexe :

$$\vec{\widetilde{E}} \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{E}_r = f(r)e^{i(\omega t - kz)} \\ \widetilde{E}_\theta = 0 \\ \widetilde{E}_z = 0 \end{array} \right. ; \quad \vec{\widetilde{B}} \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{B}_r = 0 \\ \widetilde{B}_\theta = g(r)e^{i(\omega t - kz)} \\ \widetilde{B}_z = 0 \end{array} \right.$$

où k est une constante réelle positive. En se référant aux équations de MAXWELL :

- a) exprimer $\text{div } \vec{\widetilde{E}}$ et montrer que $r f(r) = U_0$ où U_0 est une constante ;
 - b) utiliser l'équation de MAXWELL-FARADAY pour trouver une relation entre $f(r)$ et $g(r)$;
 - c) en déduire à partir de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE la relation qui lie k et ω .
3. On rappelle que l'expression générale du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ en fonction du potentiel scalaire $V(M, t)$ et du potentiel vecteur $\vec{A}(M, t)$ s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = -\text{grad } V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t).$$

Compte-tenu de la symétrie du problème, on choisira ici $\vec{A}(M, t)$ orienté suivant l'axe des z .

Calculer à l'instant $t = 0$ dans le plan $z = 0$ l'intégrale $\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{OM}$ en utilisant pour $\vec{E}(M, t)$ l'expression obtenue à la question précédente. En déduire U_0 en fonction de V_0, R_1, R_2 .

4.

- a) Calculer la moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique w en un point M quelconque entre les deux conducteurs ainsi que la moyenne temporelle du vecteur de POYNTING \vec{P} au même point. À quelle vitesse se propage l'énergie dans le câble?
- b) Calculer la valeur moyenne temporelle de la puissance totale transmise par la ligne coaxiale. Sachant que l'amplitude de la tension en sortie est V_0 , en déduire la valeur qu'il convient de donner à la résistance R_c . Comparer la valeur obtenue pour R_c à $\sqrt{L/C}$ où L et C sont respectivement l'inductance propre et la capacité calculées précédemment.

Application Numérique : $R_1 = 10^{-3} \text{ m}$; $R_2 = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Calculer R_c .

Formulaire : on rappelle les expressions de $\text{div } \vec{A}$ et $\text{rot } \vec{A}$ en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ (\text{rot } \vec{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ (\text{rot } \vec{A})_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\text{rot } \vec{A})_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned}$$

PROBLÈMES

III. Problème

Soient deux référentiels galiléens (R) et (R') d'origines respectives O et O' . (R') est animé d'un mouvement de translation par rapport à (R) de vitesse $\vec{V} // \vec{Ox}$; à l'instant $t = t' = 0$, les deux référentiels coïncident. L'extrémité A d'une règle AB au repos dans (R) est placée en O et l'autre extrémité B sur l'axe \vec{Ox} à la distance L de O (figure 2.29).

Dans (R) , une particule P parcourt la règle à la vitesse \vec{u} ($u > V$). Elle part de A à l'instant $t = 0$ où O et O' coïncident (événement E_0), arrive en B (événement E_1), fait demi-tour instantanément et rejoint O' (événement E_2).

1. Déterminer les intervalles de temps et les distances mesurés dans (R) qui séparent les événements E_1 et E_0 , E_2 et E_0 . Les exprimer en fonction de L, u et V .

2. Quel intervalle de temps mesuré dans (R') sépare les événements E_2 et E_0 ? En donner la valeur numérique pour $V = 0,6c$; $u = c$; $L = 1\text{ m}$.

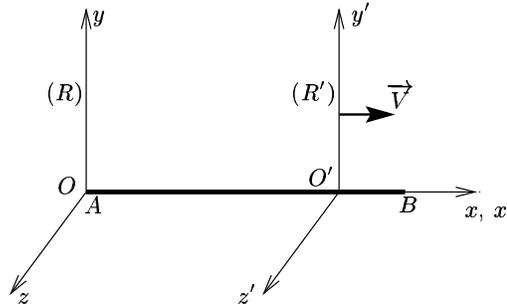


FIG. 2.29 - Les référentiels (R) et (R')

Solution

I. Question de cours :

Pour une distribution volumique de courant \vec{j} contenue dans un volume (V) , la loi de BIOT et SAVART s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \iiint_{(V)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} dv_{(P)}$$

où M est le point où l'on calcule le champ magnétique et P un point courant de la distribution volumique. Dans le cas d'une distribution surfacique \vec{j}_s , on a, de façon analogue :

$$\vec{B}(M) = \iint_{(S)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_s \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} dS_{(P)}.$$

Enfin, dans le cas d'un circuit linéique parcouru par un courant d'intensité I , le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl}_{(P)} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$

Précisons que la loi de BIOT et SAVART ne s'applique qu'à des distributions de courants en régime permanent ou lentement variable.

Appliquons la loi de BIOT et SAVART dans le cas présent.

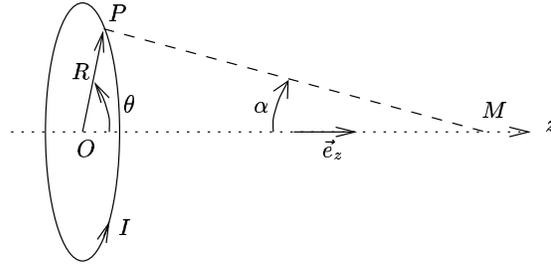


FIG. 2.30 - Définition des différentes grandeurs pour le calcul du champ magnétique créé par une spire circulaire. Le sens du courant dans la spire définit un vecteur normal (ainsi qu'un vecteur rotation) de même sens que \vec{e}_z .

On travaille en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On cherche le champ magnétique sur l'axe (Oz) . La distribution de courant considérée (la spire) est antisymétrique par rapport à tout plan (P) contenant l'axe (Oz) . Pour tout point M de (P) , le champ \vec{B} est donc contenu dans le plan (P) . En particulier, sur l'axe (Oz) , le champ s'écrit $\vec{B}(M) = B(z)\vec{e}_z$.

Le calcul de la composante du champ magnétique selon \vec{e}_z s'effectue en utilisant la loi de BIOT et SAVART énoncée précédemment :

$$B(z) = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{I \vec{dl}_{(P)} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right) \cdot \vec{e}_z .$$

D'après les notations de la figure 2.30, on a la relation $\sin \alpha = R/PM$, ce qui conduit, en repérant le point P par ses coordonnées polaires, à :

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^2 \alpha}{R^2} \int_0^{2\pi} R d\theta \underbrace{\left(\vec{e}_\theta \wedge \frac{\vec{PM}}{PM} \right)}_{\cos(\pi/2 - \alpha)} \cdot \vec{e}_z .$$

En ordonnant les différents termes, on obtient finalement :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z} \quad \text{avec} \quad \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} .$$

II. Problème :

Le câble coaxial étudié est tel que $h \gg R_2 > R_1$, ce qui revient à négliger les effets de bords dans le calcul des champs : le câble pourra être considéré comme « infini » dans la direction $z'z$.

A.1.a) La distribution de charges est invariante par toute translation parallèlement à la direction $z'z$, et par toute rotation autour de l'axe $z'z$. Le champ \vec{E} ne dépend donc que de la coordonnée r : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$

La distribution de charges est symétrique par rapport à tout plan (P) contenant l'axe $z'z$. Le champ électrique est donc symétrique par rapport au plan (P) . En particulier, pour tout point M appartenant à (P) , le champ $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan (P) . De même, la distribution de charges est symétrique par rapport à tout plan (P') perpendiculaire à l'axe $z'z$. Le champ électrique est donc également symétrique par rapport à (P') . Pour un point M appartenant à (P') , le champ électrique est contenu dans ce plan. En choisissant un point M appartenant à l'intersection des deux plans (P) et (P') , on en déduit que le champ électrique est radial. Ainsi :

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r.}$$

A.1.b) On applique le théorème de GAUSS

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

avec comme volume (V) un cylindre de longueur H arbitraire ($H < h$) et de rayon r , la normale à la surface (S) étant orientée vers l'extérieur. Q_{int} est la charge totale comprise à l'intérieur du volume (V) . En utilisant la forme de \vec{E} donnée à la question précédente, on arrive à :

$$E(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\epsilon_0 H r}.$$

Il faut considérer trois régions d'espace :

1. $r < R_1$: $Q_{int} = 0$
2. $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = 2\pi R_1 H \sigma_1$
3. $R_2 < r$: $Q_{int} = Q + (-Q) = 0$ car, pour $r > R_2$, on se trouve à l'extérieur du câble et les deux conducteurs sont en influence totale.

D'où :

$$\boxed{\begin{array}{ll} r < R_1 & : \vec{E} = \vec{0} \\ R_1 < r < R_2 & : \vec{E} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r \\ R_2 < r & : \vec{E} = \vec{0} \end{array}}$$

On peut remarquer que le champ électrique est discontinu en $r = R_1$ et $r = R_2$ et qu'il vérifie bien les relations de passage.

A.2. L'énergie électrostatique emmagasinée dans le câble peut s'écrire :

$$W_e = \iiint_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} d\tau.$$

Comme le champ électrique est nul à l'extérieur du câble, l'énergie se réduit à :

$$W_e = \iiint_{\text{câble}} \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} d\tau.$$

On utilise alors l'expression de \vec{E} calculée à la question précédente, les bornes d'intégration étant $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$. Le volume élémentaire $d\tau$ s'exprime en coordonnées cylindriques par $dr r d\theta dz$. Il s'ensuit que

$$W_e = \frac{\sigma_1^2 R_1^2 \pi h}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

Or, du point de vue de l'électrostatique, le câble est un condensateur cylindrique de longueur h . On peut définir sa capacité C par la relation

$$W_e = \frac{1}{2} Q (V_{\text{gaine}} - V_{\text{âme}}) = \frac{Q^2}{2C}, \quad \text{où } Q = 2\pi R_1 h \sigma_1.$$

On en déduit l'expression de C :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}.$$

B.1.a) Nous pouvons avancer les mêmes explications qu'à la question A.1.a), pour justifier que le champ \vec{B} ne dépend pas des variables θ et z , d'où $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

La distribution de courants est symétrique par rapport à tout plan (P) contenant l'axe $z'z$ du câble coaxial. Le champ d'induction magnétique \vec{B} est donc antisymétrique par rapport à ce plan (P) . En particulier, en un point M du plan (P) , le champ est orthogonal à (P) . Le champ d'induction magnétique est donc, en tout point M de l'espace, de la forme

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta.$$

B.1.b) On applique le théorème d'AMPÈRE

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{(S)}$$

avec comme contour (C) un cercle de rayon r centré sur l'axe $z'z$, les différentes orientations étant reliées entre elles par la règle du tire-bouchon. Avec la forme de \vec{B} donnée à la question précédente, il vient

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_{(S)}}{2\pi r}.$$

Il faut considérer trois régions d'espace :

1. $r < R_1$: $I_{(S)} = 0$
2. $R_1 < r < R_2$: $I_{(S)} = I_0$
3. $R_2 < r$: $I_{(S)} = I_0 + (-I_0) = 0$.

D'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} r < R_1 \quad : \quad \vec{B} = \vec{0} \\ R_1 < r < R_2 \quad : \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{e}_\theta \\ R_2 < r \quad : \quad \vec{B} = \vec{0} \end{array}}$$

B.2. L'énergie magnétique emmagasinée dans le câble peut s'écrire :

$$W_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint_{\text{câble}} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} d\tau.$$

On utilise alors l'expression de \vec{B} calculée à la question précédente, les bornes d'intégration étant $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$. On obtient ainsi :

$$\boxed{W_m = \frac{\mu_0 h I_0^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Or, du point de vue de la magnétostatique, le câble est un conducteur cylindrique de longueur h . On peut définir son inductance propre L par la relation $W_m = LI_0^2/2$. D'où l'expression de L :

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

C.1. Les équations de MAXWELL s'écrivent, dans le vide :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{Équation de MAXWELL-GAUSS} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Équation de MAXWELL-FARADAY} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] & \text{Équation de MAXWELL-AMPÈRE} \end{array}}$$

C.2. On choisit un mode de propagation où les deux champs sont transverses. Pour les mêmes raisons qu'aux questions A. et B., les modules des champs ne dépendent pas de la variable θ . Les conducteurs étant supposés parfaits, les conditions aux limites sont :

- la composante tangentielle du champ électrique est continue à la surface des conducteurs. Or, dans les conducteurs parfaits, on a $\vec{E} = \vec{0}$. La composante tangentielle du champ électrique est donc nulle à la surface des conducteurs ;
- la composante normale du champ magnétique est nulle à la surface du conducteur, pour des raisons analogues.

Ceci explique la forme des champs \vec{E} et \vec{B} proposée. Les ondes étudiées ne sont pas des ondes planes, il faudra donc utiliser les équations de MAXWELL de façon directe pour obtenir la relation de dispersion à l'intérieur du câble.

C.2.a) Avec l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques fournie dans le formulaire, l'équation de MAXWELL-GAUSS dans l'espace entre les conducteurs (où $\rho = 0$), permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial r} [rE(r)] = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{dr} [rf(r)] = 0 \quad \text{et donc} \quad \boxed{f(r) = U_0/r}.$$

C.2.b) L'équation de MAXWELL-FARADAY conduit, en utilisant l'expression du rotationnel donnée dans le formulaire, à :

$$\boxed{f(r) = \frac{\omega}{k} g(r)}.$$

C.2.c) L'équation de MAXWELL-AMPÈRE, dans l'espace entre les conducteurs (où $\vec{j} = \vec{0}$), donne :

$$kg(r) = \frac{\omega}{c^2} f(r)$$

et
$$\frac{\partial}{\partial r} [rg(r)] = 0,$$

ce qui conduit à la relation entre k et ω : $\boxed{\omega = ck}$. On obtient une expression analogue à la relation de dispersion dans le cas d'une onde plane dans le vide, bien que l'onde étudiée ne soit manifestement pas plane !

Une autre méthode pour obtenir la relation entre k et ω serait de partir de l'équation d'onde

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0},$$

mais cela conduirait à des calculs nécessitant l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques.

C.3. Le système étant invariant par rotation autour de l'axe $z'z$, on a $\vec{A}(M, t) = \vec{A}(r, z, t)$. De plus, la distribution est antisymétrique par rapport à tout plan perpendiculaire à l'axe $z'z$: \vec{A} possède la même propriété et peut se mettre sous la forme $\vec{A}(M, t) = A(r, z, t)\vec{e}_z$.

On pose $\mathcal{I}_{z,t} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{OM}$. En remplaçant \vec{E} par son expression déduite de la question C.2.

$$\vec{E} = \frac{U_0}{r} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_r,$$

il vient :

$$\mathcal{I}_{z,t} = U_0 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) e^{i(\omega t - kz)}.$$

En particulier, à l'instant $t = 0$ dans le plan $z = 0$, on a

$$\boxed{\mathcal{I}_{0,0} = U_0 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}.$$

On peut réécrire $\mathcal{I}_{z,t}$ grâce à l'expression de $\vec{E}(M, t)$ proposée :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{z,t} &= - \int_{R_1}^{R_2} \left(\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM} \right) - \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\overrightarrow{OM} \right) \\ &= - \int_{R_1}^{R_2} dV - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial A}{\partial t} \underbrace{\vec{e}_z \cdot d\overrightarrow{OM}}_{=0}\end{aligned}$$

car, pour z et t fixés, on a $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r$. On a donc $\mathcal{I}_{0,0} = V_0$ à l'instant $t = 0$ dans le plan $z = 0$. En comparant cette expression à celle obtenue précédemment, on peut écrire :

$$U_0 = \frac{V_0}{\ln(R_2/R_1)}.$$

C.4.a) Dans l'espace entre les conducteurs, le milieu est assimilé au vide, d'où :

$$\langle w \rangle = \left\langle \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle,$$

On peut calculer directement les valeurs moyennes temporelles (notées avec les crochets $\langle \dots \rangle$) qui interviennent dans l'expression précédente, ou alors remarquer qu'avec la notation complexe :

$$\langle E^2 \rangle = \left\langle \text{Re} \left(\widetilde{\vec{E}} \right) \cdot \text{Re} \left(\widetilde{\vec{E}} \right) \right\rangle = \frac{1}{2} \widetilde{\vec{E}} \cdot \widetilde{\vec{E}}^*$$

dans le cas d'une dépendance sinusoïdale en temps (c'est bien le cas ici). Il en va de même pour le champ magnétique. D'après la question C.2., les champs $\widetilde{\vec{E}}$ et $\widetilde{\vec{B}}$ s'écrivent, en notation complexe :

$$\begin{aligned}\widetilde{\vec{E}} &= \frac{U_0}{r} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_r \\ \widetilde{\vec{B}} &= \frac{U_0}{cr} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans la relation donnant $\langle w \rangle$, il vient :

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2r^2}$$

qui s'écrit encore, d'après la question précédente

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{2 \ln^2(R_2/R_1)} \frac{1}{r^2}.$$

Dans le vide, le vecteur de POYNTING s'écrit en fonction des champs réels :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

et sa valeur moyenne temporelle peut se mettre, en notation complexe, sous la forme :

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left(\widetilde{\vec{E}} \wedge \widetilde{\vec{B}}^* \right).$$

Finalement :

$$\langle \vec{P} \rangle = c \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{2 \ln^2(R_2/R_1)} \frac{1}{r^2} \vec{e}_z = \langle w \rangle c \vec{e}_z.$$

Le vecteur de POYNTING caractérise la propagation de l'énergie dans le câble (voir l'exercice 3.4.1). On constate donc que

l'énergie électromagnétique se propage dans le câble à la vitesse c .

C.4.b) La puissance transmise par la ligne est le flux du vecteur de POYNTING sur la section de la ligne située en $z = h$, c'est-à-dire à la sortie du câble. D'après l'expression de $\langle \vec{P} \rangle$ calculée précédemment :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{transmise}} \rangle = \iint \langle \vec{P} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint \langle P \rangle 2\pi r dr.$$

On en déduit :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{transmise}} \rangle = \pi \varepsilon_0 c \frac{V_0^2}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Le câble étant fermé par une résistance R_c et l'amplitude de la tension de sortie étant égale à V_0 , on a :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{transmise}} \rangle = \langle U_{\text{sortie}} I_{\text{sortie}} \rangle = \frac{1}{R_c} \langle U_{\text{sortie}}^2 \rangle = \frac{V_0^2}{2R_c}.$$

Ainsi :

$$R_c = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi \varepsilon_0 c}.$$

En utilisant les questions A.2 et B.2, on trouve :

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Application Numérique : $R_c = 60 \Omega$.

Complément : la valeur de la résistance R_c calculée à la question C.4.b) peut être déterminée en étudiant le câble coaxial d'un point de vue électrocinétique. En effet, le câble est modélisable par une capacité $c = C/h$ par unité de longueur (on ne confondra pas c avec la vitesse de la lumière!) et par une inductance propre $l = L/h$ par unité de longueur, (comme le confirme l'étude statique effectuée aux questions A. et B.). Le câble étant sans pertes (conducteurs parfaits, milieu assimilé au vide), on peut en donner la modélisation suivante :

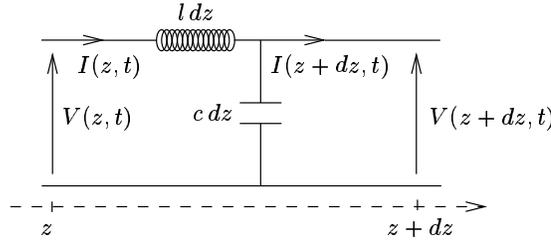


FIG. 2.31 - Modélisation électrocinétique du câble coaxial pour un élément de ligne de longueur dz , à un instant t donné

En utilisant la loi des mailles à l'instant t sur la portion de circuit comprise entre z et $z + dz$, on obtient :

$$V(z + dz, t) + l dz \frac{\partial I}{\partial t} = V(z, t) \quad \text{et} \quad I(z, t) = c dz \frac{\partial V}{\partial t} + I(z + dz, t).$$

En d'autres termes :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z} = -l \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} = -c \frac{\partial V}{\partial t} \end{cases}$$

ce qui conduit à l'équation de propagation

$$\boxed{lc \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}}.$$

La relation précédente est communément appelée *équation des télégraphistes*. On obtient une équation analogue pour la tension V . La solution générale de l'équation des télégraphistes se met sous la forme :

$$I(z, t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right) \quad \text{avec} \quad v^2 = \frac{1}{lc}.$$

Le courant dans la ligne est donc la superposition de deux ondes progressives se propageant à la vitesse $v = \sqrt{1/lc}$, l'une selon les $z > 0$ et l'autre selon les $z < 0$. De même, pour la tension, on a :

$$V(z, t) = \sqrt{\frac{l}{c}} \left[f\left(t - \frac{z}{v}\right) - g\left(t + \frac{z}{v}\right) \right].$$

On définit l'impédance itérative de la ligne en étudiant le cas où l'onde ne se propage que selon les z croissants :

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{l}{c}}.$$

Dans notre modèle, la ligne est fermée en $z = h$ par une résistance R_c . On a donc la relation $V(z = h, t) = R_c I(z = h, t)$. Cette dernière contrainte impose :

$$(Z_0 - R_c) f\left(t - \frac{h}{v}\right) = (Z_0 + R_c) g\left(t + \frac{h}{v}\right),$$

d'où l'expression du courant dans le câble :

$$I(z, t) = \underbrace{f\left(t - \frac{z}{v}\right)}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{\left(\frac{Z_o - R_c}{Z_o + R_c}\right) f\left(t + \frac{z - 2h}{v}\right)}_{\text{onde réfléchie}}.$$

Le coefficient de réflexion de l'onde est alors :

$$\mathcal{R} = \frac{Z_o - R_c}{Z_o + R_c} = \frac{1 - R_c/Z_o}{1 + R_c/Z_o}.$$

On constate que pour $R_c = Z_o$, $\mathcal{R} = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'onde réfléchie dans la ligne. La sortie de la ligne électrique est dite adaptée, puisque l'intégralité du signal entrant est transmis à la sortie de la ligne. On a, en reprenant les valeurs de $c = C/h$ et $l = L/h$, l'expression :

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Les deux descriptions sont équivalentes du point de vue de la fermeture de la ligne par la résistance R_c . En effet, la forme proposée à la question C. pour l'onde électromagnétique se propageant dans le câble supposait l'absence d'onde réfléchie à la sortie.

III. Problème :

III. Dans la configuration du problème, la transformation de LORENTZ s'écrit :

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

avec $\beta = V/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

III.1. On pose $T_{10} = t_{E_1} - t_{E_0}$, $T_{20} = t_{E_2} - t_{E_0}$ et par L_{10} et L_{20} on entend la distance parcourue par la particule entre les événements E_0 et E_i ($i = 1, 2$).

La règle est immobile dans (R), d'où :

$$L_{10} = L \quad \text{et} \quad T_{10} = \frac{L}{u}.$$

On a la relation $L_{20} = uT_{20}$ car la particule se déplace à vitesse constante u . Or, $L_{20} = L + BO' = 2L - AO'$ avec $AO' = VT_{20}$ d'où :

$$L_{20} = \frac{2Lu}{u + V} \quad \text{et} \quad T_{20} = \frac{2L}{u + V}.$$

III.2. La règle est immobile dans (R) qui est donc le référentiel propre de cette dernière: la mesure d'une durée dans (R) aura lieu avec une horloge

immobile dans (R) . Entre deux événements A et B , on aura, en utilisant la transformation de LORENTZ :

$$c(t'_B - t'_A) = \gamma [c(t_B - t_A - \underbrace{\beta(x_B - x_A)}_{=0})]$$

d'où la relation traduisant le phénomène de dilatation des durées : $T'_{AB} = \gamma T_{AB}$ (voir aussi l'exercice 7.4.3).

En définitive, pour les deux événements E_0 et E_2 :

$$T'_{20} = \gamma T_{20} \quad \text{soit} \quad \boxed{T'_{20} = \frac{2L\gamma}{u + V}}$$

Application Numérique : $T_{20} = 4,17 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ et $T'_{20} = 5,21 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.