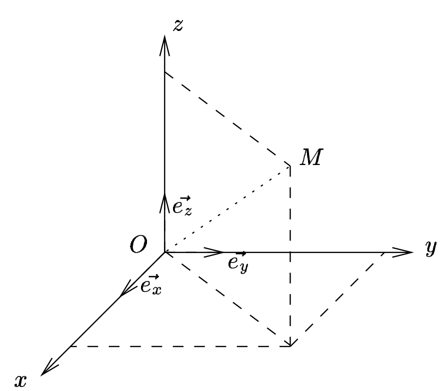
Chapitre 10

Formulaire Mathématique

10.1 Les différents systèmes de coordonnées

10.1.1 Coordonnées cartésiennes



Le trièdre ($\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$) est orthonormé direct.
Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) avec :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}.$$

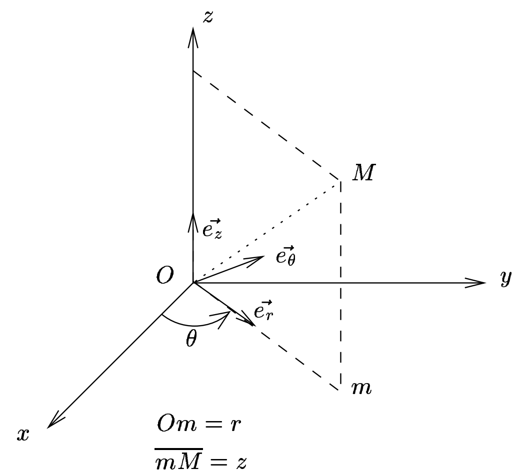
Un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ s'exprime par

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z},$$

un élément infinitésimal de volume $d\tau$ s'écrivant

$$d\tau = dx\,dy\,dz.$$

10.1.2 Coordonnées cylindriques



Le vecteur unitaire $\vec{e_r}$ est colinéaire à $\overrightarrow{Om}$ et le vecteur $\vec{e_\theta}$ est contenu dans le plan (xOy). Le trièdre $(\vec{e_r}\,, \vec{e_\theta}\,, \vec{e_z})$ est orthonormé direct.

Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}.$$

Un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ s'exprime par

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{e_r} + rd\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z},$$

un élément infinitésimal de volume $d\tau$ s'écrivant

$$d\tau = rdr\,d\theta\,dz.$$

10.1.3 Coordonnées sphériques

Le vecteur unitaire $\vec{e_r}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, le vecteur $\vec{e_\theta}$ est contenu dans le plan $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Om})$ et le vecteur $\vec{e_\phi}$ est perpendiculaire à ce plan. Le trièdre $(\vec{e_r}\,, \vec{e_\theta}\,, \vec{e_\phi})$ est orthonormé direct.

Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec :

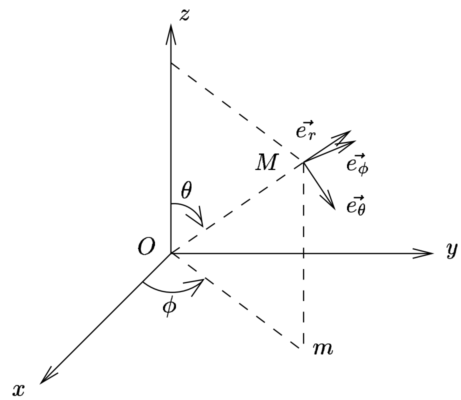
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}.$$

Un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ s'exprime par

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{e_r} + rd\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta d\phi\,\vec{e_\phi},$$

un élément infinitésimal de volume $d\tau$ s'écrivant

$$d\tau = r^2 dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi.$$



10.2 Analyse vectorielle

10.2.1 Les opérateurs vectoriels

En coordonnées cartésiennes, les opérateurs vectoriels ont pour expression :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} V &\equiv \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{e_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{e_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{e_z}\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &\equiv \mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\\
\vec{\nabla}\wedge\vec{A} &\equiv \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y}\\
&\qquad + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}\\
(\vec{\nabla})^2 V &\equiv \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques, le gradient s'exprime par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{e_z}$$

tandis qu'en coordonnées sphériques, il a pour expression :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\vec{e_\phi}.$$

En coordonnées sphériques, dans le cas d'une fonction scalaire f ne dépendant que de r, on a la relation :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r f(r)\right].$$

10.2.2 Relations entre opérateurs vectoriels

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(UV) = U\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V + V\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U$$

COURS

$$\mathrm{div}\,(V\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V + V\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(V\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\wedge\overrightarrow{A} + V\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$$

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}$$

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V) = \Delta V$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}) - \Delta\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} + (\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}$$

Deux relations ont une signification particulière.

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\right) = \overrightarrow{0}$. Plus précisément, on a l'équivalence

$$\forall M \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}(M) = \overrightarrow{0} \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\, V \text{ tel que } \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V.$$

  Le vecteur $\overrightarrow{A}$ est alors à circulation conservative : sa circulation entre les points M_1 et M_2

$$\int_{M_1}^{M_2}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dM}$$

  ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des points M_1 et M_2.

- $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\right) = 0$. Plus précisément :

$$\forall M \in \mathbb{R}^3,\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{B}(M) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\,\overrightarrow{A} \text{ tel que } \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}.$$

  Le vecteur $\overrightarrow{B}$ est alors à flux conservatif : son flux à travers la surface (S)

$$\iint_{(S)}\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS}$$

  ne dépend pas de la surface (S) mais uniquement du contour (Γ) sur lequel (S) s'appuie. Si la surface est fermée, le flux en question est nul.

10.2.3 Relations intégrales

- Théorème de STOKES : soit un contour (Γ) arbitrairement orienté, et une surface (S) s'appuyant sur ce contour. La direction de la normale à la surface (S) est en tout point liée à l'orientation de (Γ) par la règle du tire-bouchon (voir figure 10.1).

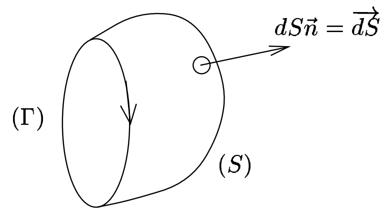


FIG. 10.1 - *Convention d'orientation pour l'application du théorème de* STOKES *(règle du tire-bouchon).*

Le théorème de STOKES s'écrit alors :

$$\oint_{(\Gamma)} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{(S)} (\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{dS} \;;$$

- Théorème d' OSTROGRADSKI : on considère une surface fermée (S) entourant un volume (V). La normale en tout point de la surface est orientée vers l'extérieur du volume (voir figure 10.2).

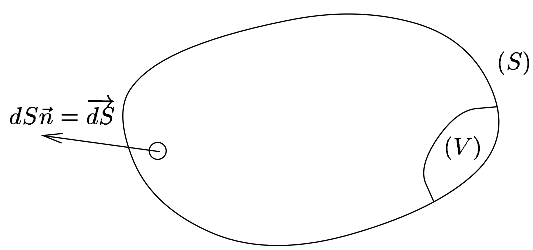


FIG. 10.2 - *Convention d'orientation pour l'application du théorème d'*OSTROGRADSKI

Le théorème d' OSTROGRADSKI s'écrit :

$$\oiint_{(S)} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \text{div}\, \overrightarrow{A}\, d\tau.$$

10.3 Quelques développements limités

On dit que $f = \mathcal{O}(g)$ pour $x \to x_0$ s'il existe une fonction h définie pour $|x - x_0|$ assez petit telle que $f(x) = g(x)h(x)$ avec h bornée pour $|x - x_0|$ assez petit. Si $g(x) \neq 0$ pour $|x - x_0|$ assez petit, cela signifie que f/g est bornée pour $|x - x_0|$ assez petit.

Les termes $\mathcal{O}$ qui apparaissent dans les égalités suivantes sont relatifs au voisinage de $x_0 = 0$:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\mathrm{argsh}\, x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\mathrm{argth}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5).$$

10.4 Fonctions de plusieurs variables

- Théorème de SCHWARTZ : soit f une fonction de deux variables x et y. Sous des conditions de continuité le plus souvent satisfaites en physique (f de classe $\mathcal{C}^2$), on a la relation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

  Ce théorème se généralise à des fonctions de n variables.

- Formes différentielles : soit f une fonction des deux variables x et y. La différentielle de la fonction f s'écrit :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy.$$

  Réciproquement, la forme différentielle

$$\delta\omega = A(x,y)\, dx + B(x,y)\, dy$$

  est dite totale (ou totale exacte) s'il existe une fonction f telle que $df = \delta\omega$. La fonction f existe si et seulement si

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y.$$

  Cette équivalence se généralise à des fonctions de n variables.

- Fonctions implicites : soit la relation

$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Sous certaines conditions mathématiques généralement satisfaites en physique, on dit que la relation $x(y, z)$ est définie de façon implicite à partir de la relation (1).

On en déduit alors deux relations importantes entre les dérivées partielles des fonctions implicites :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = +1$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -1.$$

COURS

10.5 Notions sur les torseurs

10.5.1 Définition

Un torseur (τ) est constitué par l'association d'un vecteur $\overrightarrow{R}$ et d'un champ de vecteurs $\vec{m}(P)$ vérifiant la relation constitutive :

$$\vec{m}(P) = \vec{m}(N) + \overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{R}.$$

On note ce torseur

$$(\tau) = \begin{cases} \overrightarrow{R} \\ \vec{m}(P) \end{cases}$$

et l'on nomme $\overrightarrow{R}$ la résultante du torseur et $\vec{m}(P)$ son moment résultant en P.

Un couple est un torseur de résultante nulle

10.5.2 Condition d'égalité

Deux torseurs (τ) et (τ') sont égaux si et seulement si

- *leurs résultantes sont égales ;*
- *il existe un point P tel que leurs moments résultants en P soient égaux.*

Notons qu'alors leurs moments résultants sont égaux en tout point.