

Chapitre 4

Induction

4.1 Rappels de cours

4.1.1 Les lois de l'induction

Loi de Lenz

Les phénomènes d'induction se manifestent par un couplage entre le champ magnétique et le champ électrique. Une description phénoménologique en est donnée par la loi de LENZ :

Le courant induit dans un circuit électrique est tel qu'il crée un champ magnétique qui tend à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

Loi de Faraday

Il s'agit de la traduction mathématique de la loi de LENZ. Soit

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

le flux du champ magnétique \vec{B} à travers la surface (S) délimitée par un circuit filiforme (\mathcal{C}) fermé, le choix du sens du courant induit circulant dans le circuit imposant le signe positif du flux, par « la règle du tire-bouchon » (définie dans le chapitre 10).

Tout se passe comme si l'on intercalait dans le circuit un générateur de force électromotrice (f.e.m.) e dans le sens positif choisi pour le courant. Cette f.e.m. induite a pour expression :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

la variation du flux provenant :

- du déplacement ou de la déformation continue du circuit ;
- de la variation du champ magnétique \vec{B} ;
- des causes précédentes agissant simultanément.

Exemple : grâce à cette formule, on peut simplement voir comment un alternateur transforme l'énergie mécanique en énergie électrique. Soit une spire en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un de ses diamètres. Cette spire est plongée dans un champ \vec{B} uniforme de direction perpendiculaire à l'axe de rotation. Par définition, le flux du champ magnétique au travers de la spire s'écrit $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$, soit si l'on appelle θ l'angle entre la normale à la spire et le champ \vec{B} : $\phi = B S \cos \theta$. À un déphasage près qu'il est possible de supprimer au moyen d'une origine des temps convenablement choisie, l'angle θ vaut ωt . En conséquence, la spire en rotation crée une f.e.m. de valeur $e = B\omega S \sin \omega t$.

Relation de Maxwell-Faraday

Localement, la loi de FARADAY s'exprime par la relation de MAXWELL-FARADAY :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Par ailleurs, le champ \vec{B} est à flux conservatif ($\text{div } \vec{B} = 0$), ce qui permet d'introduire le potentiel scalaire V et le potentiel vecteur \vec{A} tels que

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \\ \vec{E} &= -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Les relations précédentes ne définissent pas complètement les champs V et \vec{A} , qui n'ont pas de signification physique. Seuls \vec{E} et \vec{B} en ont une.

4.1.2 Champ électromoteur et force électromotrice d'induction

Considérons un circuit \mathcal{C} fermé, se déplaçant à une vitesse $\vec{v}_{(\mathcal{C})}$ dans un référentiel dans lequel règne un champ magnétique \vec{B} . Soit S la surface délimitée par le contour \mathcal{C} . Une analyse détaillée des différentes contributions mises en jeu lors de l'apparition du phénomène d'induction permet d'écrire :

$$\begin{aligned}e &= \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{(\mathcal{C})} (\vec{v}_{(\mathcal{C})} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{(\mathcal{C})} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \oint_{(\mathcal{C})} (\vec{v}_{(\mathcal{C})} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}.\end{aligned}$$

Le premier terme traduit la partie du phénomène due à la variation temporelle du champ alors que le second est lié au déplacement du circuit. On introduit le champ électromoteur du circuit

$$\boxed{\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_{(\mathcal{C})} \wedge \vec{B}}$$

ce qui permet d'écrire

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot \vec{dl}.$$

On peut montrer que pour un circuit \mathcal{C} se déformant *continûment* au cours du temps, la f.e.m. se met aussi sous la forme

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Dans le cas d'une portion (AB) de circuit (circuit ouvert), on définit de la même manière la force électromotrice :

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot \vec{dl}.$$

Cette dernière relation est celle qui est la plus générale. En cas d'ambiguïté pour l'application de la loi de FARADAY, il faut toujours revenir à cette dernière expression de la force électromotrice d'induction (voir par exemple l'exercice 4.2.5).

4.1.3 Lien avec l'électrocinétique

Approximation des régimes quasi-permanents

Pour l'étude des phénomènes d'induction électromagnétique, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &\simeq \mu_0 \vec{j}. \end{aligned}$$

Seule la dernière de ces équations constitue une approximation, la relation exacte étant l'équation de MAXWELL-AMPÈRE :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Plus généralement, **ces équations sont celles qui décrivent l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP)** : on néglige les phénomènes ondulatoires (voir le chapitre 3.2), ce qui revient mathématiquement à négliger le courant de déplacement (terme en $1/c^2$) dans l'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

Dans ce cadre, les lois de la magnétostatique restent vraies, \vec{j} est à flux conservatif mais les lois de l'électrostatique sont modifiées ($\operatorname{rot} \vec{E} \neq \vec{0}$). On se place dans cette situation lorsque l'on fait de l'électrocinétique.

Il faut cependant être prudent dans l'utilisation de l'ARQP qui peut conduire, puisqu'il s'agit d'une simplification des équations de MAXWELL complètes, à des incohérences...

Équation électrique d'une portion de circuit

Considérons un référentiel (\mathcal{R}) galiléen et une portion (\mathcal{C}) d'un circuit électrique filiforme, de résistance R_{AB} , dans laquelle circule un courant I_{AB} et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_{(\mathcal{C})}$ (voir la figure 4.1). La loi d'OHM, qui n'est valable que dans le référentiel du conducteur, s'écrit :

$$\vec{j}_{(\mathcal{C})} = \sigma \vec{E}_{(\mathcal{C})},$$

avec $\sigma = \ell / (sR_{AB})$ (ℓ désigne la longueur de conducteur considérée et s sa section). En utilisant alors les formules non relativistes de transformation des champs (cf. exercice 3.4.3), il vient

$$\vec{E}_{(\mathcal{C})} = \vec{E}_{(\mathcal{R})} + \vec{v}_{(\mathcal{C})} \wedge \vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_{(\mathcal{C})} \wedge \vec{B}.$$

Par conséquent,

$$\vec{j}_{(\mathcal{C})} = \sigma \left[-\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{E}_m \right].$$

La neutralité locale du conducteur permet d'écrire $\vec{j}_{(\mathcal{R})} = \vec{j}_{(\mathcal{C})}$ d'où l'équation électrique de la portion de circuit :

$$U_{AB} = U_A - U_B = R_{AB} I_{AB} - e_{AB}.$$

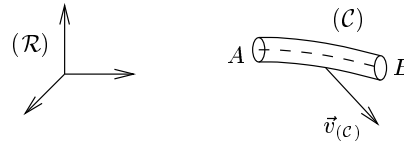


FIG. 4.1 - Déplacement d'une portion de conducteur dans un référentiel galiléen

4.1.4 Auto et mutuelle induction.

Auto-induction.

On considère un circuit filiforme parcouru par un courant I . Il est à l'origine d'un champ magnétique \vec{B} . Il existe un coefficient L , ne dépendant que de la géométrie du circuit, tel que

$$\phi_{\text{propre}} = LI,$$

où le signe positif du flux est lié à l'orientation du courant I par la « règle du tire-bouchon ». L est appelé coefficient d'auto-induction, **il est toujours positif** et s'exprime en Henry (H).

Exemple : si l'on prend le cas d'un solénoïde suffisamment long pour que puissent être négligés les effets de bord, le champ magnétique engendré a pour expression $B = \mu_0 n I$, où $n = N/l$ est le nombre de spires par unité de longueur. Le flux propre à travers l'ensemble du solénoïde est la somme des flux à travers chacune des spires, soit $\phi = N B S$. On en déduit que le coefficient d'auto-induction d'un solénoïde est $L = \mu_0 N^2 S/l$.

Mutuelle induction.

Considérons deux circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 en interaction via leurs champs magnétiques. Le circuit \mathcal{C}_1 est parcouru par un courant I_1 et envoie un flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ à travers \mathcal{C}_2 . Il existe un coefficient, de signe quelconque, ne dépendant que des formes et positions relatives des deux circuits et tel que

$$M = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{\phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2}.$$

M est appelé coefficient de mutuelle induction de l'ensemble \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 . **Son signe est quelconque** : il dépend des orientations choisies pour les circuits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Exemple : soient deux solénoïdes imbriqués de nombres de spires, longueur et section N_α, l_α et S_α ($\alpha = 1$ ou 2) et tels que $S_1 < S_2$ et $l_1 > l_2$. Les courants I_1 et I_2 qui les traversent sont pris de sens opposés. En négligeant une nouvelle fois les effets de bord, le champ magnétique engendré par 1 est nul à l'extérieur de 1 et uniforme de valeur $\mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 N_1 I_1 / l_1$ à l'intérieur. Le flux engendré par 1 sur 2 a pour expression, étant donnée l'orientation contraire des deux solénoïdes, $\phi_{1 \rightarrow 2} = -N_2 B_1 S_1$, ce qui conduit pour la mutuelle à $M = -\mu_0 N_1 N_2 S_1 / l_1$. Remarquons que, comme on l'avait précisé, le signe de M n'est pas connu *a priori* : si les courants traversant les deux solénoïdes avaient été de même sens, M aurait été positif.

4.1.5 Aspect énergétique

Énergie magnétique de circuits filiformes

Soient deux circuits (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) parcourus respectivement par des courants I_1 et I_2 (voir la figure 4.2).

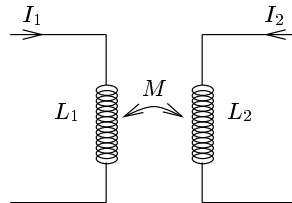


FIG. 4.2 - Les parties magnétiques des circuits (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2)

Un bilan énergétique conduit à l'énergie magnétique de l'ensemble des deux circuits :

$$E_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2.$$

Or, on peut écrire

$$\begin{cases} \phi_1 &= L_1 I_1 + M I_2 \\ \phi_2 &= L_2 I_2 + M I_1 \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$E_m = \frac{1}{2} I_1 \phi_1 + \frac{1}{2} I_2 \phi_2.$$

Cette expression se généralise à un système de circuits filiformes :

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i \phi_i.$$

Densité d'énergie magnétique

L'énergie magnétique d'un circuit quelconque se met sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2} \iiint_{\text{circuit}} \vec{j} \cdot \vec{A} \, d\tau = \iiint_{\text{espace}} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \, d\tau.$$

On définit alors la densité d'énergie magnétique (voir l'exercice 3.4.1) par :

$$w_m = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}.$$

Comme en électrostatique, on définit l'énergie magnétique d'interaction mutuelle de deux distributions de courants :

$$E_{m(1+2)} = E_{m_1} + E_{m_2} + E_{mm_{1,2}}$$

avec

$$E_{mm_{1,2}} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 \, d\tau.$$

Contrairement à l'énergie magnétique de chaque distribution qui est de signe positif, cette énergie magnétique mutuelle est de signe quelconque.

EXERCICES

4.2 Exercices

4.2.1 Barre mobile sur un cadre

Université de Versailles

Durée 45 min

Une barre métallique PQ , de masse m , de longueur a , peut glisser sans frottement le long de deux rails verticaux.

Les rails sont reliés à un générateur de force électromotrice constante U_0 . La résistance totale du circuit est R , elle est indépendante de la position de la barre PQ .

Dans l'espace où peut se déplacer la barre, règne un champ magnétique uniforme et constant : $\vec{B} = B \vec{e}_y$.

Jusqu'à l'instant initial $t = 0$, la barre est maintenue immobile. À l'instant $t = 0$, elle est libérée avec une vitesse initiale nulle.

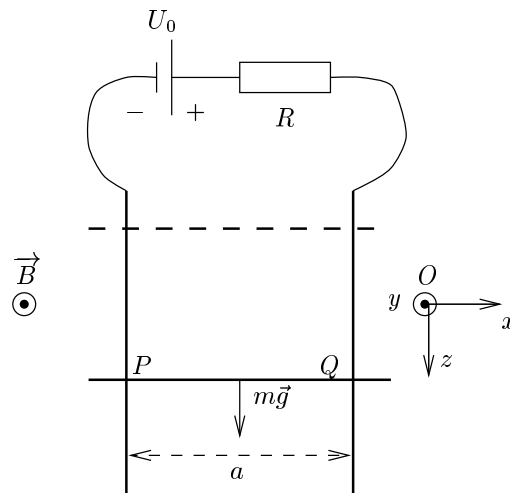


FIG. 4.3 - Schéma du circuit

1. Écrire les *équations électriques et mécaniques* qui régissent l'évolution dans le temps de ce système.
2. Résoudre ce système d'équations couplées (équation électrique et équation mécanique). En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ prise par la barre et l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant électrique qui circule dans le circuit.
3. À quelle condition doit satisfaire la résistance R du circuit pour que la barre se déplace vers le bas?

Application Numérique :

$$U_0 = 1,5 \text{ V} ; m = 0,5 \text{ g} ; B = 0,5 \text{ T} ; R = 8 \Omega ; a = 5 \text{ cm}.$$

- a) Déterminer la vitesse limite prise par la barre.
- b) Tracer les graphes des fonctions $v(t)$ et $i(t)$.

On négligera le champ magnétique créé par le courant.

Solution

1. Lorsque la barre se déplace dans le champ magnétique, il apparaît aux bornes du circuit une force électromotrice induite. L'orientation de i est donnée de manière conventionnelle par la tension U_0 du générateur. Une force électromotrice d'induction est orientée de telle manière qu'elle est positive lorsqu'elle débite le courant dans le sens positif. Le schéma électrique est alors :

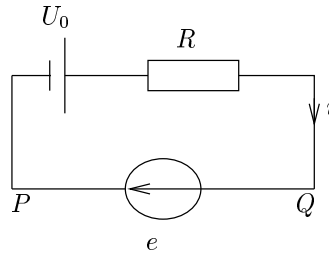


FIG. 4.4 - Circuit électrique

Le bilan électrique s'écrit

$$U_0 - Ri + e = 0.$$

La force électromotrice induite est liée à ϕ , flux du champ magnétique à travers le circuit, par la formule :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{où} \quad \phi = \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

Ici, le vecteur surface du circuit est orienté par l'intensité i , c'est-à-dire par le vecteur unitaire $-\vec{y}$:

$$\frac{d\phi}{dt} = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = B \vec{y} \cdot av(-\vec{y}) = -Bav.$$

On a donc :

$$e = Bav.$$

Nous pouvons maintenant exprimer l'équation du bilan électrique sous la forme :

$$v(t) = \frac{Ri(t) - U_0}{Ba}.$$

Le bilan mécanique est le suivant : la barre est soumise à deux forces, son poids \vec{P} et la force de LAPLACE \vec{F} . Cette dernière a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_Q^P i \vec{dl} \wedge \vec{B} \\ &= -iBa \vec{z}. \end{aligned}$$

En reportant cette relation dans l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à la barre, on obtient

$$m\dot{v}(t) = mg - i(t)Ba.$$

2. Le couplage de ces deux équations nous fournit, en éliminant i

$$\begin{cases} i(t) = \frac{U_0 + Bav(t)}{R} \\ \dot{v} + \frac{(Ba)^2}{mR}v = g - \frac{BaU_0}{mR}. \end{cases}$$

Par homogénéité du terme de gauche de la deuxième de ces équations, on définit τ , homogène à un temps, par

$$\tau = \frac{mR}{(Ba)^2}.$$

Avec cette nouvelle grandeur, l'équation différentielle précédente qui est du premier ordre, admet comme solution particulière :

$$v_{part}(t) = \tau \left(g - \frac{BaU_0}{mR} \right).$$

Pour sa solution générale, somme de la solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre on a par conséquent :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{part}(t).$$

On détermine la constante A introduite lors de cette résolution, grâce à la condition initiale qui stipule que

$$v(t)|_{t=0} = 0.$$

On obtient ainsi l'expression de v puis celle de i en reportant dans la première équation de notre système

$$\boxed{\begin{cases} v(t) = \tau \left(g - \frac{BaU_0}{mR} \right) [1 - e^{-t/\tau}] \\ i(t) = \frac{m}{Ba} [1 - e^{-t/\tau}] \end{cases}}$$

3. Remarquons que la vitesse est toujours du signe de sa valeur limite. Pour que la barre descende, il faut que cette vitesse limite soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} v_\infty \quad \text{où} \quad v_\infty > 0.$$

Autrement dit, grâce à l'expression de v trouvée précédemment

$$g - \frac{BaU_0}{mR} > 0$$

soit

$$\boxed{R > \frac{BaU_0}{mg}}.$$

Application Numérique : $R > 7,6 \Omega$.

Pour que la barre descende, on trouve que R doit être supérieure à une valeur critique donnée par $BaU_0/(mg)$. Est-ce cohérent ? On peut, pour répondre à cette question, étudier ce qu'il se passe dans la limite $R \rightarrow \infty$. Pour les grandes valeurs de la résistance, le courant ne peut plus circuler, et l'on doit avoir $i \rightarrow 0$. La force de LAPLACE exercée sur la barre va donc s'annuler et la barre ne sera plus soumise qu'à son poids. Elle va donc descendre. . .

On peut même aller un peu plus loin : si la barre n'est soumise qu'à son poids, sa vitesse doit obéir à $v(t) = gt$. Retrouve t-on ce résultat en prenant la limite $R \rightarrow \infty$ dans l'expression obtenue à la question 2 ? Lorsque la résistance devient très grande, τ tend vers l'infini, et donc :

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{t}{\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{\tau^2}\right).$$

Ainsi,

$$\tau(1 - e^{-t/\tau}) = t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Il vient alors :

$$v(t) = gt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right),$$

qui est bien le résultat attendu.

3.a) La vitesse limite prise par la barre est :

$$v_{\infty} = \tau \left(g - \frac{BaU_0}{mR} \right).$$

Application Numérique :

$$v_{\infty} = 2,7 \text{ m/s}.$$

3.b) L'allure des fonctions v et i s'obtient quant à elle sans difficulté puisqu'il s'agit d'une relaxation exponentielle de 0 jusqu'à une valeur limite qui est v_{∞} pour la vitesse, et $m/(Ba)$ pour l'intensité.

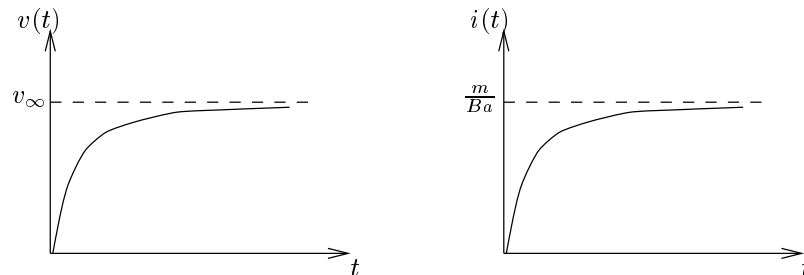


FIG. 4.5 - Allure de v et de i en fonction du temps.

Remarque : on a utilisé à la question 1. une convention de signe pour la force électromotrice qui peut laisser perplexé. Si tel est le cas, on peut faire une vérification assez simple qui prouve la validité du calcul initial. On considère directement le champ électromoteur d'induction \vec{E}_m qui vaut dans le cas général :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Comme le champ magnétique est constant, nous avons ici :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Par définition :

$$e = \int_Q^P \vec{E}_m \cdot d\vec{l}.$$

D'autre part,

$$\vec{E}_m = Bv\vec{z} \wedge \vec{y} = -Bv\vec{x}.$$

On en déduit :

$$e = Bav.$$

On retrouve bien l'expression obtenue par le calcul de la variation temporelle du flux.

4.2.2 Four à induction

Durée 20 min

On considère un barreau métallique fixe de longueur h , de rayon $R \ll h$ et de conductivité γ , soumis à un champ magnétique spatialement uniforme, variable dans le temps et de direction parallèle à l'axe du cylindre (figure 4.6).

1. Quel est le champ électrique induit en un point M du barreau?
2. Calculer l'expression de la puissance JOULE dissipée dans le barreau. Voyez-vous une application possible à ce phénomène d'induction?

Solution

1. Dans la limite $R \ll h$, le problème est invariant par translation d'axe Oz et par rotation de même axe : le champ électrique induit \vec{E}_m ne dépend que de la variable r . Par ailleurs, d'après l'équation de MAXWELL-FARADAY (1) (voir plus bas), son rotationnel est porté par Oz ce qui signifie que \vec{E}_m n'a pas de composante suivant Oz .

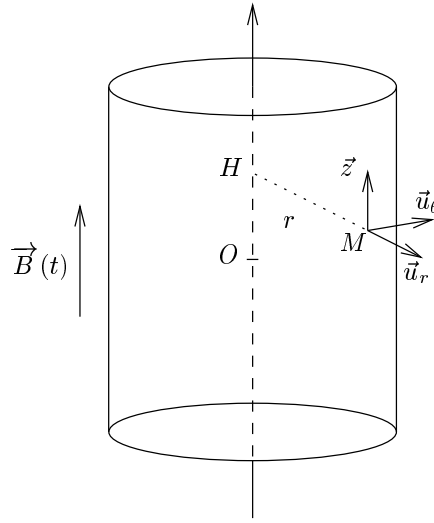


FIG. 4.6 - Barreau cylindrique et base mobile des coordonnées cylindriques.

Soit M un point extérieur à Oz . Le plan contenant Oz et M contient le champ \vec{B} ; \vec{E}_m est donc orthogonal à ce plan d'où

$$\vec{E}_m = E(r) \vec{u}_\theta.$$

Calculons ensuite la circulation de \vec{E}_m le long du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon r , inclus dans le plan orthogonal à Oz et passant par O :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = 2\pi r E(r).$$

L'équation de MAXWELL-FARADAY reliant le champ électrique induit au champ magnétique imposé est

$$\text{rot } \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1)$$

Soit \mathcal{D} le disque délimité par \mathcal{C} . On oriente le contour \mathcal{C} par \vec{u}_θ pour écrire

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{D}} \text{rot } \vec{E}_m \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}.$$

On en déduit

$$\boxed{\vec{E}_m = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \vec{u}_\theta}.$$

Autre méthode : le champ $\vec{B}(t)$ étant uniforme, un potentiel vecteur associé possible est donné par

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, M) &= \frac{1}{2} \vec{B}(t) \wedge \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{2} \vec{B}(t) \wedge \overrightarrow{OH} + \frac{1}{2} \vec{B}(t) \wedge \overrightarrow{HM}. \end{aligned}$$

Le champ magnétique étant dirigé selon la direction verticale \vec{z} , il vient

$$\vec{A}(t, M) = \frac{1}{2} r B(t) \vec{u}_\theta.$$

Dans le cas présent, le champ électrique d'induction est donné par

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

soit finalement

$$\vec{E}_m = -\frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} \vec{u}_\theta.$$

2. En l'absence de champ électrique statique, la loi d'OHM locale donne pour la densité de courant

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}_m = -\frac{\gamma}{2} r \frac{dB}{dt} \vec{u}_\theta.$$

La densité de puissance dissipée dans le conducteur s'exprime quant à elle au moyen de

$$p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}_m = \frac{\gamma r^2}{4} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2,$$

soit pour l'ensemble du barreau:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_J &= \int_{\text{barreau}} p_J r dr d\theta dz \\ &= 2\pi h \int_0^R \frac{\gamma r^2}{4} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 r dr, \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{P}_J = \frac{\gamma \pi h}{8} R^4 \left(\frac{dB}{dt} \right)^2}.$$

Cette méthode de chauffage des matériaux conducteurs est particulièrement efficace et couramment utilisée dans l'industrie ainsi que dans les cuisinières à induction.

Complément : dans le calcul précédent de la puissance dissipée dans le barreau, on a négligé le champ magnétique \vec{B}_b créé par les courants induits. Ces derniers ont pour expression :

$$\vec{j}(r) = -\frac{\gamma}{2} r \frac{dB}{dt} \vec{u}_\theta.$$

D'après l'exercice 2.3.6, le champ magnétique créé par cette distribution de courant, qui est nul pour $r \geq R$, s'écrit :

$$\vec{B}_b(r) = -\frac{\gamma \mu_0}{4} (R^2 - r^2) \frac{d\vec{B}}{dt} \quad \text{pour } r \leq R.$$

Supposons que le barreau soit soumis à un champ magnétique sinusoïdal $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i\omega t}$. Si l'on veut que le champ magnétique \vec{B}_b soit en tout point du barreau au moins dix fois plus faible que le champ magnétique extérieur \vec{B} , la géométrie du barreau doit remplir la condition :

$$B_b(O) \leq B/10 \implies R \leq 2\sqrt{\frac{1}{10\gamma\mu_0\omega}} = \delta/\sqrt{5}$$

où δ est l'épaisseur de peau du matériau à la fréquence ν (voir le problème 3.5.2).

Application Numérique : pour un barreau en cuivre ($\gamma = 5.10^7 \text{ Sm}^{-1}$) soumis à un champ magnétique de fréquence $\nu = \omega/(2\pi) = 50 \text{ Hz}$, on a

$$R \leq 4,5 \text{ mm.}$$

Ainsi, dans la plupart des situations usuelles, l'approximation que nous avons faite n'est pas valable. Il faut alors utiliser une formulation ondulatoire analogue à celle employée dans le problème 3.5.2 (effet de peau).

4.2.3 Freinage par courants de Foucault.

Durée 10 min

On considère le système de la figure 4.7: un pendule vertical, constitué d'une plaque (P) en cuivre reliée en A à une tige isolante, peut osciller sans frottements autour d'un axe passant par le point O . Le champ \vec{B} , localisé dans la zone (\mathcal{E}), est constant.

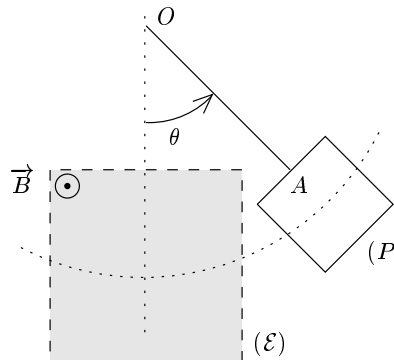


FIG. 4.7 - Le système étudié

Le pendule est lâché en dehors de la zone (\mathcal{E}). Lorsqu'il y pénètre, on observe qu'il est ralenti et s'immobilise dans la position $\theta = 0$, après éventuellement quelques oscillations. Expliquer.

Solution

Lorsque la plaque conductrice entre dans la zone (\mathcal{E}) où règne le champ magnétique, il se produit un phénomène d'induction : des courants apparaissent sur la plaque de manière à s'opposer à la variation du flux magnétique (loi de LENZ). Ces courants, que l'on appelle courants de FOUCAULT, dissipent de l'énergie sous forme d'effet JOULE, à cause de la résistance de la plaque, ce qui diminue l'énergie cinétique de cette dernière. Ainsi, le pendule s'arrête dans sa position d'équilibre $\theta = 0$.

Remarque : on diminue les courants de FOUCAULT dans un conducteur en divisant ce dernier en feuillets ou fibres séparés par un isolant (c'est le cas pour le fer utilisé dans les transformateurs). Ces mêmes courants sont mis à profit pour le freinage des poids lourds ou pour la fusion des métaux (voir exercice 4.2.2).

4.2.4 Une modélisation du diamagnétisme des atomes.

*Université Joseph FOURIER (Grenoble)
Durée : 1 h*

De nombreux atomes ou molécules développent en présence d'un champ magnétique un moment magnétique de sens opposé $\vec{\mathcal{M}} = -\chi \vec{B}$. Un tel comportement est dit diamagnétique. C'est essentiellement un effet d'induction électromagnétique, comme le calcul suivant de χ à un niveau élémentaire va le montrer.

1. Soit un atome dont un électron décrit, selon le modèle de BOHR, un cercle de rayon a_0 dans le plan xOy autour de son noyau situé en O , avec la vitesse angulaire (positive) ω_0 . Expliquer pourquoi il est raisonnable d'associer à une telle trajectoire une intensité électrique $I = -e\omega_0/2\pi$ et un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = I\pi a_0^2 \vec{u}_z$. On supposera que le moment magnétique total de l'atome est néanmoins nul en l'absence de champ magnétique extérieur, par suite de compensations à l'intérieur de l'atome.
2. On applique maintenant un champ magnétique uniforme perpendiculaire à la trajectoire de l'électron, de la forme $\vec{B} = B(t)\vec{u}_z$. La fonction $B(t)$ est nulle pour $t < t_0$, passe graduellement de 0 à sa valeur finale B pour $t_0 < t < t_1$, puis reste constante pour $t > t_1$. On admettra qu'en première approximation le rayon a_0 de l'orbite électronique ne varie pas et que l'intervalle de temps $t_1 - t_0$ est très long par rapport à une période de révolution de l'électron sur son orbite.

En utilisant la loi de FARADAY, montrer que l'électron est soumis à une force supplémentaire, durant la période d'établissement du champ, tangentielle à sa trajectoire et d'amplitude $(e/2)(dB/dt)a_0$. En déduire qu'une fois le champ établi, la vitesse angulaire de l'électron n'est plus égale à ω_0 mais à $\omega_0 + eB/(2m)$ (où m est la masse de l'électron).

Donner l'expression du moment magnétique induit et celle de χ qui en résulte.

3. Un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$, placé dans un champ magnétique inhomogène, est soumis à une force que l'on peut mettre sous la forme

$$\vec{F} = \mathcal{M}_x \vec{\nabla} B_x + \mathcal{M}_y \vec{\nabla} B_y + \mathcal{M}_z \vec{\nabla} B_z.$$

Calculer la force ressentie par un atome diamagnétique qui se retrouverait dans une région où le champ magnétique, créé par un système de bobines d'HELMHOLTZ, peut s'écrire sous la forme

$$\vec{B}(x, y, z) = \alpha(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y - 2z\vec{u}_z),$$

avec l'origine O au centre de la région considérée. Voyez-vous du coup une application de ce dispositif?

Solution

1. La trajectoire de l'électron peut être assimilée, d'un point de vue classique, à une spire circulaire parcourue par un courant I . Le courant est défini par la relation $I = dq/dt = -e/T$ où T est la période de rotation de l'électron sur son orbite, ce qui donne :

$$I = \frac{-e\omega_0}{2\pi}.$$

La trajectoire étant une spire circulaire parcourue par un courant, elle possède un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$ où le vecteur surface \vec{S} est orienté par I selon la règle du tire-bouchon. Le moment magnétique associé s'exprime sous la forme :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\pi a_0^2 \vec{u}_z.$$

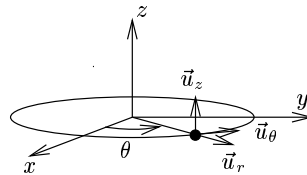


FIG. 4.8 - La trajectoire de l'électron dans le modèle de BOHR.

2. Durant la période d'établissement de \vec{B} , il se produit un phénomène d'induction, car l'amplitude du champ magnétique varie: un champ électrique \vec{E} va perturber la trajectoire de l'électron autour du noyau.

Les phénomènes étudiés ayant lieu sur une durée très grande devant la période de rotation de l'électron, on peut utiliser les équations de MAXWELL avec les grandeurs macroscopiques moyennées. D'après la loi de FARADAY, l'électron sera soumis à une force électromotrice $\vec{f} = -e \vec{E}_m$ où \vec{E}_m est le champ électromoteur dû à la période d'induction.

La spire circulaire étant immobile, le champ électromoteur se réduit à :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Par ailleurs, le champ magnétique appliqué est uniforme et ne dépend que du temps t . Un potentiel vecteur acceptable est donc

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}.$$

Avec les notations de la figure 4.8, il vient

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B r \vec{u}_\theta,$$

d'où

$$\vec{E}_m = -\frac{a_0}{2} \frac{dB}{dt} \vec{u}_\theta.$$

Ainsi, la force subie par l'électron lors de l'établissement du champ magnétique se met sous la forme :

$$\vec{f} = \frac{a_0 e}{2} \frac{dB}{dt} \vec{u}_\theta.$$

Il s'agit bien d'une force tangentielle à la trajectoire circulaire de l'électron. Appliquons le théorème du moment cinétique à l'électron, dans un référentiel galiléen, durant la période d'établissement du champ magnétique \vec{B} :

$$m a_0^2 \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z = a_0 \vec{u}_r \wedge \vec{f}$$

ce qui donne, en projetant suivant Oz :

$$m \frac{d\omega}{dt} = \frac{e}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Remarquons que l'énoncé suppose que le rayon a_0 ne varie pas. Cela implique l'existence d'une force orthogonale à la trajectoire, qui s'oppose à la force centrifuge. Cette force a un moment en O nul.

On peut aussi appliquer la relation fondamentale de la dynamique et la projeter suivant la direction tangentielle à la trajectoire :

$$m a_0 \frac{d\omega}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{u}_\theta,$$

et l'on retrouve

$$m \frac{d\omega}{dt} = \frac{e}{2} \frac{dB}{dt}.$$

L'intégration de la relation précédente entre les temps t_0 et t_1 permet d'arriver à :

$$\omega = \omega_0 + \frac{eB}{2m}.$$

La vitesse angulaire de l'électron est modifiée par la mise en place du champ magnétique \vec{B} . Il s'ensuit que le courant induit dans la « spire » par l'apparition du champ magnétique est de la forme :

$$I_{\text{ind}} = \frac{-e}{2\pi} \frac{eB}{2m}.$$

Le moment magnétique induit est donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ind}} = -\frac{e^2 a_0^2}{4m} \vec{B}.$$

En utilisant la définition de χ donnée dans l'énoncé, il vient :

$$\chi = \frac{e^2 a_0^2}{4m}.$$

Remarque : χ est de signe positif, ce qui signifie que le moment magnétique de l'atome est de sens opposé au champ magnétique qui lui a donné naissance. Il s'agit là d'une forme particulière de la loi de LENZ.

3. La force ressentie par l'atome diamagnétique s'écrit :

$$\vec{F} = \mathcal{M}_x \vec{\nabla} B_x + \mathcal{M}_y \vec{\nabla} B_y + \mathcal{M}_z \vec{\nabla} B_z$$

ou, en utilisant la relation $\vec{\mathcal{M}} = -\chi \vec{B}$:

$$\vec{F} = -\chi \left[B_x \vec{\nabla} B_x + B_y \vec{\nabla} B_y + B_z \vec{\nabla} B_z \right] = -\chi \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{B}^2}{2} \right).$$

Le champ magnétique que subit l'atome étant de la forme $\vec{B}(x, y, z) = \alpha(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y - 2z\vec{u}_z)$, la force \vec{F} a pour expression :

$$\vec{F} = -\alpha^2 \chi (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + 4z\vec{u}_z).$$

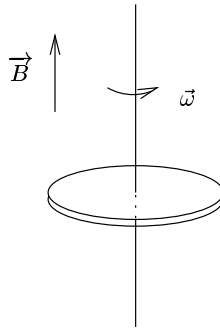
Une application de ce dispositif sera la mesure de la susceptibilité χ : la déviation d'un échantillon diamagnétique par le champ magnétique donnera accès à la valeur de χ .

4.2.5 Disque métallique dans un champ magnétique

Université de Versailles

Durée 30 min

Un disque métallique de rayon R tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe perpendiculaire dans une région de l'espace où règne un champ magnétique \vec{B} uniforme, parallèle à l'axe du disque (voir la figure).



1. Décrivez le phénomène physique qui se produit.
2. Calculer le champ électrique en tout point du disque.
3. Calculer la différence de potentiel existant entre le centre et la circonférence du disque.

Solution

1. Les électrons sont les seules charges éventuellement mobiles d'un conducteur et nous les supposons immobiles dans le référentiel du disque. Les charges positives font partie du réseau cristallin et sont donc immobiles dans le référentiel tournant (non galiléen).

Les électrons de charge $-e$ et de masse m sont soumis à la force centrifuge

$$\vec{F}_c = m\omega^2 \vec{r},$$

où \vec{r} désigne la position des électrons par rapport au centre du disque. Par ailleurs, les charges sont mobiles et ont une vitesse \vec{v} dans le référentiel galiléen fixe du « laboratoire » : elles ressentent la force de LORENTZ

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{total}} = -e\omega B_{\text{total}} \vec{r}.$$

Si l'on néglige le champ magnétique induit, le champ magnétique total se réduit au champ imposé \vec{B} . Nous précisons les limites de validité de cette approximation. Ces deux forces vont entraîner des migrations de charges, qui seront

responsables de la création d'un champ électrique \vec{E} induit. Celui-ci exercera sur les électrons une force :

$$\vec{F}_E = -e \vec{E}.$$

En résumé, les charges sont soumises à trois types de forces distincts :

- la force de LORENTZ due au champ magnétique extérieur,
- la force centrifuge,
- la force électrique due au champ électrique induit.

2. Dans le référentiel tournant, un électron est au repos, d'où :

$$m \omega^2 \vec{r} - e \omega B \vec{r} - e \vec{E} = \vec{0}.$$

Nous en déduisons le champ électrique induit :

$$\vec{E} = \left(\frac{m}{e} \omega^2 - \omega B \right) \vec{r}.$$

Le champ que nous venons de calculer est le champ que ressentent les électrons dans le référentiel galiléen fixe du laboratoire.

Validité de l'approximation faite : est-il légitime de négliger le champ magnétique induit ? Estimons l'ordre de grandeur du rapport $B_{\text{induit}}/B_{\text{total}}$. L'équation de MAXWELL-AMPÈRE

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

permet de donner un ordre de grandeur de B_{induit} :

$$B_{\text{induit}} \propto \mu_0 R j.$$

Par ailleurs, $j = \rho v$, soit $j \propto \rho R \omega$ où la densité volumique de charge ρ se déduit de :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi, $j \propto \varepsilon_0 E \omega$. Dans le cas où la force centrifuge est négligeable, on a $E \simeq \omega B_{\text{total}} R$. Compte tenu de $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, il vient :

$$\frac{B_{\text{induit}}}{B_{\text{total}}} \propto \frac{R^2 \omega^2}{c^2} \ll 1$$

tant que la vitesse de la périphérie du disque n'est pas relativiste. Ce type de raisonnement, qui peut paraître très approximatif, permet d'éviter des calculs souvent fastidieux ou sans intérêt.

3. Pour obtenir la différence de potentiel, intégrons le champ électrique induit entre le centre et $r = R$:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(R) - V(0) \\ &= \int_0^R -\vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^R \left(\omega B - \frac{m \omega^2}{e} \right) r dr. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Delta V = \left(\omega B - \frac{m\omega^2}{e} \right) \frac{R^2}{2}$$

Notons que cette différence de potentiel est celle qui serait mesurée par un appareil immobile dans le référentiel du laboratoire, et qu'elle est *a priori* différente de la différence de potentiel mesurée par un appareil « embarqué » c'est-à-dire immobile par rapport au disque. En effet, le champ électromagnétique dépend du référentiel dans lequel on se place.

Il apparaît qu'il existe une vitesse de rotation seuil, pour laquelle le champ électrique induit ainsi que ΔV s'annulent. Il s'agit de la pulsation cyclotron :

$$\omega = \omega_{\text{cyclotron}} = \frac{eB}{m}$$

Cette pulsation est en effet la pulsation naturelle de rotation d'une charge $\pm e$ et de masse m dans un champ magnétique B : elle correspond à une compensation parfaite entre la force de LORENTZ et la force centrifuge. Le mouvement de rotation n'induit alors aucune migration de charge : le champ électrique mesuré dans le référentiel du laboratoire est nul. Pour cette pulsation, les électrons ne « sentent » pas qu'ils font partie d'un corps en rotation. Pour des pulsations supérieures à la pulsation cyclotron, le module de la force centrifuge, qui varie comme ω^2 devient supérieur au module de la force de LORENTZ qui varie linéairement avec ω . Il y a donc un excès de charges négatives à la périphérie du disque et une déplétion au centre. On retrouve que le champ électrique est dans ce cas dirigé vers l'extérieur et que le potentiel V est plus élevé au centre qu'à la périphérie : ΔV est négatif.

Terminons en précisant que même pour des champs faibles (comme le champ magnétique terrestre), la pulsation cyclotron est élevée. Pour un électron ($m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) dans un champ magnétique $B \simeq 10^{-5}$ T, l'ordre de grandeur de $\omega_{\text{cyclotron}}$ est 10^6 rad.s⁻¹, ce qui correspond à 10^5 tours par seconde.

Remarque : nous avons trouvé que \vec{E} est proportionnel à \vec{r} , ce qui signifie que la densité volumique de charge

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$$

est constante dans le conducteur. Cela peut surprendre puisque nous savons qu'un conducteur parfait à l'équilibre est localement neutre en volume, mais le disque est ici à l'équilibre dans un référentiel non galiléen. De plus, le conducteur doit être globalement neutre. Ici, la charge volumique constante est compensée par une charge surfacique de signe opposé.

4.3 Problèmes

4.3.1 Générateur dynamo

Université Paul SABATIER, Toulouse

Durée 30 min

On considère le montage expérimental permettant de modéliser le moteur électrique dit « moteur universel ». On se propose de vérifier que ce même montage permet de modéliser le générateur de courant continu dit « dynamo ».

Un ensemble de deux solénoïdes crée dans la région R entourant l'origine un champ magnétique uniforme \vec{B} de coordonnées $(0, 0, B_z = B > 0)$. Dans R une spire rectangulaire peut tourner autour d'une de ses médianes confondue avec Ox , la normale \vec{n} à la spire est orientée de façon compatible avec le sens positif $NCDABM$ choisi (voir la figure 4.9a.). La spire est connectée au circuit extérieur, fermé par une résistance r , par l'intermédiaire d'un collecteur à balai (voir la figure 4.9b.). Si θ désigne l'angle (Oz, \vec{n}) , alors :

- pour $-\pi < \theta < 0$, le collecteur assure les contacts PM et QN (cas de la figure);
- pour $0 < \theta < \pi$, le collecteur assure les contacts PN et QM .

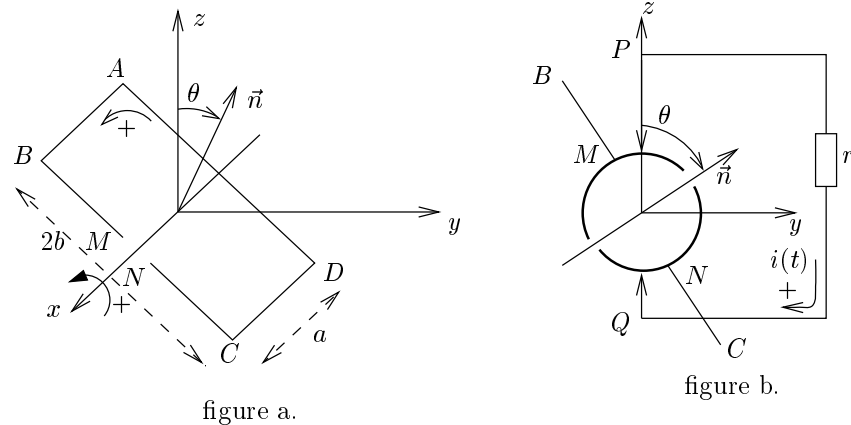


FIG. 4.9 - Schémas des parties mécaniques et électriques de la dynamo. Par convention, θ est ici négatif.

La spire, l'ensemble collecteur et les conducteurs du circuit extérieur ont une résistance négligeable. On fait tourner la spire avec une vitesse angulaire Ω .

1. Exprimer $V_Q - V_P$ en fonction de $V_N - V_M$ et θ (effet du collecteur).

2. Calculer le flux ϕ de \vec{B} à travers la spire.
3. En déduire la force électromotrice d'induction $V_N - V_M$ puis $V_Q - V_P$.
4. Donner enfin l'expression du courant i et montrer que si $\Omega < 0$, alors $i(t)$ a un signe constant ; lequel ?
5. Décrire succinctement comment avec deux spires disposées en croix (décalées l'une par rapport à l'autre de $\pi/2$) et avec un collecteur formé de 4 quarts de bague (au lieu de deux moitiés de bague) on aurait un courant presque continu (en comparaison de celui en 4.) ; il est suggéré d'expliquer le fonctionnement du nouveau collecteur à l'aide d'une figure du type de la figure 4.9b.

Solution

1. D'après la description faite dans l'énoncé, la relation entre $V_Q - V_P$ et $V_N - V_M$ change de signe comme la fonction $\sin \theta$. De plus, on constate en se référant à la figure 4.9b. pour laquelle l'angle θ a une valeur négative, que les points P et M sont au même potentiel, ainsi que les points Q et N . Ainsi :

$$\boxed{V_Q - V_P = -\text{signe}(\sin \theta)(V_N - V_M)}$$

2. Le flux du champ magnétique \vec{B} à travers la spire est donné à un instant t par

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}(t),$$

car le champ est uniforme sur la surface de la spire. En fonction des paramètres du problème, il vient

$$\phi = 2ab \left(\vec{B} \cdot \vec{n}(t) \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = 2abB \cos(\Omega t + \varphi)}$$

En toute généralité, on a pris φ comme déphasage arbitraire. Pour les questions 3. et 4., nous choisirons $\varphi = 0$, ce qui correspond à une origine des temps telle que $\theta = 0$ pour $t = 0$.

3. Par convention, une force électromotrice d'induction est prise positive lorsqu'elle tend à débiter du courant dans le sens positif, $(NCDABM)$ dans le cas présent. Ainsi,

$$e = (V_M - V_N).$$

De plus, la force électromotrice est liée au flux du champ magnétique à travers la spire par

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(V_M - V_N) = 2abB\Omega \sin \Omega t}$$

On utilise le résultat de la première question pour trouver l'expression de $V_Q - V_P$

$$\boxed{V_Q - V_P = 2abB\Omega |\sin \Omega t|}$$

4. Le circuit est constitué uniquement d'une résistance r et d'une force électromotrice e . Le bilan électrique se réduit à

$$V_P - V_Q = ri \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{i = \frac{-2abB\Omega |\sin \Omega t|}{r}}$$

Pour $\Omega < 0$, le courant i débité est de signe constant positif.

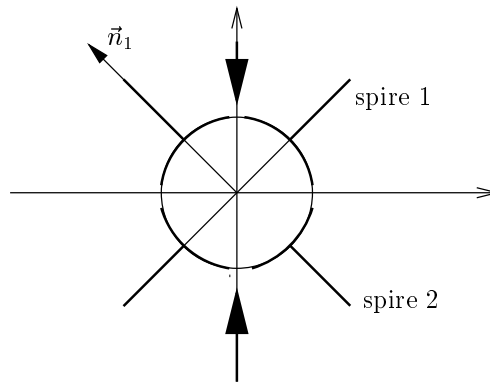


FIG. 4.10 - Dispositif à deux spires.

PROBLÈMES

5. On monte maintenant un système analogue mais avec deux spires. La vue de côté d'un tel montage est donnée par la figure 4.10. La spire 1, est connectée pour

$$\begin{cases} -\frac{3\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

L'autre spire est connectée le reste du temps. Chacune des spires peut être traitée de la même façon que dans la première partie, et génère donc un courant en valeur absolue de $\sin \Omega t$. Cependant, et c'est là que la remarque sur le déphasage φ prend tout son sens, les courants produits par chacune des spires sont déphasés de $\pi/2$. Suivant que l'une ou l'autre des spires est connectée, le courant suit la sinusoïde associée, et son allure est donnée sur la figure 4.11, sur laquelle on a représenté les arches de sinusoïdes correspondant à chacune des phases du mouvement. Le courant résultant est quant à lui donné par la ligne de crête, et s'approche d'un signal continu.

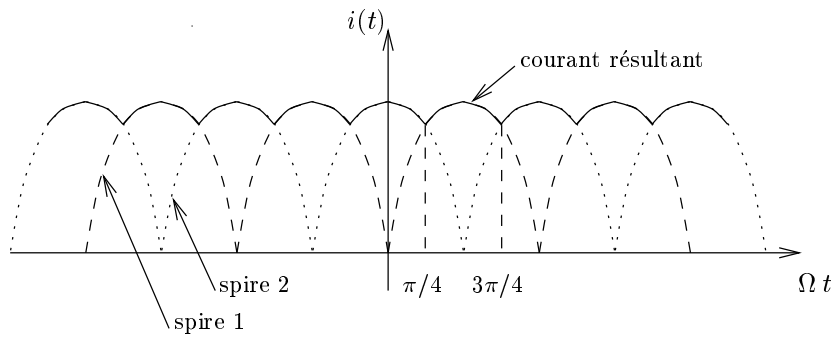


FIG. 4.11 - Allure du courant pour deux spires.

4.3.2 Moment magnétique dans un solénoïde et cadre métallique en rotation

Université d'Angers

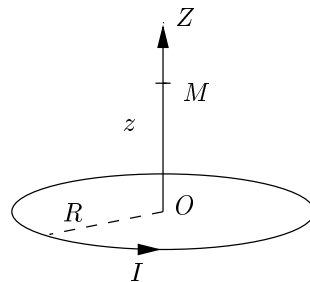
Durée 3 h

Les deux exercices sont totalement indépendants.

Aucun document autre qu'un formulaire rappelant les expressions des gradient, divergence et rotationnel n'est autorisé. **Les calculatrices sont interdites.**

Exercice I :

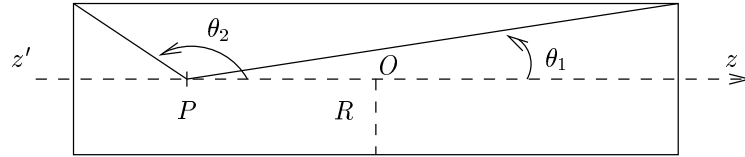
On considère la spire circulaire d'axe Oz et de rayon R représentée par le schéma suivant. Cette spire est parcourue par un courant d'intensité I .



1. Calculer le champ magnétique créé en un point quelconque de l'axe de la spire.

PROBLÈMES

2. Un solénoïde fini de longueur L possédant N spires de rayon R est parcouru par un courant d'intensité I .
- a) Calculer le champ magnétique en un point P de son axe à l'intérieur du solénoïde. On calculera d'abord l'épaisseur d'une spire puis le courant traversant une épaisseur dz de solénoïde. On respectera les notations de la figure jointe.



- b) Donner la valeur de ce champ sur l'axe pour un solénoïde infini.
- c) On place une spire circulaire de rayon a , de même axe que le solénoïde, au point P . On supposera a très petit devant le rayon R du solénoïde. Calculer le flux créé par le solénoïde au travers de la spire. En déduire l'inductance mutuelle M . On prendra l'origine O au centre du solénoïde sur l'axe $z'z$.
- d) Calculer le flux envoyé par la spire de rayon a parcourue par un courant i dans une spire quelconque du solénoïde. En déduire le flux total envoyé par la spire de rayon a dans le solénoïde ainsi que l'inductance mutuelle M' .
On donne le potentiel vecteur \vec{A} créé par une spire en un point quelconque de l'espace situé à une distance de la spire grande devant son rayon.

$$\vec{A} = \mu_0 \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}.$$

- e) La petite spire est toujours parcourue par un courant i . Calculer la force exercée sur celle-ci et donner son sens.
- f) Existe-t-il une position d'équilibre pour la petite spire à l'intérieur du solénoïde? S'agit-il d'une position d'équilibre stable ou instable?

Exercice II :

1. Énumérer les méthodes possibles pour calculer le flux envoyé par le fil infini dans le cadre (figure 4.12). Calculer ce flux par la méthode que vous jugerez la plus simple.
2. Montrer que l'inductance mutuelle est donnée par :

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} a \ln \left(\frac{l^2 + a^2/4 - al \cos \theta}{l^2 + a^2/4 + al \cos \theta} \right).$$

3. On fait tourner le cadre dans le sens direct avec une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe parallèle au fil et passant par le milieu du cadre O' . Calculer la force électromotrice générée dans le système et indiquer le type de courant obtenu.

Nota : le fil et le cadre ne se trouvent pas dans le même plan.

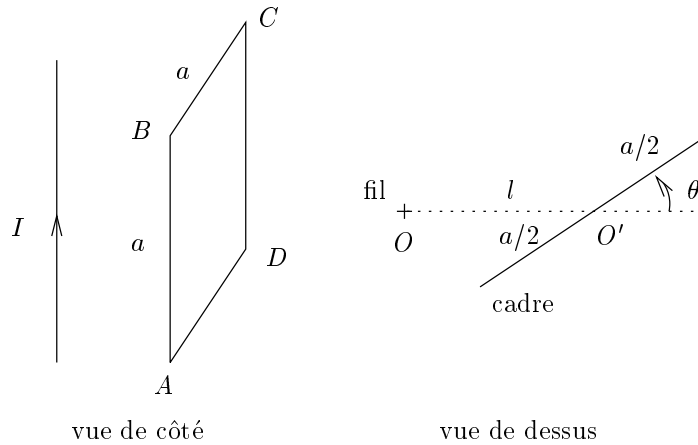


FIG. 4.12 - Schéma du fil et du cadre mobile.

Solution

Exercice I :

1. Pour calculer plus aisément le champ magnétique, considérons les propriétés de symétrie du problème. Il apparaît que tout plan vertical contenant l'axe z est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant : le champ magnétique en un point de ce plan ne possède donc pas de composante perpendiculaire au plan.

Le champ \vec{B} en un point de l'axe (intersection de l'ensemble des plans considérés auparavant) se doit d'être inclus dans chacun de ces plans, donc faire partie de leur intersection. Il s'ensuit que

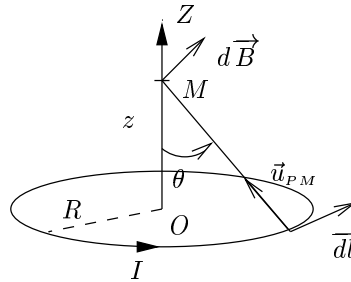
$$\vec{B} = B(z) \vec{z}.$$

On applique alors la loi de BIOT et SAVART dans le cas d'une source linéique de courant

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

où les notations prises sont précisées dans la figure qui suit

PROBLÈMES



De ce fait, le module du champ créé par une portion élémentaire de la spire a pour expression

$$\|d\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{PM^2}.$$

Les considérations de symétrie initiales nous assurent qu'à l'issue de l'intégration, les composantes du vecteur $d\vec{B}$ qui sont orthogonales à l'axe vont donner une contribution nulle; il suffit donc de sommer la composante —scalaire— suivant l'axe, soit d'après notre schéma

$$dB_z = \|d\vec{B}\| \sin \theta.$$

En s'aidant toujours du schéma, on voit que la distance PM est reliée au rayon R par :

$$PM^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \theta}$$

ce qui conduit à

$$B(z) = \frac{\mu_0 I \sin^3 \theta}{4\pi R^2} \int_C dl$$

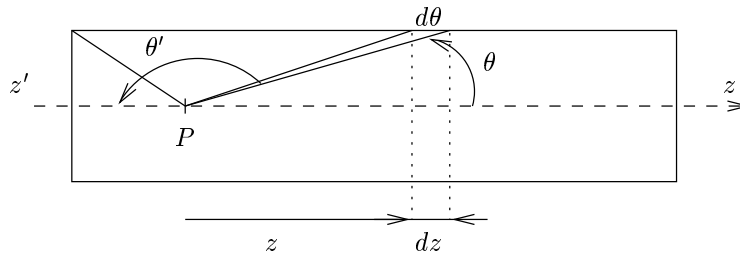
soit finalement pour l'expression du champ magnétique engendré par une spire circulaire en un point de son axe

$$\boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{z}}.$$

2.a) Une spire crée un champ \vec{B}_{spire} . Il y a N spires réparties sur une longueur L , donc une simple règle de trois nous fournit la contribution d'une portion solénoïde de longueur dz

$$d\vec{B} = \vec{B}_{\text{spire}} \frac{N}{L} dz.$$

Afin de pouvoir intégrer cette expression, il nous faut maintenant relier la variation de la distance entre la tranche de bobine contribuant au champ et le point d'évaluation de celui-ci (variation de z) avec la variation de l'angle sous lequel la tranche de bobine est vue depuis le point où le champ est calculé (variation de θ). Pour cela on se reporte à la figure suivante :



On y constate que

$$\tan \theta = \frac{R}{z},$$

soit si l'on différencie

$$dz = -R \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}.$$

À ce stade du calcul se situe une petite subtilité pouvant induire une erreur de signe. Comme montré sur la précédente figure, l'angle θ sous lequel une portion du solénoïde est vue au point P ne correspond pas à l'angle que nous avons considéré pour le calcul du champ créé par une spire unique. On a en effet la relation

$$\begin{cases} \theta = \pi - \theta' \\ B_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta' \end{cases}$$

Finalement, le champ s'écrit en sommant sur les contributions de toutes les tranches de bobine

$$\vec{B}(P) = \frac{N}{L} \frac{\mu_0 I}{2R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-\sin^3 \theta) \cdot (-R) \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \vec{z}$$

qui s'intègre pour donner

$$\boxed{\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{z}}$$

On a noté $n = N/L$ le nombre de spires par unité de longueur.

2.b) Pour un solénoïde infini, les angles sous lesquels apparaissent les extrémités au point P tendent respectivement vers

$$\theta_1 \longrightarrow 0 \quad \theta_2 \longrightarrow \pi.$$

Le cosinus étant une fonction continue, la limite de l'expression donnant le champ \vec{B} s'obtient en prenant le résultat de l'expression appliquée aux angles limites. Il vient alors

$$\boxed{\vec{B}_\infty = \mu_0 n I \vec{z}}$$

2.c) Comme le rayon de la petite spire est tel qu'il vérifie $a \ll R$, on peut prendre en tout point de la petite spire le champ magnétique égal au champ magnétique sur l'axe. L'expression du flux traversant cette petite spire se réduit alors à

$$\begin{aligned}\phi &= S_{\text{spire}} \cdot B_{\text{solé}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \pi a^2.\end{aligned}$$

Par définition de la mutuelle inductance, il vient alors

$$M = \frac{\mu_0 n}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \pi a^2.$$

2.d) Pour calculer le flux envoyé par la petite spire dans une spire quelconque du grand solénoïde, on va se servir du théorème dit circulation-rotationnel (ou théorème de STOKES). Le flux du champ magnétique s'écrit en effet

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}.\end{aligned}$$

Étant donnée la taille de la petite spire devant celle du solénoïde, on peut considérer qu'en tout point appartenant à une spire de la bobine, on est suffisamment loin de la petite spire pour que le champ magnétique créé par cette dernière soit identique au champ créé par un dipôle magnétique. Il est ainsi possible —et licite— d'utiliser pour le potentiel vecteur \vec{A} la formule fournie dans l'énoncé, où les notations de la figure 4.13 ont été adoptées.

PROBLÈMES

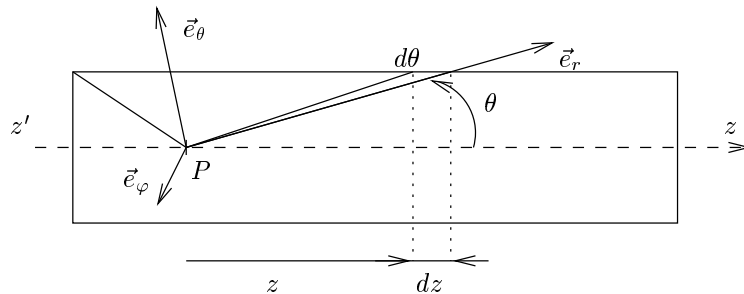


FIG. 4.13 - Définition des vecteurs unitaires

Dans ces conditions, on obtient

$$\begin{aligned}\phi &= \oint \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{M} \wedge \vec{r}) \cdot d\vec{l} \\ &= \oint \frac{\mu_0}{4\pi r^3} ((\pi a^2 i \vec{z}) \wedge \vec{e}_r) r (R d\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi \\ &= \oint \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\pi a^2 i) r R \sin \theta d\varphi\end{aligned}$$

soit donc

$$\phi(\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\pi a^2 i) (2\pi R) \frac{\sin \theta}{r^2}.$$

En se reportant à la figure précédente, on constate que

$$\sin \theta = \frac{R}{r}$$

ce qui nous donne pour le flux envoyé par la petite spire dans une spire de solénoïde, vu sous un angle θ :

$$\boxed{\phi(\theta) = \frac{\mu_0}{2} (\pi a^2 i) \frac{1}{R} \sin^3 \theta.}$$

Le flux total envoyé dans le solénoïde s'obtient alors par intégration. Sur un élément de bobine de longueur dz , on a comme précédemment $n dz$ spires d'où

$$\phi_{\text{total}} = \int \phi(\theta) n dz.$$

En reprenant le raisonnement de la question 2.a), on a

$$dz = -R \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$$

et le flux total s'écrit

$$\phi_{\text{total}} = \frac{n\mu_0}{2} (\pi a^2 i) \int_{\theta_2}^{\theta_1} -\sin \theta d\theta$$

ou encore

$$\boxed{\phi_{\text{total}} = \frac{n\mu_0}{2} (\pi a^2 i) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).}$$

Par définition de la mutuelle on trouve alors pour M' une valeur (la même que pour M) :

$$\boxed{M' = \frac{n\mu_0}{2} (\pi a^2) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).}$$

2.e) La force s'exerçant sur un dipôle magnétique est donnée par la formule

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}.$$

Le dipôle magnétique étant suivant l'axe de la bobine, l'expression précédente se réduit dans notre cas à

$$\vec{F} = (\pi a^2 i) \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}.$$

On a déjà signalé à deux reprises la relation qui lie dz à $d\theta$. Mais attention! Lorsqu'on écrit :

$$dz = -R \frac{d\theta}{\sin^2 \theta},$$

le point P est fixe et z repère la position d'une spire élémentaire. Ici, on doit calculer la dérivée du champ magnétique suivant l'axe, c'est-à-dire faire varier la position du point P . Pour ce faire, considérons que z repère la position de P sur l'axe par rapport au point O . On a alors :

$$dz = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}.$$

On peut en effet se convaincre que cette variation doit être l'opposée de celle rappelée plus haut puisque l'on a changé de référence. On peut bien sûr aussi différencier :

$$\tan \theta_1 = \frac{R}{L/2 - z}.$$

Quoi qu'il en soit, il faut remarquer que lorsque z augmente, θ augmente aussi : cela permet de vérifier le signe obtenu. Il vient maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} &= \frac{\mu_0 n I}{2} \vec{z} \left[\frac{d \cos \theta}{dz} \right]_2^1 \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2R} [-\sin^3 \theta]_2^1 \vec{z} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2R} (\sin^3 \theta_2 - \sin^3 \theta_1) \vec{z}. \end{aligned}$$

La force exercée sur la petite spire s'écrit alors

$$\boxed{\vec{F} = (\pi a^2 i) \frac{\mu_0 n I}{2R} (\sin^3 \theta_2 - \sin^3 \theta_1) \vec{z}}.$$

Remarque : si l'on ne connaît pas la formule :

$$\vec{F} = \left(\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{B},$$

il est tout de même possible de retrouver le résultat mais cela n'est pas immédiat. Il suffit de se rappeler l'expression de la force de LORENTZ (ou de LAPLACE) : une portion de fil $d\vec{\ell}$ parcourue par un courant i subit la force

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

On a donc ici :

$$\vec{F} = -i \int_{\text{spire}} \vec{B} \wedge d\vec{\ell}. \quad (1)$$

Si l'on considère que le rayon de la spire est très petit par rapport à celui du solénoïde, il est tentant de prendre \vec{B} constant et alors :

$$\vec{F} = -i \vec{B} \wedge \int_{\text{spire}} d\vec{\ell} = \vec{0}.$$

L'hypothèse \vec{B} constant n'est donc pas recevable et il faut tenir compte des petites variations du champ, c'est-à-dire évaluer l'expression (1) au premier ordre non nul.

Soit B_z la composante suivant z du champ. Celle-ci a été calculée à la question 2.a) et nous allons en déduire la composante B_ρ orthogonale à l'axe. Celle-ci est très petite devant B_z mais elle est responsable de la force s'exerçant sur la spire. Calculons le flux du champ sur un cylindre élémentaire de rayon $\rho \ll R$, d'axe $z'z$ et situé entre z et $z + dz$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

comme sur toute surface fermée. Développons le flux :

$$2\pi\rho dz B_\rho + \pi\rho^2 [B_z(z + dz) - B_z(z)] = 0.$$

Ainsi, au voisinage de l'axe,

$$B_\rho \simeq -\frac{\rho}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{F} &\simeq -i \int_{\text{spire}} \vec{B}_\rho(\rho=0) \wedge d\vec{\ell} \\ &\simeq i \int_{\text{spire}} \frac{a}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} d\vec{\ell} z \\ &\simeq i \frac{a}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \int_{\text{spire}} d\vec{\ell} z \\ &\simeq \pi a^2 i \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}, \end{aligned}$$

et l'on retrouve bien le résultat obtenu à l'aide de :

$$\vec{F} = \left(\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{B}.$$

2.f) Sur l'expression encadrée de \vec{F} , on constate que la position centrale —telle que $\theta_1 = \pi - \theta_2$ — est une position pour laquelle la force est nulle; donc une position d'équilibre. On peut remarquer que c'est la seule position, pour laquelle la force est nulle, qui peut être qualifiée de position d'équilibre.

En effet, pour que la force s'annule il faut que les deux sinus soient égaux, ce qui donne comme condition sur les deux angles : soit la condition précédente, soit la condition d'égalité. Cette dernière n'étant remplie que lorsque le dipôle se trouve infiniment éloigné de la bobine, on peut dire que la seule position d'équilibre du dipôle soumis au champ magnétique engendré par la bobine est le point O central.

On cherche maintenant à tester la stabilité de cette position d'équilibre. Pour cela on procède classiquement en regardant comment se comporte la force près du point d'équilibre.

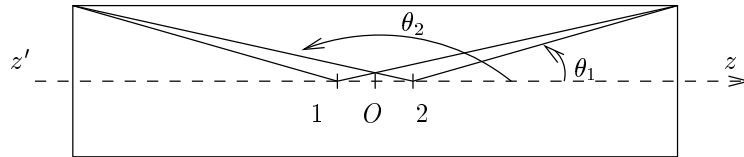


FIG. 4.14 - Étude de stabilité.

Si l'on considère la figure concernant la stabilité, on constate que

- au point 1, l'angle θ_1 a diminué. Il en va de même pour l'angle θ_2 . Comme ils sont chacun de part et d'autre de $\pi/2$, on se retrouve, dans l'hypothèse où les intensités i et I sont de même signe, avec une force positive c'est-à-dire une force qui tend à nous faire revenir vers le point O .
- De même au point 2, les deux angles ont augmenté ce qui nous donne une force négative qui là encore nous rapproche du point d'équilibre.

En conclusion, si l'on écarte la petite spire de sa position d'équilibre, le champ magnétique exercera une force qui tendra à la faire revenir vers le point O qui est donc un point d'équilibre stable. Nous avons supposé ici que les intensités i et I sont de même signe. Si ce n'est pas le cas, le point O est un point d'équilibre instable. Ces considérations illustrent la règle du flux maximal : l'équilibre stable correspond au cas où $\vec{B} \cdot \vec{M}$ est maximal, \vec{M} étant le moment magnétique de la petite spire et \vec{B} le champ magnétique créé au point O par le solénoïde. Lorsque i et I sont de même signe, le flux est maximal et dans le cas contraire $\vec{B} \cdot \vec{M}$ est minimal et l'équilibre est instable.

Remarque : nous avons étudié ici la stabilité de l'équilibre vis-à-vis des translations suivant l'axe Oz . Pour être exhaustif, il faudrait étudier la stabilité vis-à-vis du mouvement de rotation : le champ exerce sur la petite spire un couple de moment

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}.$$

Exercice II :

1. Pour calculer le flux envoyé par le fil infini dans le cadre, on dispose de deux méthodes. Soit on applique la formule de définition du flux, ce qui

demande de calculer le champ magnétique créé par le fil, soit on utilise le théorème de STOKES (circulation-rotationnel), mais il faut dans ce cas calculer le potentiel vecteur associé à la distribution de courant —le fil.

Dans le cas présent, la méthode la plus simple consiste à calculer le potentiel vecteur et à intégrer ensuite ce dernier sur le contour fermé que constitue le cadre :

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{\text{cadre}} \vec{A} \cdot d\vec{l}.\end{aligned}$$

On cherche donc le vecteur \vec{A} tel que

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Simplement formulé de la sorte, il va être difficile de trouver le potentiel vecteur, aussi va-t-on utiliser des arguments de symétrie pour restreindre le domaine de recherche.

Considérons le système des coordonnées cylindriques, l'axe étant celui du fil. Laisant pour le moment le cadre de côté, puisqu'il ne contribue pas au champ que l'on veut calculer, on se retrouve avec une configuration qui présente une symétrie de révolution autour de l'axe du fil ; on cherche alors un potentiel ne dépendant pas de la variable angulaire θ . De même, le fil étant infini, on a une invariance par translation suivant l'axe du fil ce qui nous conduit à chercher un potentiel ne dépendant pas non plus de l'altitude z . Finalement

$$\vec{A} = \vec{A}(r).$$

De plus le vecteur \vec{A} est un vecteur « normal » puisque \vec{B} est lui un pseudo-vecteur (*i.e.* qui change de signe quand l'on change la convention d'orientation de l'espace). De ce fait, le potentiel vecteur aura en un point une direction perpendiculaire à un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant passant par ce point. Soit alors un point M quelconque de l'espace, le plan passant par M et perpendiculaire au fil est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant, le vecteur \vec{A} est donc en M suivant z . À l'issue de toutes ces considérations, on cherche le potentiel vecteur sous la forme

$$\vec{A} = A(r) \vec{e}_z.$$

Contrairement au champ magnétique, le potentiel vecteur possède la même symétrie que les courants. Appliquant alors le rotationnel en coordonnées cylindriques on obtient

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{dA}{dr} \vec{e}_\theta.$$

On peut calculer indépendamment le champ magnétique en appliquant le théorème d'AMPÈRE avec pour contour un cercle de rayon r . On remarque donc

qu'il est aisé et rapide d'obtenir le champ en tout point, mais c'est l'intégration de celui-ci sur la surface du cadre qui est un peu fastidieuse et rend au final cette méthode plus longue; elle reste néanmoins un bon exercice calculatoire. On a alors

$$B(r) = \frac{dA}{dr} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

soit finalement

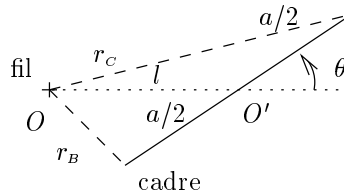
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \vec{e}_z.$$

Dans cette expression r_0 est une constante arbitraire.

On oriente alors le cadre avec un sens de parcours $ABCD$, et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \phi &= \oint_{ABCD} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \vec{e}_z \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\int_A^B \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) dl - \int_C^D \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) dl \right) \\ &= \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_B}{r_C}\right), \end{aligned}$$

où les distances r_B et r_C sont définies sur la figure suivante



PROBLÈMES

Toujours en se reportant à la figure, on peut exprimer r_B et r_C en fonction des données de l'énoncé

$$\begin{aligned} r_B^2 &= \left(l - \frac{a \cos \theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{a \sin \theta}{2}\right)^2 \\ r_C^2 &= \left(l + \frac{a \cos \theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{a \sin \theta}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Finalement, le flux envoyé par le fil infini dans le cadre a pour expression :

$$\phi = \frac{\mu_0 a i}{4\pi} \ln \frac{l^2 + a^2/4 - a l \cos \theta}{l^2 + a^2/4 + a l \cos \theta}$$

2. Comme l'inductance mutuelle est définie au moyen de la formule

$$\phi = M i,$$

on obtient bien

$$M = \frac{\mu_0 a}{4\pi} \ln \frac{l^2 + a^2/4 - al \cos \theta}{l^2 + a^2/4 + al \cos \theta}$$

3. Le cadre étant mis en mouvement dans un champ magnétique, une force électromotrice induite va apparaître. Celle-ci peut s'exprimer à partir du flux, au moyen de

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Puisque la vitesse angulaire est constante, on a, à un déphasage constant près,

$$\theta = \omega t$$

soit en reportant dans l'expression du 1.

$$e = -\frac{\mu_0 a i}{4\pi} \omega \left(\frac{la \sin \theta}{l^2 + a^2/4 - al \cos \theta} - \frac{-la \sin \theta}{l^2 + a^2/4 + al \cos \theta} \right)$$

ce qui donne

$$e = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} l \omega a^2 \sin \theta \left(\frac{1}{l^2 + a^2/4 - al \cos \theta} + \frac{1}{l^2 + a^2/4 + al \cos \theta} \right)$$