

Chapitre 6

Mécanique du solide

6.1 Rappels de cours

6.1.1 Cinématique du solide.

Définition du solide.

Un solide est un corps qui ne peut subir aucune déformation. Les différents points d'un solide restent ainsi à des distances fixes les uns des autres.

La position d'un tel corps est complètement déterminée par la connaissance de six variables, appelées degrés de liberté. Ce sont par exemple les trois coordonnées de son centre de gravité et trois angles repérant son orientation (cf. problème 6.3.2).

Torseur cinématique, vitesse instantanée de rotation.

Les vitesses de deux points M et P d'un même solide, en mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} , sont liées par la relation vectorielle

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(P) + \overrightarrow{MP} \wedge \vec{\Omega},$$

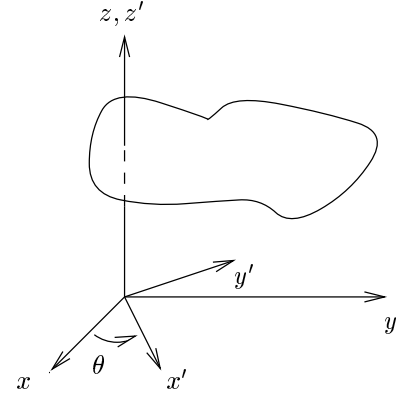
où $\vec{\Omega}$ est un vecteur, appelé vitesse instantanée de rotation du solide, qui ne dépend que du temps.

Cette relation entre les vitesses des différents points d'un solide permet de définir le torseur cinématique, ou torseur des vitesses, que nous noterons (V) :

$$(V) = \begin{cases} \vec{\Omega} \\ \vec{v}(M). \end{cases}$$

Dans le cas particulier de la rotation autour d'un axe fixe de directeur \vec{k} (z sur la figure suivante), le vecteur $\vec{\Omega}$ prend une valeur simple en fonction de la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe ($d\theta/dt$) :

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k}.$$



En pratique, le mouvement de rotation du solide est décomposé en une succession de rotations par rapport à des axes connus, de directeurs \vec{k}_i et auxquels sont associées les vitesses angulaires $d\theta_i/dt$; dans ces conditions on obtient comme vecteur vitesse instantanée de rotation du solide \mathcal{S}

$$\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \sum_i \left(\frac{d\theta_i}{dt} \right) \vec{k}_i.$$

Dans le cas du passage d'un référentiel \mathcal{R} à un référentiel \mathcal{R}' , la vitesse instantanée de rotation de \mathcal{S} se transforme comme suit :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}') = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}').$$

Exemple : considérons un disque de centre O et de rayon R en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe perpendiculaire au disque passant par O . Les dénominations des axes étant choisies comme sur la figure précédente, la vitesse instantanée de rotation s'écrit $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$. Soit maintenant M le point de la circonférence tel que $\vec{OM} = R \vec{x}'$. La vitesse du point O étant nulle, l'application du torseur des vitesses entre M et O donne

$$\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = R\omega \vec{y}'.$$

On retrouve qu'un point de la circonférence est animé d'une vitesse de module $R\omega$.

Cinématique du contact, vitesse de glissement

Soient \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux solides et $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}$ et \mathcal{R}' trois référentiels dont le premier est fixe, lié à l'observateur et les deux suivants sont eux liés respectivement à \mathcal{S} et \mathcal{S}' (figure 6.1).

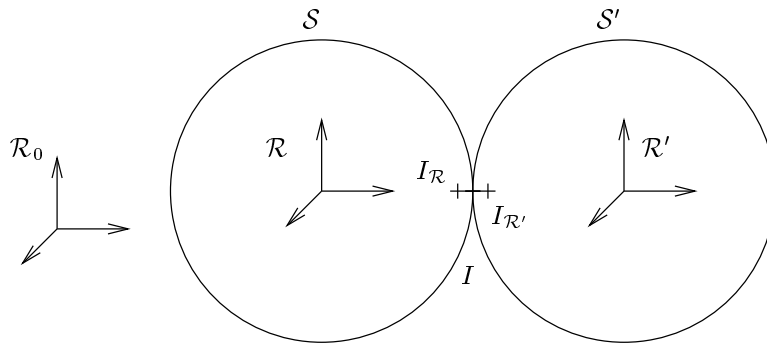


FIG. 6.1 - Glissement entre deux solides.

On appelle vitesse de glissement \vec{u} de S' par rapport à S la vitesse du point de contact I lié à S' , mesurée dans le référentiel lié à S :

$$\vec{u}(S'/S) = \vec{v}(I_{R'}/R).$$

De la formule de composition des vitesses, on obtient

$$\vec{v}(I_{R'}/R_0) = \vec{v}(I_{R'}/R) + \vec{v}(I_R/R_0),$$

soit pour la vitesse de glissement l'expression équivalente :

$$\vec{u}(S'/S) = \vec{v}(I_{R'}/R_0) - \vec{v}(I_R/R_0).$$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, on dit qu'il y a glissement des deux solides l'un par rapport à l'autre et le vecteur \vec{u} appartient alors au plan (Π) tangent en I et commun aux deux solides (figure 6.2).

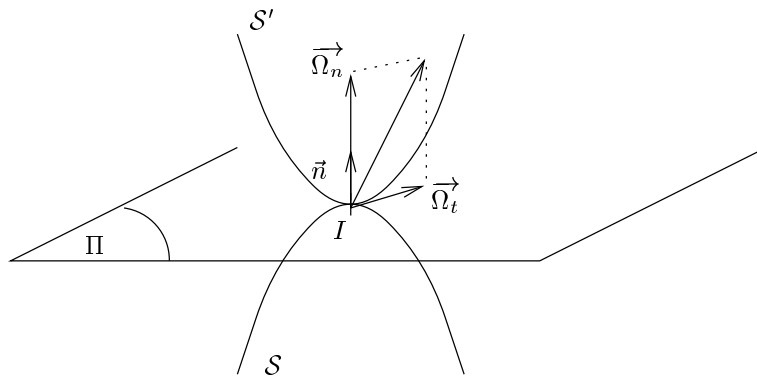


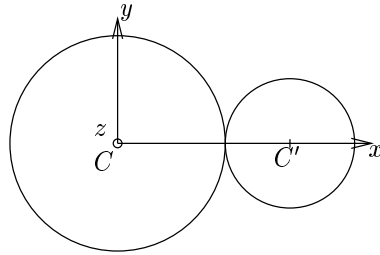
FIG. 6.2 - Roulement et pivotement de deux solides.

Décomposons le mouvement de rotation suivant les notations de la figure 6.2

$$\vec{\Omega}(S'/S) = \vec{\Omega}_n + \vec{\Omega}_t.$$

$\vec{\Omega}_n$, la composante normale au plan (Π) du vecteur $\vec{\Omega}$ est associée à un mouvement de pivotement, alors que la composante tangentielle $\vec{\Omega}_t$ est, elle, associée au roulement.

Exemple : l'expression de la vitesse de glissement entre deux solides permet de retrouver rapidement les relations entre les vitesses angulaires de deux engrenages. On considère les deux engrenages \mathcal{C} et \mathcal{C}' de la figure suivante :



Leurs vecteurs rotation instantanée respectifs sont $\omega \vec{z}$ et $\omega' \vec{z}$. Soit I le point de contact. La relation de non glissement entre les engrenages implique que $\vec{v}(I \in \mathcal{C}) = \vec{v}(I \in \mathcal{C}')$, ce qui se traduit, compte tenu du calcul déjà effectué au paragraphe précédent, par : $R\omega \vec{y} = R'\omega'(-\vec{y})$. Les engrenages tournent bien en sens opposés, le plus petit effectuant la rotation à la plus grande des vitesses angulaires.

6.1.2 Cinétique du solide.

Centre de gravité, référentiel barycentrique.

Dans le cas d'un ensemble discret de masses : (m_i, A_i) , le centre de gravité est défini au moyen de la formule

$$\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OA}_i}{\sum_i m_i},$$

où O est un point arbitraire. Cette définition se généralise à une distribution continue de masse

$$\vec{OG} = \frac{\int_{M \in S} \vec{OM} dm}{\int_S dm}.$$

Pour une distribution volumique, l'élément de masse contenu dans un élément de volume $d\tau$ autour d'un point M de \mathcal{S} est $dm = \rho(M) d\tau$, où ρ est la masse volumique du solide.

Exemple : on cherche à calculer la position du centre de gravité d'un disque homogène (de centre O , de rayon R et de masse surfacique σ), percé d'un trou circulaire de rayon $R/2$ dont le centre O' est à la distance $R/2$ de O . Le calcul direct est fastidieux, alors que la propriété d'associativité du barycentre donne le résultat plus simplement. Le système est identique à la somme de deux sous systèmes : un disque plein de rayon R et de masse $m_1 = \pi\sigma R^2$ et un disque de rayon $R/2$ et de masse $m_2 = -\pi\sigma R^2/4$ (l'équivalence est bien entendu mathématique, une masse ne pouvant être négative). Le centre de gravité de l'ensemble est le centre de gravité des barycentres partiels affectés de la masse totale de leurs sous-ensembles, à savoir (O, m_1) et (O', m_2) . Ainsi, pour tout point A ,

$$m_1 \overrightarrow{AO} + m_2 \overrightarrow{AO'} = (m_1 + m_2) \overrightarrow{AG}.$$

On peut choisir $A = O$, d'où : $\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OO'}/3$.

On définit le référentiel barycentrique \mathcal{R}_G comme le référentiel d'origine G dont les axes sont parallèles à ceux de \mathcal{R}_0 (référentiel de l'observateur ou du laboratoire) ; ce référentiel n'est donc pas lié au solide, ses axes ne tournant pas avec ce dernier.

Torseur cinétique, théorème de Kœnig.

Soit un solide \mathcal{S} de masse volumique ρ et un référentiel \mathcal{R} . On définit le torseur cinétique de \mathcal{S} dans \mathcal{R} par

$$(C) = \begin{cases} \overrightarrow{P}(S/\mathcal{R}) = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{v}(M/\mathcal{R}) \rho d\tau \\ \vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \int_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}) \rho d\tau, \end{cases}$$

où la résultante \overrightarrow{P} est la quantité de mouvement de \mathcal{S} dans \mathcal{R} et $\vec{\sigma}_A$ le moment cinétique en A de \mathcal{S} dans \mathcal{R} .

En utilisant la définition du centre de gravité G , on montre que

$$\overrightarrow{P}(S/\mathcal{R}) = m \vec{v}(G/\mathcal{R}).$$

Il s'ensuit que la quantité de mouvement du solide \mathcal{S} dans son référentiel barycentrique est nulle.

De la relation de définition des torseurs, on déduit que

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{P}(S/\mathcal{R}).$$

La relation de composition des vitesses entre \mathcal{R} et \mathcal{R}_G qui est en translation par rapport à \mathcal{R} nous donne

$$\begin{aligned} \vec{v}(M/\mathcal{R}) &= \vec{v}(M/\mathcal{R}_G) + \vec{v}(M_{\text{lié à } \mathcal{R}_G}/\mathcal{R}) \\ &= \vec{v}(M/\mathcal{R}_G) + \vec{v}(G/\mathcal{R}). \end{aligned}$$



Finalement on trouve ainsi que

$$\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G),$$

qui lorsqu'on utilise la relation des torseurs donne le théorème de KÆNIG du moment cinétique

$$\vec{\sigma}_A(S/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_G) + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{P}(S/\mathcal{R}).$$

Rotation autour d'un axe fixe Δ .

On définit le moment cinétique σ_Δ de \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ de vecteur directeur \vec{u} par

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_A \cdot \vec{u},$$

où A est un point de Δ ; σ_Δ est indépendant du choix de A .

On définit de même le moment d'inertie de \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ au moyen de

$$J_\Delta = \int_S r^2 dm,$$

où r représente la distance à l'axe du point courant de \mathcal{S} . Une fois le moment d'inertie ainsi défini, on trouve que le moment cinétique par rapport à Δ a pour expression

$$\sigma_\Delta = J_\Delta \omega,$$

ω étant la vitesse angulaire de rotation autour de Δ .

Dans le cas où Δ est situé à une distance a de G , le théorème de HUYGENS permet d'écrire

$$J_\Delta = J_G + ma^2,$$

avec J_G moment d'inertie de \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ_G parallèle à Δ et passant par G (voir les problèmes 6.3.1 et 6.3.2).

Exemple : moment d'inertie d'une sphère pleine homogène de rayon R et de masse m par rapport à un de ses diamètres Δ .

$$J_\Delta = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S (x^2 + z^2) dm = \int_S (y^2 + z^2) dm.$$

En sommant les trois expressions précédentes, il vient

$$3J_\Delta = 2 \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \int_S r^2 dm,$$

où r est la variable radiale des coordonnées sphériques (cf. chapitre 10). Soit ρ la masse volumique de la sphère ($\rho = 3m/(4\pi R^3)$)

$$J_\Delta = \frac{2}{3} \rho \int_S r^2 dv = \frac{2}{3} \rho \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{2}{5} m R^2.$$

6.1.3 Actions agissant sur un solide.

Soit un système mécanique Σ ; on distingue deux types d'efforts s'exerçant sur Σ : les efforts extérieurs et les efforts intérieurs à Σ .

Un effort est dit intérieur à un système Σ s'il s'exerce entre deux éléments de celui-ci.

Torseur des efforts.

Soit l'ensemble (\vec{F}_i, M_i) des efforts \vec{F}_i exercés sur le système Σ considéré et de leurs points d'application M_i . On définit le torseur (F) des efforts exercés sur Σ par

$$(F) = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{\Gamma}_A = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_i, \end{cases}$$

avec \vec{R} la résultante des efforts exercés sur Σ et $\vec{\Gamma}_A$ le moment résultant en A .

D'après le principe, énoncé par la suite, des actions réciproques, le torseur des efforts intérieurs est nul; *on ne considère donc que les efforts extérieurs lors du calcul de (F)* . Notons que la définition du torseur des efforts peut se généraliser dans le cas de forces volumiques ou, fait plus rare, de couples volumiques —en magnétisme par exemple.

Parmi les forces et couples extérieurs, on distingue deux catégories: les forces ou couples donnés, dont la valeur ou l'expression est connue *a priori* (la force de pesanteur, la force de rappel d'un ressort, le couple de torsion ou le couple résistant) et les forces et couples de contact ou de liaison; seule cette deuxième catégorie rajoute des inconnues au problème mécanique à résoudre.

Actions de contact.

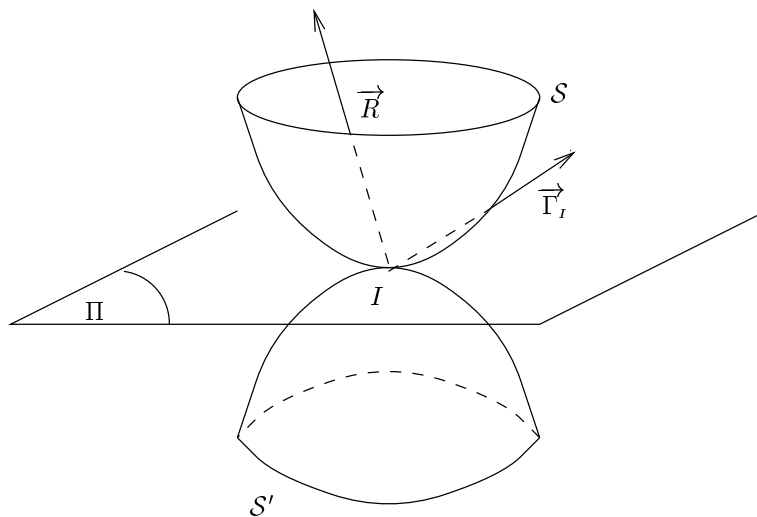


FIG. 6.3 - Effort et couple des actions de contact.

Dans le cas d'une liaison ponctuelle, en I , entre deux solides \mathcal{S} et \mathcal{S}' , le contact engendre une action de \mathcal{S}' sur \mathcal{S} de torseur

$$(F_c) = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{\Gamma}_I. \end{cases}$$

Remarquons que pour un contact rigoureusement ponctuel, le moment $\vec{\Gamma}_I$ devrait être nul. Dans la pratique cependant, il y a un écrasement local des deux solides autorisant l'existence d'un moment.

La modélisation garde donc une description en terme de contact ponctuel, tout en autorisant l'existence d'un moment.

\vec{R} et $\vec{\Gamma}_I$ peuvent être décomposés en composante tangentielle (appartenant au plan tangent de contact (Π) , cf. figure 6.3) et normale

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{\Gamma}_I = \vec{\Gamma}_{In} + \vec{\Gamma}_{It}, \end{cases}$$

la signification de chacune des composantes étant alors :

- \vec{N} s'oppose à la pénétration des deux solides ;
- \vec{T} s'oppose au glissement des deux solides ;
- $\vec{\Gamma}_{In}$ s'oppose au pivotement des deux solides ;
- $\vec{\Gamma}_{It}$ s'oppose au roulement des deux solides.

Lois empiriques du frottement : lois de Coulomb.

- Lois du frottement de glissement :

en présence de frottements, si le glissement entre les solides \mathcal{S} et \mathcal{S}' est nul ($\vec{u}(\mathcal{S}/\mathcal{S}') = \vec{0}$), alors il existe entre les composantes normale et tangentielle de l'effort de contact la relation

$$\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} < f_s,$$

où f_s est appelé coefficient de frottement de glissement statique. Si maintenant les deux solides glissent l'un par rapport à l'autre cela devient

$$\begin{cases} \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} = f_d \\ \vec{T} \text{ est opposé au glissement c'est-à-dire à } \vec{u}(\mathcal{S}/\mathcal{S}'). \end{cases}$$

f_d se nomme coefficient de frottement de glissement dynamique et vérifie $f_d < f_s$.

– Lois du frottement de roulement et de pivotement :

il existe des lois analogues pour $\vec{\Gamma}_{In}$ (respectivement $\vec{\Gamma}_{It}$), en remplaçant $\|\vec{T}\|/\|\vec{N}\|$ par $\|\vec{\Gamma}_{In}\|/\|\vec{N}\|$ (resp. $\|\vec{\Gamma}_{It}\|/\|\vec{N}\|$) et en introduisant les coefficients λ_s et λ_d (resp. δ_s et δ_d). La vitesse de glissement \vec{u} est quant à elle remplacée par la vitesse instantanée de pivotement (resp. de roulement) $\vec{\Omega}_n$ (resp. $\vec{\Omega}_t$).

6.1.4 Dynamique du solide.

Torseur dynamique, principe de la dynamique.

Soit un solide \mathcal{S} de masse volumique ρ et un référentiel \mathcal{R} . On définit le torseur dynamique de \mathcal{S} dans \mathcal{R} par

$$(D) = \begin{cases} \vec{R}_\delta = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{a}(M/\mathcal{R}) \rho d\tau \\ \vec{\delta}_A = \int_{M \in \mathcal{S}} \vec{AM} \wedge \vec{a}(M/\mathcal{R}) \rho d\tau, \end{cases}$$

où $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ est l'accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} . Le principe de la dynamique s'énonce comme suit :

dans un référentiel \mathcal{R} galiléen, et pour tout système matériel fermé, le torseur des efforts extérieurs est égal au torseur dynamique :

$$(D) = (F_{\text{ext}}). \tag{1}$$

Principe des actions réciproques.

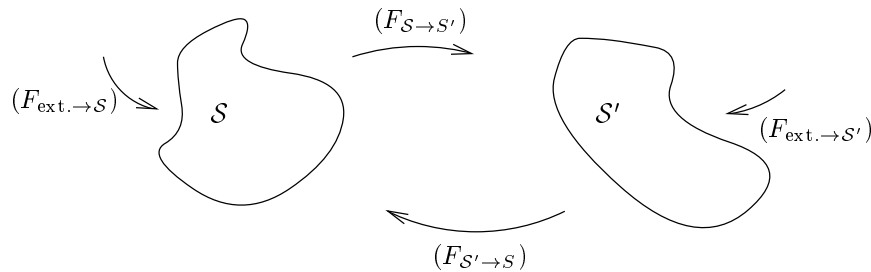


FIG. 6.4 - Actions réciproques entre deux solides.

Le principe de la dynamique appliqué dans le référentiel \mathcal{R} galiléen, successivement aux systèmes \mathcal{S} , \mathcal{S}' et $(\mathcal{S} + \mathcal{S}')$ définis figure 6.4 donne

$$\begin{cases} (D_S) &= (F_{S' \rightarrow S}) + (F_{\text{ext.} \rightarrow S}) \\ (D_{S'}) &= (F_{S \rightarrow S'}) + (F_{\text{ext.} \rightarrow S'}) \\ (D_{S+S'}) &= (F_{\text{ext.} \rightarrow S}) + (F_{\text{ext.} \rightarrow S'}). \end{cases}$$

Comme de plus le torseur dynamique du système total est égal à la somme du torseur dynamique de \mathcal{S} et de celui de \mathcal{S}' on aboutit au principe des actions réciproques

$$(F_{\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'} = -F_{\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}}) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_{\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'} = -\vec{R}_{\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}} \\ \vec{\Gamma}_A(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}') = -\vec{\Gamma}_A(\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}). \end{cases}$$

Théorèmes de la dynamique.

L'égalité (1) implique l'égalité entre les résultantes des deux torseurs à savoir

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\text{ext.}} &= \int_{\mathcal{S}} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{S}} \rho \vec{v} d\tau \right) = \frac{d}{dt} \vec{P}(\mathcal{S}/\mathcal{R}), \end{aligned}$$

d'où l'expression du théorème de la résultante dynamique

$$m \frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt} = \vec{R}_{\text{ext.}} \quad (2)$$

La deuxième relation donnée par (1) est l'égalité des moments des deux torseurs en un point fixe A de \mathcal{R}

$$\vec{\delta}_A = \vec{\Gamma}_A^{\text{ext.}},$$

ce qui peut se réécrire pour donner le théorème du moment cinétique en un point fixe de \mathcal{R}

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\Gamma}_A^{\text{ext.}} \quad (3)$$

Il est possible grâce au théorème de KÆNIG du moment cinétique d'obtenir une formule dérivée de (3) concernant le point G dans le référentiel barycentrique

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G) = \vec{\Gamma}_G^{\text{ext.}} \quad (4)$$

Dans le cas important de la rotation par rapport à un axe **fixe** Δ (de directeur \vec{u}) de \mathcal{R} , il vient par projection de (3) sur \vec{u}

$$\frac{d}{dt} \sigma_{\Delta}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \Gamma_{\Delta}^{\text{ext.}}, \quad (5)$$

où $\sigma_{\Delta}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{\sigma}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \cdot \vec{u}$ et $\Gamma_{\Delta}^{\text{ext.}} = \vec{\Gamma}_A^{\text{ext.}} \cdot \vec{u}$. De même à partir de (4) dans le cas d'un axe Δ_G , passant par G et de direction fixe dans \mathcal{R}

$$\frac{d}{dt} \sigma_{\Delta_G}(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G) = \Gamma_{\Delta_G}^{\text{ext.}}$$

6.1.5 Énergie cinétique, travail des actions mécaniques.

Énergie cinétique et théorème de Kœnig.

L'énergie cinétique d'un solide \mathcal{S} dans un référentiel \mathcal{R} est définie par

$$E_{\text{cin.}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \int_{M \in \mathcal{S}} \frac{1}{2} v^2(M/\mathcal{R}) dm.$$

Le théorème de KœNIG de l'énergie cinétique permet de séparer deux contributions à cette énergie, une de translation de G dans le référentiel \mathcal{R} et une autre de rotation dans le référentiel barycentrique :

$$E_{\text{cin.}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m v^2(G/\mathcal{R}) + E_{\text{cin.}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}_G).$$

Dans le cas particulier de la rotation par rapport à un axe Δ fixe dans le référentiel \mathcal{R}' considéré (qui peut être \mathcal{R}_G) on obtient

$$E_{\text{cin.}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}') = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2,$$

avec ω vitesse angulaire de rotation autour de Δ , et J_{Δ} moment d'inertie par rapport à Δ .

Exemple : énergie cinétique d'un cerceau circulaire de rayon R , qui roule sans glisser sur un plan. Le théorème de KœNIG permet d'écrire $E_{\text{cin.}} = (m v^2 + J \omega^2)/2$, où m est la masse de la roue et J son moment d'inertie par rapport à son axe. Tous les points de la roue étant situés à la distance R de l'axe, l'intégrale définissant J se calcule directement : $J = m R^2$. La traduction de l'absence de glissement entre la roue et le sol permet quant à elle d'écrire $v = R \omega$ d'où l'énergie cinétique totale de la roue : $E_{\text{cin.}} = m v^2$.

Théorème de l'énergie cinétique.

Soit un système Σ , soumis à des efforts \vec{F}_i de points d'application M_i . La puissance des efforts exercés sur Σ vaut

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i/\mathcal{R}).$$

Cette définition se généralise directement dans le cas d'une distribution continue d'efforts.

Attention, les efforts intérieurs contribuent de façon non nulle à cette puissance. Ils doivent donc être pris en compte au même titre que les efforts extérieurs lors du bilan énergétique. Dans \mathcal{R} galiléen le théorème de l'énergie cinétique s'énonce

$$\frac{dE_{\text{cin.}}(\mathcal{S}/\mathcal{R})}{dt} = P_{\text{ext.}} + P_{\text{int.}} \quad \Leftrightarrow \quad dE_{\text{cin.}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \delta W_{\text{ext.}} + \delta W_{\text{int.}},$$

expression similaire au premier « principe » de la thermodynamique.

Forces dérivant d'une énergie potentielle; énergie mécanique.

Une force \vec{f} dérive d'une énergie potentielle s'il existe une fonction $E_{\text{pot.}}$ des coordonnées des points du système S telle que :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{\text{pot.}},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\delta W_{\vec{f}} = -dE_{\text{pot.}}$$

Il est important de noter que le travail d'une force dérivant d'une énergie potentielle ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des points de départ et d'arrivée; c'est ce qui la distingue fondamentalement d'une force dissipative (force de frottement par exemple).

Exemple : la force élastique $\vec{f} = -kx \vec{e}_x$ est une force conservative. En effet

$$-kx \vec{e}_x = -\frac{d(kx^2/2 + C^{\text{te}})}{dx} \vec{e}_x = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} kx^2 + C^{\text{te}} \right).$$

La force élastique dérive donc d'une énergie potentielle $E_{\text{pot.}} = kx^2/2 + C^{\text{te}}$. Comme le potentiel en électrostatique, une énergie potentielle est définie à une constante arbitraire près.

On définit l'énergie mécanique d'un système comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. Dans le cas de systèmes pour lesquels les forces ne dérivant pas d'une énergie potentielle ne travaillent pas (systèmes dits conservatifs), on a

$$dE_{\text{cin.}} = -dE_{\text{pot.}} \quad \Leftrightarrow \quad dE_{\text{méca.}} = 0.$$

Puissance des efforts exercés sur un solide.

De la définition de la puissance des efforts exercés sur un système Σ , dans le cas particulier du solide, on trouve que quel que soit le point A fixe par rapport au solide S ,

$$P = \overrightarrow{R} \cdot \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Gamma}_A \cdot \overrightarrow{\Omega}.$$

En particulier dans le cas d'une force de liaison entre S et un solide S_0 fixe dans \mathcal{R}

$$P = \overrightarrow{R}_l \cdot \vec{v}(I/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Gamma}_l \cdot \overrightarrow{\Omega}.$$

Enfin, dans le cas général d'une force de contact entre deux solides S et S' en mouvement par rapport à \mathcal{R}

$$P = \overrightarrow{R}_{S' \rightarrow S} \cdot \vec{u}(S/S') + \overrightarrow{\Gamma}_{S' \rightarrow S} \cdot \overrightarrow{\Omega}(S/S').$$

Dans le cas particulier de la puissance exercée par un couple de moment $\overrightarrow{\Gamma}$ sur un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ , on obtient

$$P = \Gamma_{\Delta} \frac{d\theta}{dt}.$$

6.2 Exercices

6.2.1 Pendule pesant

Durée 15 min

Un solide \mathcal{S} oscille (figure 6.5) sans frottements autour d'un axe horizontal Δ —on parle de liaison rotoïde parfaite. On note J le moment d'inertie de \mathcal{S} par rapport à Δ , M sa masse, a la distance entre son centre de gravité G et Δ et enfin θ l'angle (\vec{Ox}, \vec{OG}) , \vec{Ox} étant dirigé vers le bas.

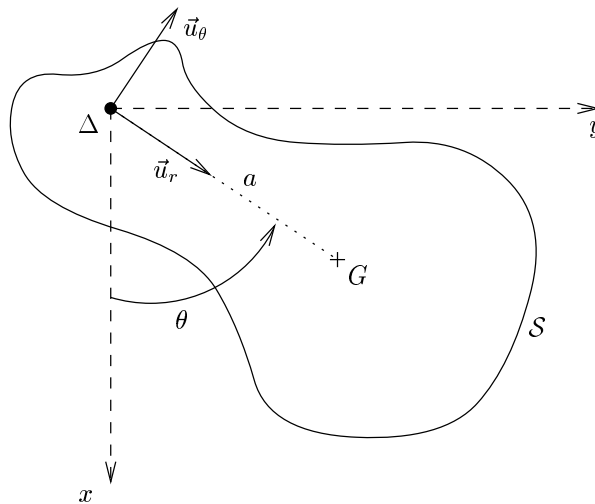


FIG. 6.5 - Oscillations du pendule pesant.

1. Déterminer l'équation différentielle du premier puis du second ordre vérifiée par $\theta(t)$.
2. Déterminer la réaction \vec{R} de l'axe Δ sur le solide \mathcal{S} . Examiner le cas particulier du pendule simple.
3. Donner la période des oscillations de faible amplitude autour de $\theta = 0$.

Solution

1. Le solide \mathcal{S} est soumis à l'action de son poids et de la force exercée par l'axe Δ . La liaison entre ces deux éléments étant parfaite, le travail de l'effort associé est nul et le système considéré est donc conservatif. Cela signifie que son énergie mécanique, somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle (de pesanteur ici) est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - Mga \cos \theta = C^{te}$$

La valeur de la constante est déterminée usuellement par le biais des conditions initiales. La dérivation par rapport au temps de cette relation nous fournit l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$

$$J\ddot{\theta} = -Mga \sin \theta,$$

équation qui peut aussi s'obtenir directement au moyen du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ .

2. La relation fondamentale de la dynamique, appliquée au solide S dans le référentiel fixe du laboratoire, s'écrit

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_{\Delta \rightarrow S} + \vec{P},$$

relation qui devient, en projetant sur la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$M \begin{vmatrix} -a\dot{\theta}^2 \\ a\ddot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_r \\ R_\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Mg \cos \theta \\ -Mg \sin \theta \end{vmatrix}.$$

En substituant pour $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ les expressions trouvées en 1., on obtient finalement comme composantes de la réaction de l'axe

$$\begin{cases} R_r = -\frac{2Ma}{J} (E_m + Mga \cos \theta) - Mg \cos \theta \\ R_\theta = Mg \sin \theta \left(1 - \frac{Ma^2}{J} \right). \end{cases}$$

Dans le cas particulier du pendule simple, le moment d'inertie J vaut Ma^2 et la réaction de l'axe apparaît purement radiale.

3. Dans le cas d'oscillations de faible amplitude autour de la position $\theta = 0$, l'équation du second ordre vérifiée par θ se réduit par un développement limité à

$$J\ddot{\theta} \simeq -Mga\theta$$

et le mouvement est alors sinusoïdal de pulsation

$$\omega^2 = \frac{Mga}{J}.$$

L'expression de la période des petites oscillations est donnée par

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mga}}.$$

6.2.2 Propulsion par frottement...

Durée 15 min

On considère un ensemble (figure 6.6) constitué par un support A , mobile sans frottements sur le sol, et par un palet B , posé sur A . Le mouvement entre A et B s'effectue quant à lui avec frottements. À l'instant initial, on imprime une vitesse v_0 au palet B .

1. Déterminer l'état final du système.
2. Discuter le bilan énergétique des systèmes $(A + B)$, (A) et (B) .

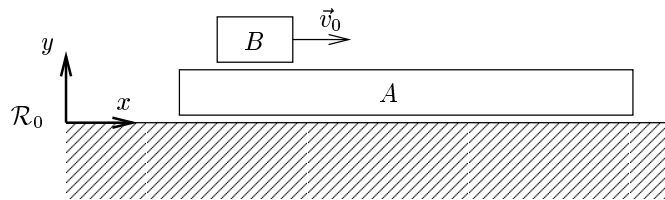


FIG. 6.6 - Palet sur un support mobile.

Solution

1. En l'absence de frottements entre le sol et le support A , la relation fondamentale de la dynamique appliquée au système $(A + B)$ dans le référentiel fixe \mathcal{R}_0 s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum_{\text{ext.}} \vec{F} \\ &= (m_A + m_B)\vec{g} + \vec{N}_{\text{Sol} \rightarrow A}. \end{aligned}$$

En conséquence, la composante horizontale p_x de la quantité de mouvement du système total est constante au cours du temps.

De plus, dans l'état final, le palet aura cessé de glisser sur le support A et ces deux éléments auront donc même vitesse v dans \mathcal{R}_0 , d'où l'égalité

$$m_B v_0 = (m_A + m_B)v \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0}.$$

2. Soit $\vec{u}(B/A) = \vec{v}(B/\mathcal{R}_0) - \vec{v}(A/\mathcal{R}_0)$ la vitesse de glissement de B par rapport à A , mesurée dans \mathcal{R}_0 . Le théorème de l'énergie cinétique appliqué dans ce même référentiel au système total s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{cin.}} &= W_{\text{ext.}} + W_{\text{int.}} \\ &= \int_0^{\text{final}} P_{\text{int.}} dt, \end{aligned}$$

où la puissance des efforts intérieurs (la force de frottement entre A et B) vaut

$$P_{\text{int.}} = \vec{R}_{A \rightarrow B} \cdot \vec{u}(B/A).$$

De plus, la variation d'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{cin.}} &= \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 - \frac{1}{2}m_B v_0^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_0^2 < 0. \end{aligned}$$

Le système total a perdu de l'énergie, dissipée sous forme de chaleur par la force de liaison entre A et B .

Si maintenant on applique le théorème de l'énergie cinétique au support A dans le référentiel fixe \mathcal{R}_0 , il vient

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{cin.}} &= W_{\text{ext.}} \\ &= \int_0^{\text{final}} \vec{R}_{B \rightarrow A} \cdot \vec{v}(A/\mathcal{R}_0) dt \\ &= - \int_0^{\text{final}} \vec{R}_{A \rightarrow B} \cdot \vec{v}(A/\mathcal{R}_0) dt. \end{aligned}$$

Ces deux membres sont positifs et il apparaît que le support A a été entraîné par la force de frottement ($\Delta E_{\text{cin.}} = m_A v^2/2$).

Pour le palet B , la perte d'énergie cinétique est due aux frottements sur le support ; ces derniers sont donc à l'origine d'une perte nette d'énergie pour le système total, dissipée sous forme de chaleur, mais aussi d'une redistribution de l'énergie cinétique entre le palet B et le support A .

EXERCICES

6.2.3 Si j'avais un cerceau...

Université de Paris Val de Marne

Durée 1 h

Une barre homogène AB , de masse m et de longueur b , glisse sans frottement sur un plan horizontal fixe, ce dernier étant rapporté à deux axes fixes Ox , Oy . L'extrémité A glisse sans frottement sur une circonférence de centre O et de rayon a , et l'extrémité B est attirée par le point fixe O en raison inverse du carré de sa distance r à O , l'attraction ayant pour intensité :

$$\frac{m k^2 a^3}{r^2} \quad \text{où } k^2 \text{ désigne une constante.}$$

On pose, voir figure 6.7

$$m = 1, \quad (Ox, OA) = \phi, \quad (OA, AB) = \theta.$$

Les valeurs initiales de ces angles et celles de leurs dérivées sont nommées $\phi_0, \dot{\phi}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0$.

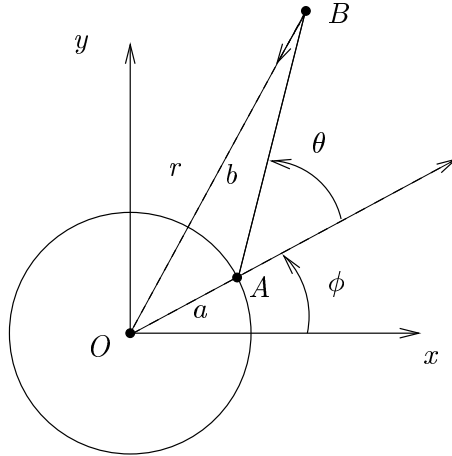


FIG. 6.7 - Définition des principales grandeurs

1. Montrer que l'énergie cinétique de la barre peut s'écrire :

$$2T = \left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right) \dot{\phi}^2 + \left(\frac{2b^2}{3} + ab \cos \theta \right) \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{b^2}{3} \dot{\theta}^2.$$

2. Donner l'expression de l'énergie potentielle $U = U(\theta)$.
3. Le problème comporte une particularité géométrique dont on précisera la nature. Montrer qu'elle se traduit par une intégrale première d'expression :

$$\left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right) \dot{\phi} + \left(\frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2} \cos \theta \right) \dot{\theta} = C^{te}.$$

4. Le problème comporte une autre intégrale première. En donner l'expression.
5. En déduire l'équation différentielle donnant $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ . On constatera qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$g(\theta) \dot{\theta}^2 = f(\theta)$$

où $g(\theta)$ est une fonction positive. Discussion.

Solution

Dans tout l'exercice, on se place dans un référentiel (\mathcal{R}) que l'on supposera galiléen. Sans autre précision, les calculs seront effectués dans ce référentiel (\mathcal{R}).

1. Pour calculer l'énergie cinétique de la barre, sommions les énergies cinétiques élémentaires de chaque élément de longueur :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\text{barre}} [\vec{v}(M)]^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^b [\vec{v}(M)]^2 m \frac{dx}{b},$$

où x désigne la position du point M sur la barre ($x = 0$ lorsque M est le point A et $x = b$ pour $M = B$). Le champ de vitesse $\vec{v}(M)$ de la barre est celui d'un solide, ce qui signifie :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

où $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur rotation de la barre. Celui-ci a pour expression :

$$\vec{\Omega} = (\dot{\phi} + \dot{\theta}) \vec{u}_z$$

avec \vec{u}_z unitaire servant à définir le trièdre direct $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. La position de la barre AB est en effet définie sans ambiguïté par la donnée de la position du point A et de l'angle $\theta + \phi$.

Il est commode de définir les vecteurs unitaires \vec{u}_ϕ et \vec{u}_θ associés aux rotations d'angles respectifs ϕ et θ (voir la figure 6.8). Ces vecteurs sont « mobiles » : \vec{u}_ϕ est orthogonal à la droite (OA) et \vec{u}_θ est orthogonal à (AB) ; le trièdre $(\vec{u}_\phi, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est direct, normé, mais pas orthogonal. La vitesse d'un point M de la barre peut maintenant s'écrire sous la forme :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) x \vec{u}_\theta = a \dot{\phi} \vec{u}_\phi + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) x \vec{u}_\theta.$$

L'énergie cinétique devient :

$$2T = m \int_0^b \left[a^2 \dot{\phi}^2 + (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 x^2 + 2a \dot{\phi} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) x (\vec{u}_\phi \cdot \vec{u}_\theta) \right] \frac{dx}{b}.$$

Par ailleurs, d'après la définition des vecteurs \vec{u}_θ et \vec{u}_ϕ , on a

$$\vec{u}_\phi \cdot \vec{u}_\theta = \cos \theta$$

en vertu de quoi,

$$2T = m \left\{ \left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right) \dot{\phi}^2 + \left(\frac{2b^2}{3} + ab \cos \theta \right) \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{b^2}{3} \dot{\theta}^2 \right\}.$$

Nous avons gardé explicitement la masse m au lieu de poser $m = 1$ comme le suggère l'énoncé. Cela permet de vérifier l'homogénéité des formules obtenues.

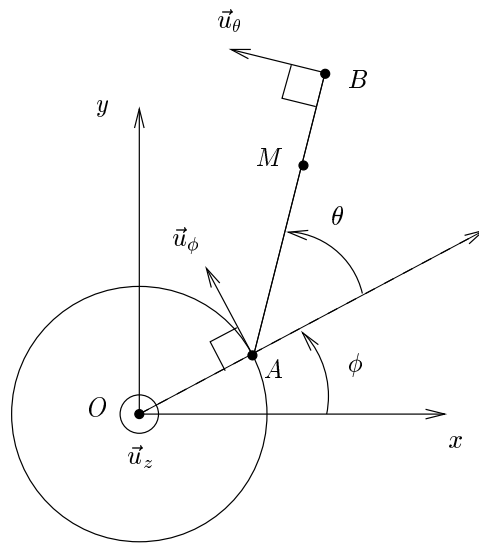


FIG. 6.8 - Vecteurs unitaires associés aux différentes rotations

Remarque : le résultat précédent peut se retrouver à l'aide du second théorème de KÖENIG qui précise que l'énergie cinétique d'un solide est la somme de l'énergie cinétique de son centre de masse et de son énergie cinétique \$T^*\$ dans le référentiel barycentrique :

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T^*.$$

Le centre de masse \$G\$ de la tige se trouve au milieu du segment \$[A, B]\$. Sa vitesse a pour expression :

$$\vec{v}(G) = \vec{v}(A) + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \frac{b}{2} \vec{u}_\theta = a \dot{\phi} \vec{u}_\phi + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \frac{b}{2} \vec{u}_\theta$$

d'où

$$v^2(G) = \dot{\phi}^2 \left(a^2 + \frac{b^2}{4} + ab \cos \theta \right) + \dot{\theta}^2 \frac{b^2}{4} + \dot{\phi} \dot{\theta} \left(ab \cos \theta + \frac{b^2}{2} \right).$$

Par ailleurs, le mouvement de la barre dans son référentiel barycentrique est un mouvement de rotation à la vitesse angulaire \$(\dot{\phi} + \dot{\theta})\$ autour de l'axe \$(G, \vec{u}_z)\$ fixe dans le référentiel barycentrique : l'énergie cinétique barycentrique s'écrit

$$T^* = \frac{1}{2} \mathcal{J} (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2,$$

où \$\mathcal{J}\$ est le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe de rotation \$(G, \vec{u}_z)\$. Par définition :

$$\mathcal{J} = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dm = m \frac{b^2}{12}.$$

Ainsi,

$$2T = m \left\{ \left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right) \dot{\phi}^2 + \left(\frac{2b^2}{3} + ab \cos \theta \right) \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{b^2}{3} \dot{\theta}^2 \right\}.$$

2. La tige est soumise à quatre forces. Le poids de la barre et la réaction du plan horizontal se compensent puisque le mouvement est horizontal dans le plan (xOy) . Au point A , s'exerce la réaction de l'anneau mais cette force est toujours orthogonale au déplacement du point A puisqu'il n'y a pas de frottements : elle ne travaille pas. Le point B ressent la force centrale :

$$\vec{f} = \frac{m k^2 a^3}{r^2} \frac{\overrightarrow{BO}}{BO} = -m k^2 a^3 \frac{\overrightarrow{OB}}{OB^3}.$$

Cette force est indépendante de ϕ (elle est invariante par une translation sur la variable ϕ : $\phi \rightarrow \phi + C^{\text{te}}$). Il en sera de même pour le potentiel U duquel elle dérive suivant :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} U.$$

Celui-ci a pour expression :

$$U(\theta) = -m k^2 \frac{a^3}{r} + C^{\text{te}} = -m k^2 \frac{a^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}} + C^{\text{te}}.$$

Le potentiel n'est défini qu'à une constante près. Ce ne sont que ses variations qui nous intéressent.

3. Le système est soumis à un champ de force central (la réaction du support en A et la force exercée en B sont toutes deux dirigées vers O). Comme dans les problèmes de gravitation et de mouvement des planètes, nous pouvons en déduire que son moment cinétique se conserve. En effet, appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$ (normal au plan du cercle) passant par le point O fixe :

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext.}(O)}.$$

La dérivée temporelle du moment cinétique est égale à la somme du moment en O des forces extérieures à la barre.

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext.}(O)} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0}$$

où \vec{F}_A (resp. \vec{F}_B) est la force exercée sur la tige au point A (resp. B). Nous en déduisons la conservation du moment cinétique. Calculons celui-ci :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(O) &= \int_{\text{barre}} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) dm \\ &= m \int_0^b \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) \frac{dx}{b} \\ &= m \left\{ a^2 \dot{\phi} + (\dot{\phi} + \dot{\theta}) \frac{b}{2} a \cos \theta + \frac{b}{2} a \dot{\phi} \cos \theta + \frac{1}{3} b^2 (\dot{\phi} + \dot{\theta}) \right\} \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Une intégrale première du mouvement est donc :

$$\left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right) \dot{\phi} + \left(\frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2} \cos \theta \right) \dot{\theta} = C^{\text{te}} = C$$

qui traduit la loi des aires pour la barre soumise à un système de forces centrales.

Remarque : pour calculer $\vec{\sigma}(O)$, nous aurions pu appliquer le premier théorème de KÖENIG :

$$\vec{\sigma}(O) = \vec{OG} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{\sigma}^*,$$

où $\vec{\sigma}^*$ est le moment cinétique calculé dans le référentiel barycentrique.

Dans le référentiel barycentrique, la barre est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire $(\dot{\theta} + \dot{\phi})$ autour de l'axe fixe $\Delta = (G, \vec{u}_z)$, ce qui permet d'écrire :

$$\vec{\sigma}^* = \sigma_\Delta \vec{u}_z = \frac{mb^2}{12} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \vec{u}_z.$$

Ce résultat peut se retrouver par un calcul direct plus fastidieux :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}^*(G) &= \int_{\text{barre}} \vec{GM} \wedge (\vec{v}(M) - \vec{v}(G)) \, dm \\ &= \int \vec{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \, dm \\ &= \int \left[GM^2 \vec{\Omega} - (\vec{GM} \cdot \vec{\Omega}) \vec{GM} \right] \, dm \\ &= \vec{\Omega} \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \, dx \frac{m}{b} \\ &= (\dot{\theta} + \dot{\phi}) m \frac{b^2}{12} \vec{u}_z. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \vec{OG} \wedge m\vec{v}(G) &= m \left(a \frac{\vec{OA}}{OA} + \frac{b}{2} \frac{\vec{OB}}{OB} \right) \wedge \left(a\dot{\phi} \vec{u}_\phi + (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \frac{b}{2} \vec{u}_\theta \right) \\ &= m \left(a(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \frac{b}{2} \cos \theta + a^2 \dot{\phi} + \frac{b^2}{4} (\dot{\phi} + \dot{\theta}) + \dot{\phi} \frac{ab}{2} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

ce qui redonne :

$$\vec{\sigma}(O) = m \left\{ \left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right) \dot{\phi} + \left(\frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2} \cos \theta \right) \dot{\theta} \right\} \vec{u}_z.$$

4. Le mouvement de la barre en A se fait sans frottement et la force subie par le point B est conservative d'après le résultat de la question 2. Par conséquent, l'énergie mécanique E_m de la barre se conserve :

$$T(\theta, \phi) + U(\theta) = E_m = C^{\text{te}}.$$

5. À l'aide de la relation établie à la question 3, nous allons exprimer l'énergie cinétique T en fonction de θ et $\dot{\theta}$ uniquement. Écrivons tout d'abord :

$$\frac{2T}{m} = \frac{b^2}{3} \dot{\theta}^2 + \dot{\phi} \left\{ C + \left(\frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2} \cos \theta \right) \dot{\theta} \right\}.$$

Puis, en remplaçant $\dot{\phi}$ par son expression obtenue à la question 3 :

$$\begin{aligned} \frac{2T}{m} \left[a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right] &= \frac{b^2}{3} \left[a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right] \dot{\theta}^2 + C^2 - \left[\frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2} \cos \theta \right]^2 \dot{\theta}^2 \\ &= \dot{\theta}^2 \left[\frac{a^2 b^2}{3} - \frac{a^2 b^2}{4} \cos^2 \theta \right] + C^2 \\ &= \dot{\theta}^2 \frac{a^2 b^2}{12} (4 - 3 \cos^2 \theta) + C^2. \end{aligned}$$

De la conservation de l'énergie mécanique E_m , il vient :

$$(2T + 2U) \left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right) = 2E_m \left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right).$$

Posons

$$g(\theta) = m \frac{a^2 b^2}{12} (4 - 3 \cos^2 \theta),$$

l'expression précédente devient :

$$g(\theta) \dot{\theta}^2 + mC^2 + 2 \left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right) U(\theta) = 2E_m \left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right).$$

Il est possible de la réexprimer sous la forme :

$$g(\theta) \dot{\theta}^2 = f(\theta),$$

où

$$f(\theta) = 2 \{ E_m - U(\theta) \} \left(a^2 + \frac{b^2}{3} + ab \cos \theta \right) - C^2.$$

Étant donné que $\cos \theta < 1$, nous pouvons affirmer que la fonction g est toujours de signe strictement positif. Cela signifie que si pour certains angles, $f(\theta)$ prend des valeurs négatives, ces angles ne correspondront jamais à une position de la barre. Envisageons les deux cas possibles selon les conditions initiales :

- $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $f(\theta) > 0$. Alors la vitesse de rotation a pour expression

$$|\dot{\theta}| = \sqrt{f/g} \neq 0 \quad \text{pour tout } \theta$$

et elle ne change jamais de signe : la barre tourne indéfiniment autour du point A , toujours dans le même sens, le point A étant lui-même mobile par rapport au cerceau.

- $\exists \theta_m \in [0, 2\pi] / f(\theta) \leq 0$. La fonction f étant continue, elle est négative sur un intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ contenant θ_m et l'existence d'un intervalle $[\theta_3, \theta_4]$ sur lequel f est positive est physiquement nécessaire. Suivant la façon dont f s'annule en θ_3 ou θ_4 , la barre va osciller entre les positions repérées par les angles θ_3 et θ_4 ($f'(\theta_3) \neq 0$ et $f'(\theta_4) \neq 0$) ou bien la barre va tendre asymptotiquement vers l'une des deux positions précédentes.

6.2.4 Propagation d'ondes dans une chaîne de ressorts

Université Joseph FOURIER, Grenoble
Durée 1 h

On considère une chaîne de particules identiques de masse m , situées aux points d'abscisse $z = na$ où n est un entier négatif ou nul. La chaîne est donc illimitée à gauche et limitée en $z = 0$.



FIG. 6.9 - La chaîne semi-infinie

Ces masses sont reliées par des ressorts identiques de raideur α dont la longueur au repos est a . Les particules effectuent des déplacements selon Oz et l'on appelle x_n le déplacement algébrique de la particule n .

1. Montrer que la particule n obéit à l'équation

$$m\ddot{x}_n + \alpha (2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) = 0.$$

2. On cherche des solutions sous la forme d'une onde progressive de nombre d'onde k . En notation complexe :

$$x_n = A e^{j(\omega t - kna)},$$

où par convention $j^2 = -1$.

- a) En déduire la relation entre ω et k . Comment appelle-t-on cette équation?
- b) Cette relation aurait-elle changé si l'on avait cherché des solutions

$$x_n = A e^{j(\omega t + kna)} ?$$

À quel type d'ondes correspondent-elles?

3. Montrer que les solutions « ondes progressives » ne sont possibles que si $\omega < \omega_{\max}$. Donner l'expression de ω_{\max} en fonction de α et de m .
On se place désormais dans le cas $\omega < \omega_{\max}$.

4. Donner l'expression de la vitesse de phase et de de la vitesse de groupe. Pour quelles valeurs de k sont-elles confondues?
5. La particule extrême ($n = 0$) est fixe: $x_0 = 0$. On admet que l'onde incidente se réfléchit en $z = 0$ et donne naissance à une onde réfléchie de même amplitude, mais déphasée de φ par rapport à l'onde incidente. On a alors :

$$x_n = A e^{j(\omega t - kna)} + A e^{j(\omega t + kna + \varphi)}.$$

Déterminer φ .

6. Montrer que l'on peut supprimer l'onde réfléchie en liant la particule extrême ($n = 0$) à un point fixe par un ressort de raideur β , et en la soumettant à un frottement visqueux donnant lieu à une force

$$\vec{f} = -m\Gamma \vec{v}.$$

Déterminer β et Γ en fonction de ω , k , α , et a . On identifiera partie réelle et partie imaginaire dans l'équation fondamentale de la dynamique pour la particule en $z = 0$.

Solution

1. Soit z_n l'abscisse de la $n^{\text{ième}}$ particule. Les grandeurs algébriques x_n représentent le déplacement par rapport à la position d'équilibre $z_n = na$. On a donc :

$$z_n = x_n + na.$$

L'étirement du ressort situé entre les particules n et $n + 1$ est :

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1} - x_n + a.$$

Par conséquent, ce ressort dont la longueur au repos est a , exerce sur la particule n une force qui, projetée sur l'axe des z a pour expression

$$F_{(n+1) \rightarrow n} = \alpha (z_{n+1} - z_n - a) = \alpha (x_{n+1} - x_n).$$

De même, la particule n ressent de la part de la partie de la chaîne située à sa gauche une force

$$F_{(n-1) \rightarrow n} = -F_{n \rightarrow (n-1)} = \alpha (x_{n-1} - x_n).$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la particule n , il vient

$$m\ddot{z}_n = F_{n+1 \rightarrow n} + F_{n-1 \rightarrow n}.$$

Par ailleurs, $\ddot{z}_n = \ddot{x}_n$, d'où

$$\boxed{m\ddot{x}_n + \alpha (2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) = 0}.$$

Le facteur 2 qui apparaît dans l'expression précédente laisse penser que les effets des ressorts situés à droite et à gauche de la particule n s'ajoutent. En

effet, à x_{n+1} et x_{n-1} fixés, si on déplace n vers la droite ($x_n > 0$), le ressort situé à gauche tire la particule vers la gauche et celui situé à droite la pousse de même vers la gauche.

Remarque : les forces subies par la particule n peuvent aussi s'exprimer à partir de l'énergie potentielle élastique E_p des ressorts. Pour le ressort situé entre les particules n et $n + 1$, on a :

$$E_p(n, n + 1) = \frac{1}{2} \alpha (z_{n+1} - z_n - a)^2 = \frac{1}{2} \alpha (x_{n+1} - x_n)^2.$$

La tension subie par la particule n de la part de ce ressort s'exprime sous la forme :

$$\vec{F}_{(n+1) \rightarrow n} = -\overrightarrow{\text{grad}}_n [E_p(n, n + 1)]$$

où la dérivation a lieu par rapport à la position de la particule n . On retrouve bien :

$$F_{(n+1) \rightarrow n} = \alpha (x_{n+1} - x_n).$$

2.a) On cherche des solutions sous la forme d'ondes progressives :

$$x_n = A e^{j(\omega t - k n a)}.$$

En reportant dans l'équation traduisant la relation fondamentale de la dynamique, il vient :

$$-m\omega^2 x_n + \alpha (2x_n - e^{jka} x_n - e^{-jka} x_n) = 0$$

d'où

$$\omega^2 = \frac{2\alpha}{m} (1 - \cos ka).$$

Posant $\omega_0^2 = \alpha/m$ (ω_0 est la fréquence propre des ressorts), on peut écrire la relation entre k et ω sous la forme :

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right).$$

L'équation précédente est la relation de dispersion.

2.b) Si l'on considère des solutions de la forme

$$x_n = A e^{j(\omega t + k n a)},$$

correspondant à des ondes se propageant vers la gauche, la relation de dispersion est inchangée. Elle est en effet invariante par le changement $k \rightarrow -k$. Cela signifie que la propagation d'ondes est possible dans le sens des z croissants et dans celui des z décroissants.

3. Le terme en \sin^2 qui apparaît dans la relation de dispersion est majoré par 1. Les ondes progressives ne peuvent donc se propager que pour $\omega < \omega_{\max}$, avec

$$\omega_{\max} = 2\omega_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

4. Prenons par convention $\omega > 0$ et $k > 0$. On a alors :

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right).$$

Ainsi,

$$v_\varphi \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_0}{k} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

et

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = a\omega_0 \cos\left(\frac{ka}{2}\right).$$

Ces deux vitesses caractéristiques sont confondues lorsque $k \ll 1/a$, c'est-à-dire pour les très grandes longueurs d'onde. Dans cette limite, on a :

$$v_\varphi \simeq v_g \simeq \omega_0 a.$$

Plus généralement, $v_\varphi = v_g$ lorsque la relation

$$\tan\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{ka}{2}$$

est vérifiée.

5. Le déphasage φ (défini à 2π près) s'obtient grâce à la condition $x_0 = 0$ qui impose

$$\varphi = \pi.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$x_n = A e^{j\omega t} [e^{-jkna} - e^{jkna}] = -2A j e^{j\omega t} \sin(kna)$$

qui correspond à une structure d'onde stationnaire.

6. Supposons que l'on ait fait subir à la particule $n = 0$ le traitement décrit dans l'énoncé. Pour les particules d'indice $n \neq 0$, la relation fondamentale de la dynamique donne l'équation obtenue à la question 1. En ce qui concerne la particule extrême $n = 0$, un bilan des forces conduit à :

$$m\ddot{x}_0 + m\Gamma\dot{x}_0 + \alpha(x_0 - x_{-1}) + \beta x_0 = 0.$$

Le but de cette question est de montrer que la chaîne admet une solution « onde progressive », c'est-à-dire qu'une onde réfléchie n'est pas nécessaire pour satisfaire les conditions aux limites. Nous allons voir que c'est bien le cas et calculer les valeurs de β et Γ correspondantes. Pour tout n , y compris $n = 0$, on doit avoir

$$x_n = A e^{j(\omega t - kna)}.$$

Après simplification par $A \exp(j\omega t)$ dans l'équation fondamentale de la dynamique pour la particule $n = 0$, il vient :

$$-m\omega^2 + \alpha(1 - e^{jka}) + \beta + m\Gamma j\omega = 0.$$

En prenant successivement les parties réelle et imaginaire de l'expression précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \beta &= m\omega^2 + \alpha [\cos(ka) - 1] \\ \Gamma &= \frac{\alpha}{m\omega} \sin(ka). \end{aligned}$$

Par ailleurs, la relation de dispersion est toujours valable, d'où

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= m\omega^2/2 \\ \Gamma &= \frac{\alpha}{m\omega} \sin(ka) \end{aligned}}$$

Complément : l'équation à laquelle obéit le déplacement de la particule n est une équation de propagation d'ondes dans un cas discret :

$$m\ddot{x}_n + \alpha(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) = 0.$$

On peut retrouver une équation d'onde « classique » en prenant la limite des très grandes longueurs d'onde $\lambda \gg a$. Dans cette limite, x_n varie peu d'une particule à l'autre et peut être assimilé à une variable continue $x(z, t)$. On peut ainsi écrire, dans le cadre de cette approximation, appelée approximation des milieux continus :

$$x_{n+1} = x(na + a, t) = \underbrace{x(na, t)}_{x_n} + a \frac{\partial x}{\partial z}(na, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(na, t) + \mathcal{O}(a^3).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{a} &\simeq \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{a^2} &\simeq \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0$$

où $c = a\omega_0$ est homogène à une vitesse. La solution de l'équation précédente s'écrit :

$$x(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct).$$

Cela signifie que dans la limite du continu, les ondes se propagent à la vitesse $c = a\omega_0$. On retrouve là le résultat de la question 4. : pour $k \ll a$, $v_\varphi = a\omega_0 = v_g$.

6.2.5 Résistance d'un pilier en compression

Université Paris VI

Durée 1 h

Cet exercice traite le cas d'un solide déformable. Il nécessite quelques connaissances d'élasticité (Loi de Hooke, notion de contrainte, coefficient de sécurité).

1. Définir une liaison glissière entre deux solides rigides (S_1) et (S_2). Lorsque la liaison est sans frottement, que peut-on dire de la résultante du torseur des efforts exercés par (S_1) sur (S_2)? Justifier votre réponse.
2. On considère un pilier cylindrique en béton, de masse volumique ρ et de rayon a , soumis à une charge verticale descendante d'intensité Q appliquée au centre d'inertie de la section droite supérieure et à son propre poids, de sorte qu'il est en compression (voir la figure 6.10).

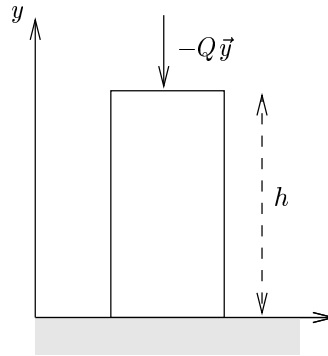


FIG. 6.10 - Schéma du pilier en traction-compression

EXERCICES

- a) Donner l'équation d'équilibre du pilier, ainsi que la condition à la limite en $y = h$. Déterminer la charge maximale que peut supporter le pilier sans sortir de son domaine d'élasticité.
On adoptera un coefficient de sécurité α .
On désigne par σ_u la limite d'élasticité en compression simple du béton.
Application Numérique : $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, $a = 50 \text{ cm}$, $h = 5 \text{ m}$, $\sigma_u = 28 \text{ N/mm}^2$, $\alpha = 4$.
Est-il raisonnable de négliger le poids?
- b) Pour cette charge maximale, calculer le raccourcissement du pilier en supposant le comportement du matériau constitutif élastique.
Application Numérique : $E = 2 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$.

Solution

1. Une liaison glissière d'axe (O, \vec{x}) entre deux solides (S_1) et (S_2) autorise, à l'exclusion de tous autres, les mouvements de translation parallèles à (O, \vec{x}) entre (S_1) et (S_2) ; c'est une liaison à un seul degré de liberté.

En l'absence de frottements, la résultante du torseur des efforts est normale au plan de contact.

2.a) On considère une tranche de pilier comprise entre les altitudes y et $y + dy$. Cette tranche est soumise d'une part à son poids :

$$\vec{P} = -\rho g S dy \vec{y},$$

et d'autre part aux actions des parties supérieures et inférieures du pilier sur ses faces, notées respectivement $\vec{R}(y + dy)$ et $\vec{R}(y)$. Comme ces deux actions se traduisent par une résultante normale aux surfaces d'application, on obtient en introduisant la tension $N(y)$ du pilier à l'altitude y :

$$\vec{R}(y) = -N(y) \vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{R}(y + dy) = N(y + dy) \vec{y}.$$

Par ailleurs,

$$N(y + dy) = N(y) + \frac{dN(y)}{dy} dy.$$

À l'équilibre, la somme de ces trois contributions doit être nulle ce qui conduit, une fois prise la limite $dy \rightarrow 0$, à :

$$\boxed{\frac{dN(y)}{dy} = \rho g S}.$$

La condition aux limites en h s'obtient en se rappelant que l'extrémité supérieure du pilier se voit appliquer une force $-Q\vec{y}$ c'est-à-dire dans les notations précédentes :

$$\vec{R}(h) - Q\vec{y} = \vec{0}.$$

Ainsi,

$$\boxed{N(h) = -Q}.$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$N(y) = \rho g S(y - h) - Q.$$

On peut remarquer que la tension $N(y)$ du pilier est partout négative, ce qui signifie que le pilier est en compression. La contrainte en un point est quant à elle définie par :

$$\sigma(y) = \frac{N(y)}{S}.$$

Afin de calculer maintenant la charge maximale que peut supporter le pilier, nous allons déterminer la contrainte maximale perçue par celui-ci. Cette

contrainte peut se définir comme la valeur maximale prise par $\sigma(y)$ en un point y du pilier

$$\begin{aligned}\Sigma_{max} &= \max_{\text{pilier}} |\sigma(y)| \\ &= \max_y \left| \frac{Q}{S} + \rho g(h - y) \right|.\end{aligned}$$

Finalement cela donne pour la contrainte maximale en un point du pilier

$$\Sigma_{max} = \rho gh + \frac{Q_{max}}{S}.$$

Pour que le pilier soit toujours dans sa zone d'élasticité à la contrainte maximale, il faut, si l'on adopte un coefficient de sécurité α , que

$$\Sigma_{max} \leq \frac{\sigma_u}{\alpha}.$$

La charge maximale admissible est donc

$$Q_{max} = \pi a^2 \left(\frac{\sigma_u}{\alpha} - \rho gh \right).$$

Application Numérique :

$$Q_{max} = 5,3 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

Le rapport du poids sur Q_{max} est 0,018: le poids est négligeable par rapport à Q_{max} .

2.b) Une fois le poids négligé, la contrainte au sein du pilier est homogène, c'est-à-dire que quelle que soit l'altitude y à laquelle on se place dans le pilier

$$\sigma(y) = -\frac{Q}{S}.$$

La loi de HOOKE reliant la déformation locale à la contrainte peut alors être utilisée pour le pilier dans son ensemble, et nous donne

$$\sigma = E \frac{\Delta h}{h}.$$

Utilisant l'expression de la contrainte σ , il vient pour le raccourcissement

$$\Delta h = -\frac{Q}{\pi a^2 E} h.$$

Application Numérique : dans le cas de la charge maximale, le raccourcissement est

$$\Delta h = -1,68 \text{ mm}.$$

6.3 Problèmes

6.3.1 Sphère creuse sur un plan incliné

Université de Caen
Durée 2 h

Documents non autorisés

Soit donné un plan incliné π faisant un angle α avec le plan horizontal. On utilisera le référentiel $(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, où $(O; \vec{x})$ est parallèle à la ligne de plus grande pente du plan π , $(O; \vec{z})$ est perpendiculaire à π et $(O; \vec{y})$ forme avec les deux axes précédents un trièdre trirectangle direct. On notera \mathcal{R}_0 ce référentiel.

Soit \mathcal{S} une sphère creuse homogène, pesante, de masse m , de rayon R , de centre C , en contact avec le plan π . On désigne par

- ξ l'abscisse du point C ,
- $\theta = ((C; \vec{Z}), \vec{CM})$ où \vec{CM} est un rayon vecteur de la sphère contenu dans le plan $(O; \vec{x}, \vec{z})$ et $(C; \vec{Z})$ est parallèle et de même sens que $(O; \vec{z})$,
- I le point de contact du plan avec la sphère.

La sphère reste en contact avec le plan π et le mouvement de C a lieu dans le plan $(O; \vec{x}, \vec{z})$. Le plan incliné est fixe et \mathcal{R}_0 est rigidement lié à ce plan.

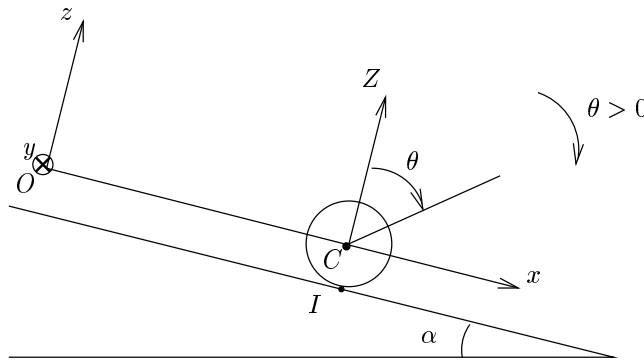


FIG. 6.11 - Schéma du dispositif.

1. Première phase du mouvement : \mathcal{S} est déposée sans vitesse initiale sur le plan π . À l'instant initial, C est en O . Le contact a lieu sans frottement.
 - a) Donner l'expression du moment d'inertie \mathcal{I} de \mathcal{S} par rapport à l'un quelconque de ses diamètres.
 - b) Écrire les équations différentielles du mouvement. Quelle est la nature du mouvement dans cette phase?

PROBLÈMES

2. Deuxième phase du mouvement : à l'instant t_0 , la sphère arrive dans une zone où le coefficient de frottement de glissement avec π ne peut plus être négligé. On désignera par

- f le coefficient de frottement de glissement entre le plan et la sphère,
- $\vec{F} = T\vec{x} + N\vec{z}$ la réaction du plan π sur \mathcal{S} .

On prendra comme nouvelle origine des temps l'instant t_0 . On notera t' les instants comptés à partir de cette nouvelle origine.

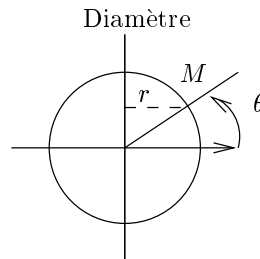
- a) Établir l'expression de $\vec{v}(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)$ en fonction de $\dot{\theta}$ et $\dot{\xi}$.
Donner le signe de T à l'instant $t' = 0$, ainsi que la relation qui lie T et N tout au long de cette seconde phase.
- b) Écrire le théorème de la résultante cinétique et le théorème du moment cinétique. En déduire les valeurs de l'accélération du point C et de l'accélération angulaire de \mathcal{S} .
- c) Quelle est la vitesse de $I \in \mathcal{S}$ à l'instant t' ?
À quelle condition (portant sur f et α) le glissement ne s'arrêtera-t-il jamais?
- d) On suppose que cette condition n'est pas satisfaite. À quel instant t'_1 le glissement cessera-t-il?
- e) Entre les instants $t' = 0$ et $t' = t'_1$, quel est le travail des forces de contact? Montrer qu'on peut l'évaluer de deux manières différentes. On désignera par ξ_1 la distance parcourue par le point C pendant la seconde phase.

Solution

1.a) Par définition du moment d'inertie, on a

$$\mathcal{I} = \int_{\Sigma} r^2 dm,$$

où r est la distance au diamètre par rapport auquel on calcule \mathcal{I} . Étant donnée la symétrie sphérique de Σ , on peut laisser de côté la dimension transverse et on se ramène à l'intégration sur des couronnes circulaires de rayon r



où chaque point M est affecté de la masse dm de l'anneau qu'il représente soit

$$\begin{aligned} dm &= m \frac{dS}{S} \\ &= \frac{m}{4\pi R^2} (2\pi r) \cdot (Rd\theta). \end{aligned}$$

Dans ces conditions, comme $r = R \cos \theta$ on obtient en reportant

$$\mathcal{I} = \frac{mR^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta$$

et finalement

$$\boxed{\mathcal{I} = \frac{2}{3} mR^2.}$$

Il y avait dans ce cas précis une technique plus astucieuse: soient D_x , D_y et D_z trois diamètres de la sphère de directions respectives \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z , ces trois vecteurs formant un trièdre direct. Les moments d'inertie de la sphère par rapport à ces axes sont

$$\mathcal{I}_x = \int_{\Sigma} (y^2 + z^2) dm \quad \text{et permutations circulaires.}$$

De plus, par symétrie, les trois diamètres sont équivalents, donc les trois moments sont égaux, et égaux au moment \mathcal{I} recherché. En les sommant, on a de ce fait

$$\begin{aligned} 3\mathcal{I} &= \int_{\Sigma} 2(x^2 + y^2 + z^2) dm \\ &= \int_{\Sigma} 2R^2 dm. \end{aligned}$$

Comme R est une constante, l'intégration des dm sur l'ensemble de la surface redonne la masse totale de la sphère, soit comme avec la précédente méthode

$$\mathcal{I} = \frac{2}{3} mR^2.$$

1.b) On applique la relation fondamentale de la dynamique (R.F.D.) à la sphère dans le repère \mathcal{R}_0 . En l'absence de frottements, cette dernière n'est soumise qu'à deux forces qui sont d'une part son poids \vec{P} , et d'autre part la réaction du sol qui est normale: $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$, $\vec{T} = \vec{0}$.

On exprime cette relation de la dynamique dans le repère $(O; \vec{x}, \vec{z})$ pour obtenir les équations différentielles du mouvement

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{\xi} = mg \sin \alpha \\ 0 = mg \cos \alpha - N \end{cases}}$$

Au vu de ce système, on peut dire que la sphère effectue au cours de cette première phase un **mouvement uniformément accéléré**. Sa position au cours du temps est donnée par la double intégration de l'équation de $\ddot{\xi}$

$$\xi = g \sin \alpha \frac{t^2}{2} + At + B.$$

Les constantes introduites lors de ce calcul se déterminent au moyen des conditions initiales du mouvement qui sont

$$\begin{cases} \xi(t=0) = 0 & (C \text{ en } O) \\ \dot{\xi}(t=0) = 0 & (\vec{v} = 0 \text{ en } O) \end{cases}$$

pour conduire à l'expression de l'abscisse du centre de gravité C de la sphère durant cette première phase

$$\boxed{\xi(t) = g \sin \alpha \frac{t^2}{2}}$$

2.a) Pour trouver la vitesse de glissement de la sphère sur le plan (c'est-à-dire comme le plan incliné est immobile dans le repère considéré, la vitesse du point I appartenant à \mathcal{S}) on utilise le torseur des vitesses de la sphère qui lie les vitesses de I et de C par la relation

$$\vec{v}(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = \vec{v}(C) + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}.$$

La vitesse du point C est donnée par $\vec{v}(C) = \dot{\xi} \vec{x}$, et le vecteur rotation instantanée, d'après la convention de signe choisie pour θ , a pour expression:

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{y}.$$

Le produit vectoriel s'effectue sans difficultés en prenant $\vec{IC} = R\vec{z}$ et conduit à

$$\boxed{\vec{v}(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = (\dot{\xi} - R\dot{\theta}) \vec{x}}$$

En l'absence de frottements, la sphère \mathcal{S} , initialement sans rotation autour de l'axe \vec{y} est toujours dans cette configuration à l'issue de la première phase du mouvement, et donc

$$\dot{\theta}(t=0) = 0.$$

Notons avant de poursuivre qu'il peut paraître troublant de voir une bille avancer sans rouler... Pourtant cela n'a rien de surprenant pour quiconque est amateur de billard, et notamment de billard français pour lequel les boules sont plus massives et donc se conforment assez bien aux lois de la mécanique sans frottements. Essayez donc de frapper une de ces boules exactement selon un diamètre horizontal, de manière à ne pas lui communiquer de rotation initiale, mais uniquement de la translation; vous devriez constater que pendant quelques secondes la boule avance sans rouler! Évidemment, les frottements

sur le tapis ne sont dans ce cas de figure jamais nuls et la boule finit toujours par tourner, mais cela permet de se convaincre de la possibilité de la chose dans le cas où les frottements deviennent faibles —une bille d'acier poli sur un plan d'acier.

Au commencement de la seconde phase du mouvement, la vitesse de glissement se réduit à

$$\vec{v}(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)(t'=0) = \dot{\xi}(t'=0) \vec{x}.$$

La vitesse de la sphère étant continue, sans quoi il faudrait faire intervenir des accélérations —donc des forces— infinies, ce qui n'a physiquement pas de sens, $\dot{\xi}$ en $t' = 0$ est égal à $\dot{\xi}$ en $t = t_0$, c'est-à-dire que la vitesse est orientée vers le bas et la sphère descend. Les lois empiriques du frottement solide nous permettent d'en déduire le sens de la réaction tangentielle, et le lien qui existe entre les modules de \vec{T} et \vec{N} .

Le frottement de glissement s'oppose au glissement ce qui implique que la valeur algébrique de la réaction tangentielle vérifie

$$T(t'=0) < 0.$$

De plus il existe un coefficient f appelé coefficient de frottement de glissement tel que les modules des deux composantes de la réaction du sol sont liés par une relation de proportionnalité

$$\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|.$$

Les lois que nous venons de donner sont phénoménologiques: elles sont posées *a posteriori* de façon à rendre compte des phénomènes observés. Elles sont aussi appelées loi du glissement de COULOMB (voir les rappels de cours).

2.b) Tout comme à la question 1., appliquons la R.F.D., avec cette fois une réaction tangentielle non nulle. Un terme additionnel apparaît dans la première équation du système

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} = mg \sin \alpha + T & (1) \\ 0 = mg \cos \alpha - N & (2) \end{cases}.$$

Pour compléter ce jeu de deux équations, on applique comme le suggère l'énoncé, le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ , passant par C , et de vecteur directeur \vec{y} . Dans ces conditions, en reprenant la notation de l'équation (5) des rappels de cours, on a la relation

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \Gamma_\Delta.$$

L'axe Δ ainsi défini étant un diamètre de la sphère, on utilise le résultat de la question 1.a) pour exprimer le membre de gauche de la précédente équation

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{I}\ddot{\theta}.$$

Le moment des forces par rapport à l'axe s'exprime quant à lui de la manière suivante (I est le point d'application de la réaction du sol et C celui du poids)

$$\begin{aligned}\Gamma_{\Delta} &= [\overrightarrow{CI} \wedge (\overrightarrow{T} + \overrightarrow{N})] \cdot \vec{y} + [\overrightarrow{CC} \wedge \overrightarrow{P}] \cdot \vec{y} \\ &= R [\vec{z} \wedge T\vec{x} + \vec{z} \wedge N\vec{z}] \cdot \vec{y} + \vec{0} \\ &= -RT.\end{aligned}$$

En recombinant les deux membres ainsi exprimés, on obtient une troisième équation

$$\boxed{I\ddot{\theta} = -RT} \quad (3)$$

En utilisant (2) ainsi que les relations phénoménologiques sur le frottement de glissement, il vient

$$T = -mfg \cos \alpha,$$

ce qui donne une fois inséré dans les équations (1) et (3) les expressions respectives de l'accélération du point C et de l'accélération angulaire

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{3g}{2R} f \cos \alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{\ddot{\xi} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

2.c) D'après l'expression de la vitesse de glissement trouvée en 2.a), nous avons besoin de connaître non pas les accélérations, mais les vitesses à la fois angulaires et du point C . Elles s'obtiennent en intégrant les résultats de la question précédente

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{3g}{2R} f \cos \alpha t' + \dot{\theta}(t'=0) \\ \dot{\xi} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t' + \dot{\xi}(t'=0) \end{cases}$$

et nous permettent une fois reportées dans la formule de la vitesse de glissement d'obtenir

$$\boxed{\vec{v}(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)(t') = \vec{v}(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)(0) + gt'(\sin \alpha - \frac{5}{2}f \cos \alpha)\vec{x}}.$$

Les considérations précédentes nous ont donné pour valeur de la vitesse de glissement au commencement de la deuxième phase du mouvement

$$\vec{v}(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)(t'=0) = \dot{\xi}(t'=0) > 0.$$

De ce fait, si le second terme de l'expression de la vitesse de glissement est également positif, cette dernière ne s'annulera jamais —elle s'annulera dans le cas contraire grâce au facteur t' qui peut devenir infiniment grand. Cette condition de signe s'écrit

$$\sin \alpha - \frac{5}{2}f \cos \alpha > 0$$

soit pour le coefficient de frottement de glissement f :

$$f < \frac{2}{5} \tan \alpha .$$

2.d) On se place dans le cas où le glissement va s'annuler au bout d'un temps fini t'_1 . Cette condition s'exprime en utilisant la question précédente

$$v(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)(t'_1) = 0 \Leftrightarrow gt'_1(\sin \alpha - \frac{5}{2}f \cos \alpha) = -v(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)(t'=0).$$

De l'expression trouvée en 1.b) pour la position du centre C de la sphère, on déduit par simple dérivation temporelle

$$\begin{aligned} v(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)(t'=0) &= \dot{\xi}(t'=0) \\ &= \dot{\xi}(t=t_0) \\ &= g \sin \alpha t_0, \end{aligned}$$

d'où pour t'_1

$$t'_1 = \frac{1}{\frac{5f}{2 \tan \alpha} - 1} t_0 .$$

On peut remarquer à titre de vérification, qu'avec la condition prise sur f et α , ce temps t'_1 est positif, c'est-à-dire que l'annulation de la vitesse de glissement a effectivement lieu.

2.e) Pour calculer le travail des forces de frottement entre les instants $t' = 0$ et $t' = t'_1$, utilisons tout d'abord la méthode la plus générale à savoir le théorème de l'énergie cinétique. Celui-ci nous donne

$$\frac{dE_{\text{cin.}}}{dt} = P_{\text{forces ext. et int.}}$$

Les forces en présence étant le poids de la sphère, qui dérive d'une énergie potentielle, et la réaction tangentielle du sol —la composante normale, partout normale au déplacement, ne travaille pas— cette expression se transforme en

$$\frac{dE_{\text{cin.}}}{dt} = -\frac{dE_{\text{pot.}}}{dt} + P_T,$$

où P_T désigne la puissance des forces de contact. L'énergie potentielle de pesanteur a pour expression

$$E_{\text{pot.}} = -mg \xi \sin \alpha + C^{\text{te}} .$$

Finalement le théorème de l'énergie cinétique prend pour forme

$$\frac{dE_{\text{cin.}}}{dt} = mg \sin \alpha \dot{\xi} + P_T.$$

Exprimons par ailleurs l'énergie cinétique du solide au moyen du théorème de KENIG qui stipule que

$$E_{\text{cin.}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = E_{\text{cin.}}(C/\mathcal{R}_0) + E_{\text{cin.}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}_C),$$

où \mathcal{R}_c est le référentiel du centre de masse. Autrement dit, l'énergie cinétique totale du solide se décompose en une énergie liée à la translation (premier terme), et une énergie liée à la rotation propre (deuxième terme).

Ainsi décomposée, l'énergie cinétique s'écrit

$$E_{\text{cin.}}(\mathcal{S}/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\theta}^2$$

soit, après dérivation et substitution de \mathcal{I} :

$$\frac{dE_{\text{cin.}}}{dt} = \frac{2}{3}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + m\dot{\xi}\ddot{\xi}.$$

De plus, la question 2.b) nous donne pour les dérivées secondes

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{3g}{2R}f \cos \alpha \\ \ddot{\xi} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \end{cases}$$

qui en reportant conduisent à

$$P_T = -fmg \cos \alpha (\dot{\xi} - R\dot{\theta}).$$

Pour le travail de la force, il ne reste plus qu'à intégrer en utilisant pour $\dot{\xi}$ et $\dot{\theta}$ les expressions temporelles trouvées au début de 2.c)

$$W_T = -fmg \cos \alpha \int_0^{t'_1} \dot{\xi}(0) + \left(\sin \alpha - \frac{5}{2}f \cos \alpha \right) g t dt$$

soit en fonction du temps t'_1

$$\boxed{W_T = -fmg \cos \alpha \left[\dot{\xi}(0)t'_1 + \left(\sin \alpha - \frac{5}{2}f \cos \alpha \right) g \frac{t'^2_1}{2} \right]}.$$

La deuxième méthode quant à elle consiste à calculer directement le travail de la force au moyen de l'expression littérale de celle-ci, obtenue à la question 2.b). En effet, le travail associé à un déplacement élémentaire s'écrit

$$\delta W_T = \vec{T} \cdot \vec{dl}.$$

Le point délicat à ce niveau, est la façon dont s'exprime le déplacement élémentaire: il s'agit d'une distance sur laquelle la sphère a glissé ce qui comprend à la fois une distance suivant ξ , mais aussi une distance due à la rotation —si la sphère tournait sur place, les forces de frottement travailleraient sans que pour autant l'abscisse ξ varie. L'expression du travail est alors

$$\delta W_T = \vec{T} \cdot \vec{v}(I, \mathcal{S}/\mathcal{R}_0)(t') dt',$$

soit

$$P_T = -fmg \cos \alpha (\dot{\xi} - R\dot{\theta}),$$

expression identique à celle obtenue avec la méthode précédente.

6.3.2 Introduction à l'effet gyroscopique

Université Paris VI
Durée 2 h

Aucun document n'est autorisé.

A. Cinématique :

Un solide indéformable (S) est constitué :

- d'un disque homogène (D), de masse m , de rayon R , de centre B
- d'une tige AB de longueur l (avec $l > R$), de masse négligeable. On pose $\overrightarrow{BA} = l\vec{z}$ et le repère orthonormé direct $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à (S) (cf. figure 6.12.A).

Par rapport au repère galiléen $R_g (O, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$, avec $\overrightarrow{Oz_o}$ vertical ascendant, le solide (S) est en mouvement de façon que :

- le point A soit fixe, avec $\overrightarrow{OA} = R\vec{z}_o$;
- le disque (D) soit en contact ponctuel en I avec une plaque (P) en mouvement, dans le plan (x_oOy_o) , de rotation autour de $\overrightarrow{Oz_o}$, à la vitesse angulaire $\omega(t)$, fonction donnée du temps t (cf. figure 6.12.B).

On désigne par $(B, \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ le repère lié au solide (S) déduit du repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par la translation $-l\vec{z}$. On choisit la ligne des nœuds des angles d'EULER du mouvement de (S) autour de son centre d'inertie B , de façon que l'angle de nutation $\theta = (\vec{z}_o, \vec{z})$ soit égal à $\pi/2$ (cf. figure 6.12.C). L'angle de précession est $\psi = (\vec{x}_o, \vec{u})$ et l'angle de rotation propre est $\varphi = (\vec{u}, \vec{x}')$ où

$$\vec{u} = \vec{z}_o \wedge \vec{z}.$$

1. Déterminer le vecteur-vitesse de rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}$ de (S) dans le mouvement par rapport au repère R_g , par ses composantes sur la base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{z}_o, \vec{z})$. En déduire que le vecteur-vitesse de I appartenant à (S) est :

$$\vec{v}_S(I) = (R\dot{\varphi} - l\dot{\psi})\vec{u}.$$

2. Déterminer, par ses composantes sur la base $(\vec{u}, \vec{z}_o, \vec{z})$, le vecteur-vitesse de rotation instantanée de (P) dans le mouvement par rapport au repère R_g . En déduire le vecteur-vitesse de I appartenant à (P).
3. Déterminer, par ses composantes sur la base $(\vec{u}, \vec{z}_o, \vec{z})$, le vecteur de glissement de (S) par rapport à (P).

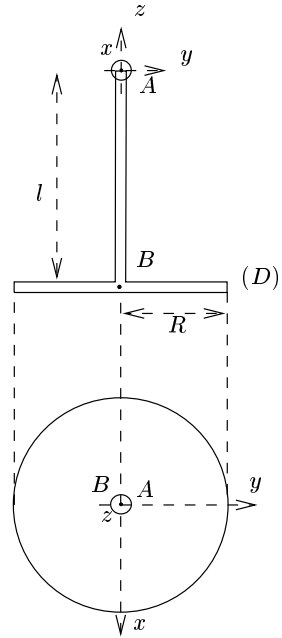


FIGURE A

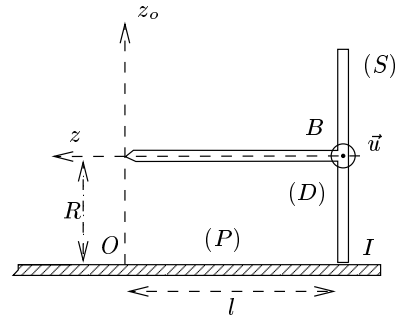


FIGURE C

PROBLÈMES

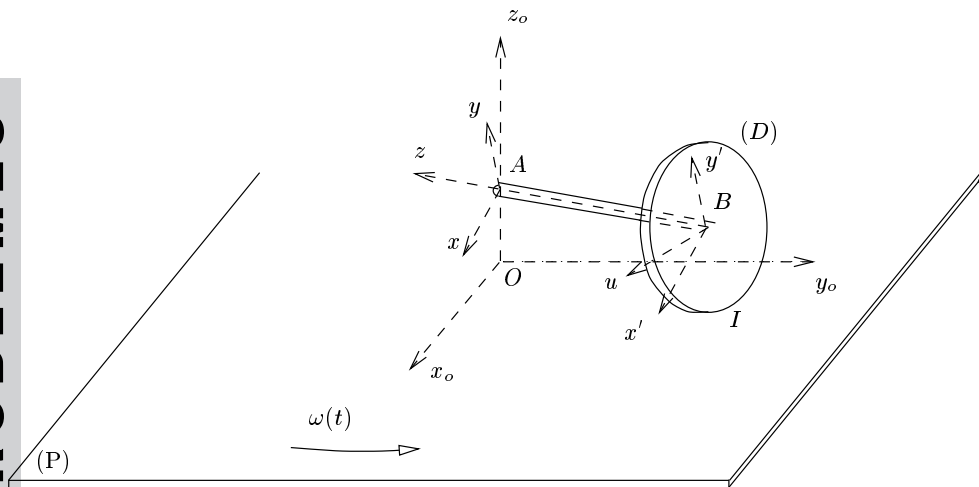


FIGURE B

FIG. 6.12 - Description du gyroscope

B. Cinétique :

Dans le mouvement par rapport au repère galiléen, déterminer, par leurs composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{z}_o, \vec{z})$, successivement:

1. les éléments de réduction en B du torseur cinétique de (S) en fonction des données, des angles d'EULER et de leurs dérivées par rapport au temps; N.B. On utilisera les notations a et c pour les constantes définies par:

$$a = mR^2/4 + ml^2 \quad , \quad c = mR^2/2.$$

2. les éléments de réduction en A du torseur cinétique de (S) en fonction des mêmes éléments;
3. les éléments de réduction en A du torseur dynamique de (S) .

C. Dynamique :

Les seules forces *données*, extérieures à (S) , sont la pesanteur, d'accélération $\vec{g} = -g\vec{z}_o$ ($g > 0$). La liaison en A est sphérique et parfaite (liaison rotule). La liaison en I entre (P) et (S) est ponctuelle, de résultante:

$$\vec{\mathcal{R}} = T\vec{u} + N\vec{z}_o.$$

1. Établir, à partir du théorème du moment dynamique en A appliqué à (S) , trois équations différentielles du mouvement de (S) , ne comportant que les données, les angles d'EULER et leurs dérivées par rapport au temps et les composantes de $\vec{\mathcal{R}}$.

On suppose que le mouvement a lieu, dorénavant, sans glissement.

2. Dédire de la relation de non-glissement en I une relation entre $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ et ω .
3. Trouver alors l'expression de $\ddot{\psi}$, de $\ddot{\varphi}$ et de T en fonction de $d\omega/dt$.
4. Les conditions initiales (à $t = 0$) du mouvement sont telles que $\omega(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = 0$. Calculer $\dot{\varphi}(t)$ et $\dot{\psi}(t)$ en fonction de $\omega(t)$.
5. Déterminer N en fonction de $\omega(t)$. On suppose que $\omega(t)$ est une fonction croissante du temps pour $t > 0$. Montrer qu'il existe une valeur ω^* de $\omega(t)$ pour laquelle N s'annule et calculer ω^* . Expliquer intuitivement ce qui se passe lorsque $\omega(t) > \omega^*$.

PROBLÈMES

Solution

A.1. On travaille dans le repère galiléen R_g . En décomposant le mouvement de (S) sur la base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{z}_o, \vec{z})$, il apparaît que:

$$\vec{\Omega}_{(S/R_g)} = \dot{\psi}\vec{z}_o + \dot{\varphi}\vec{z}.$$

En appliquant la relation cinématique liant la vitesse du solide (S) au point I et au point A :

$$\vec{v}_S(I, R_g) = \vec{v}_S(A, R_g) + \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R_g)},$$

on obtient l'expression :

$$\vec{v}_S(I, R_g) = (R\dot{\varphi} - l\dot{\psi}) \vec{u}$$

car la vitesse du point A est nulle dans le référentiel galiléen R_g .

A.2. La même démarche et des notations analogues à celles utilisées précédemment conduisent à :

$$\vec{\Omega}_{(P)/(R_g)} = \omega \vec{z}_o.$$

En appliquant la relation cinématique liant la vitesse du solide de la plaque (P) au point I et au point O (qui est immobile dans le référentiel R_g), il vient :

$$\vec{v}_P(I, R_g) = -l\omega \vec{u}.$$

A.3. La vitesse de glissement de (S) par rapport à (P) est définie par la relation :

$$\vec{v}_{g(S/P)} = \vec{v}_S(I, R_g) - \vec{v}_P(I, R_g).$$

En reportant les résultats des deux questions précédentes, elle se met sous la forme :

$$\vec{v}_{g(S/P)} = [R\dot{\varphi} - l(\dot{\psi} - \omega)] \vec{u}.$$

PROBLÈMES

B.1. Par définition, les éléments de réduction du torseur cinétique de (S) dans le référentiel R_g sont le moment cinétique de (S) en un point N , $\vec{L}_S(N, R_g)$ et la résultante cinétique de (S) $\vec{p}_S(R_g) = M\vec{v}_S(G, R_g)$, où M est la masse de (S) et G son barycentre. Par rapport au point B , le moment cinétique s'exprime, grâce au théorème de KÆNIG, sous la forme :

$$\vec{L}_S(B, R_g) = \vec{L}_S(B, R^*) + \vec{BG} \wedge M\vec{v}_S(G, R_g),$$

où R^* est le référentiel barycentrique lié au solide (S). Or, la barre AB est supposée sans masse. G est donc confondu avec le point B , barycentre du disque (D), $M = m$ et les grandeurs cinétiques ne se rattachent plus qu'au disque (D).

Dans R^* , de repère associé $(B, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$, le mouvement est composé d'une rotation autour de l'axe $\Delta = (B, \vec{z})$ à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}\vec{z}$ et d'une rotation autour de l'axe $\Delta' = (O, \vec{z}_o)$ à la vitesse angulaire $\dot{\psi}\vec{z}_o$. Les deux axes Δ et Δ' étant fixes, on a la relation :

$$\vec{L}_S(B, R_g) = \vec{L}_S(B, R^*) = I_\Delta \dot{\varphi} \vec{z} + I_{\Delta'} \dot{\psi} \vec{z}_o$$

où I_{Δ} et $I_{\Delta'}$ sont les moments d'inertie du solide (S) respectivement par rapport aux axes Δ et Δ' .

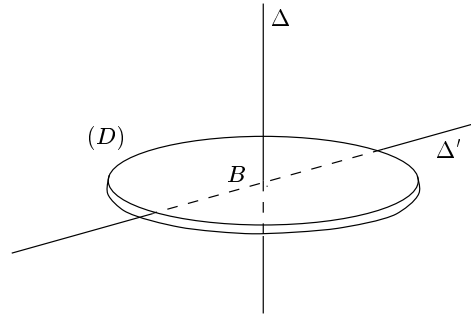


FIG. 6.13 - Les deux axes d'inertie Δ et Δ' du solide (S).

L'axe Δ passant par le centre B du disque (D) étant perpendiculaire à (D), on a $I_{\Delta} = mR^2/2 = c$.

Pour le calcul de $I_{\Delta'}$, on peut utiliser la relation $2I_{\Delta'} = I_{\Delta}$ (à démontrer, par exemple en s'inspirant de la question 1.a) du problème 6.3.1). Cette relation est valable en négligeant l'épaisseur du disque (D) devant son rayon, et conduit à $I_{\Delta'} = c/2$.

En regroupant les différents termes, il vient :

$$\vec{L}_S(B, R_g) = c \left(\dot{\varphi} \vec{z} + \frac{1}{2} \dot{\psi} \vec{z}'_o \right).$$

La résultante cinétique se calcule quant à elle en utilisant la relation cinématique entre le point $G = B$ et le point I du solide (S) :

$$\vec{p}_S(R_g) = m\vec{v}_S(B, R_g) = m \left[\vec{v}_S(I, R_g) + \vec{BI} \wedge \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \right],$$

ce qui donne :

$$\vec{p}_S(R_g) = -ml\dot{\psi}\vec{u}.$$

Les éléments de réduction du torseur cinétique de (S) au point B sont donc :

$$\boxed{\vec{L}_S(B, R_g) = c \left(\dot{\varphi} \vec{z} + \frac{1}{2} \dot{\psi} \vec{z}'_o \right) \quad \text{et} \quad \vec{p}_S(R_g) = -ml\dot{\psi}\vec{u}.}$$

Remarque : si l'on n'utilise pas le théorème de KœNIG, un calcul direct donne

$$\vec{L}_S(B, R_g) = \int_{M \in D} \vec{BM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \vec{BM} \right) dm$$

puisque la barre AB est sans masse. Par ailleurs,

$$\vec{BM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(S/R_g)} \wedge \vec{BM} \right) = BM^2 \vec{\Omega}_{(S/R_g)} - \left(\vec{BM} \cdot \vec{\Omega}_{(S/R_g)} \right) \vec{BM},$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_S(B, R_g) &= c \vec{\Omega}_{(S/R_g)} + \dot{\psi} \int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \rho^2 \left(\cos \varphi \sin \varphi \vec{u} \right. \\
 &\quad \left. - \sin^2 \varphi \vec{z}_o \right) \frac{m}{\pi R^2} \rho d\rho d\varphi \\
 &= c \vec{\Omega}_{(S/R_g)} - \dot{\psi} \int_{\rho=0}^{\rho=R} \frac{m}{R^2} \rho^3 d\rho \vec{z}_o \\
 &= c \left[\vec{\Omega}_{(S/R_g)} - \frac{1}{2} \vec{z}_o \dot{\psi} \right] \\
 &= c \left(\dot{\varphi} \vec{z} + \frac{1}{2} \dot{\psi} \vec{z}_o \right).
 \end{aligned}$$

B.2. Les éléments de réduction du torseur cinétique au point A sont par définition :

- $\vec{L}_S(A, R_g) = \vec{L}_S(B, R_g) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}_S(R_g)$
- $\vec{p}_S(R_g)$.

On arrive, en utilisant le résultat de la question précédente, à l'expression des éléments de réduction du torseur cinétique au point A :

$$\boxed{\vec{L}_S(A, R_g) = c\dot{\varphi}\vec{z} + a\dot{\psi}\vec{z}_o \quad \text{et} \quad \vec{p}_S(R_g) = -ml\dot{\psi}\vec{u}}$$

B.3. Par définition, les éléments de réduction au point A du torseur dynamique de (S) sont le moment dynamique de (S) $\vec{D}_S(A, R_g)$ et la résultante dynamique de (S) $M\vec{a}_S(G, R_g)$ où $\vec{a}_S(G, R_g)$ est l'accélération au point G du solide (S) dans R_g .

Le point A étant fixe dans le référentiel galiléen, on a :

$$\vec{D}_S(A, R_g) = \left(\frac{d\vec{L}_S(A, R_g)}{dt} \right)_{(R_g)}$$

Avec cette dernière relation, on déduit les éléments de réduction du torseur dynamique au point A :

$$\boxed{\vec{D}_S(A, R_g) = c \left[\ddot{\varphi} \vec{z} + \dot{\varphi} \dot{\psi} \vec{u} \right] + a \ddot{\psi} \vec{z}_o \quad , \quad m\vec{a}_S(G, R_g) = ml \left[(\dot{\psi})^2 \vec{z} - \ddot{\psi} \vec{u} \right]}$$

car les vecteurs \vec{u} et \vec{z} sont des vecteurs tournants autour de l'axe (Oz_o) , ce qui impose les relations

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\psi} \vec{z}_o \wedge \vec{u} = -\dot{\psi} \vec{z} \\ \frac{d\vec{z}}{dt} = \dot{\psi} \vec{z}_o \wedge \vec{z} = \dot{\psi} \vec{u}. \end{cases}$$

C.1. L'application du théorème du moment dynamique au point A , au solide (S) dans le référentiel galiléen donne :

$$\vec{D}_S(A, R_g) = \vec{M}(A, ext) = \vec{M}[A, poids] + \vec{M}[A, (S) - A] + \vec{M}[A, (S) - (P)]$$

où

- $\vec{M}[A, poids]$ est le moment en A du poids
- $\vec{M}[A, (S) - A]$ est le moment en A des efforts de contact de la liaison au point A
- $\vec{M}[A, (S) - (P)]$ est le moment en A des efforts de contact en I entre la plaque (P) et le solide (S) .

La liaison en A est supposée parfaite: il y a possibilité de pivotement en A sans frottements de pivotement et de roulement en A sans frottements de roulement, ce qui implique $\vec{M}[A, (S) - A] = \vec{0}$.

De même, au point de contact I entre (P) et (S) , la liaison est supposée ponctuelle: le roulement s'effectue sans frottements de roulement. On en déduit $\vec{M}[I, (S) - (P)] = \vec{0}$. D'où :

$$\begin{aligned} \vec{M}[A, (S) - (P)] &= \vec{M}[I, (S) - (P)] + \vec{AI} \wedge \vec{R} \\ &= l(N \vec{u} - T \vec{z}_0) + RT \vec{z}. \end{aligned}$$

De même, la tige AB étant sans masse,

$$\begin{aligned} \vec{M}[A, poids] &= \underbrace{\vec{M}[B, poids]}_{= \vec{0} \text{ car } B=G} - mgl \vec{u}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi les trois équations différentielles du mouvement de (S) :

$c\dot{\varphi} \dot{\psi} = -mgl + lN$	(1)
$a\ddot{\psi} = -lT$	(2)
$c\ddot{\varphi} = RT$	(3)

C.2. L'hypothèse de mouvement sans glissement conduit à $\vec{v}_{g(S/P)} = \vec{0}$. D'après la question A.3., on a alors la relation :

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{l}{R}(\dot{\psi} - \omega)} \quad (4)$$

C.3. La combinaison des équations (2) et (3) de la question C.1. fournit une relation entre $\ddot{\varphi}$ et $\ddot{\psi}$:

$$Ra \ddot{\psi} + lc \ddot{\varphi} = 0. \quad (5)$$

La combinaison des équations (4) et (5) permet d'aboutir aux relations demandées :

$$\dot{\psi} = \frac{l^2 c}{R^2 a + l^2 c} \frac{d\omega}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{\phi} = -\frac{alR}{R^2 a + l^2 c} \frac{d\omega}{dt}.$$

L'expression de T en fonction de $d\omega/dt$ s'obtient alors à partir de l'équation (3) par exemple :

$$T = -\frac{acl}{R^2 a + l^2 c} \frac{d\omega}{dt}.$$

C.4. À l'instant initial $t = 0$, toutes les vitesses angulaires sont nulles. La vitesse angulaire étant une fonction continue en $t = 0$ (sinon, cela conduirait à des accélérations et donc à des forces « infinies », ce qui n'est pas acceptable d'un point de vue physique), l'intégration des relations précédentes conduit à :

$$\dot{\phi} = -\left(\frac{alR}{R^2 a + l^2 c}\right) \omega(t) \quad \text{et} \quad \dot{\psi} = \left(\frac{l^2 c}{R^2 a + l^2 c}\right) \omega(t).$$

C.5. D'après l'équation (1), on peut déterminer l'expression de N en fonction de $\omega(t)$:

$$N = mg - aR \left(\frac{cl\omega(t)}{R^2 a + l^2 c}\right)^2.$$

Puisque $\omega(t)$ est une fonction croissante de t , positive pour tout t , il existe ω^* tel que $N = 0$ pour $\omega = \omega^*$ ($a > 0$ et $mg > 0$). L'expression précédente de N donne alors l'expression de ω^* :

$$\omega^* = \left(l + \frac{aR^2}{cl}\right) \sqrt{\frac{mg}{aR}}.$$

Pour $\omega = \omega^*$, la composante verticale de la réaction du support (P) sur le solide (S) s'annule et change de signe. Ainsi, pour $\omega > \omega^*$, le solide (S) va décoller du plateau, tout en continuant à tourner sur lui-même et autour de l'axe (Oz_o), puisque $\dot{\phi} \neq 0$ et $\dot{\psi} \neq 0$ pour tout $\omega \neq 0$. Le solide (S) va donc, pour $\omega > \omega^*$, se comporter comme une toupie : il va tourner sur lui-même et avoir un mouvement de précession autour de l'axe de (Oz_o).

PROBLÈMES

6.3.3 Mouvement d'une planche posée sur deux rouleaux ; étude d'une persienne en mécanique des fluides

Université Paris VI

Durée : 3 h

Aucun document n'est autorisé.
Les « calculettes » sont interdites.
Les deux problèmes sont indépendants.

Problème I: Mécanique du solide rigide (noté sur 10)

L'objet du problème est d'étudier le mouvement d'une planche parallélépipédique (\mathcal{P}) homogène, d'épaisseur négligeable, posée sur deux rouleaux cylindriques homogènes, identiques, (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2), reposant sur un plan (π) non horizontal.

La première partie est consacrée à une étude cinématique du système lorsque les contacts entre les rouleaux et le plan (π) d'une part, les rouleaux et la planche (\mathcal{P}) d'autre part, sont sans glissement : pour des conditions initiales bien choisies, on établira que le mouvement du système considéré ne dépend que d'une seule fonction inconnue du temps.

La deuxième partie est consacrée à l'étude dynamique du système placé dans le champ de la pesanteur : on déterminera la fonction du temps mentionnée ci-dessus et les efforts de contact.

Première Partie: Cinématique

Soit (\mathcal{R}) un repère orthonormé direct ($O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) tel que (π) soit dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}).

- On considère (Figure 6.14.A) un cylindre de révolution, homogène (\mathcal{C}) de rayon a , de centre d'inertie C , d'axe (C, \vec{X}) en contact le long d'une génératrice notée (Δ) avec le plan (π): $\vec{X} \cdot \vec{z} = 0$ et $\vec{OC} = x\vec{x} + y\vec{y} + a\vec{z}$. (\mathcal{R}_w) désigne le repère ($O, \vec{X}, \vec{w}, \vec{z}$) tel que $\vec{w} = \vec{z} \wedge \vec{X}$.

On pose :

- (\vec{x}, \vec{X}) = (\vec{y}, \vec{w}) = $\psi(t)$ mesuré autour de \vec{z} .
- ($C, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$) désigne un repère orthonormé direct lié à (\mathcal{C}).
- (\vec{w}, \vec{Y}) = (\vec{z}, \vec{Z}) = $\theta(t)$ mesuré autour de \vec{X} .

À l'instant initial, $t = 0, \psi = 0$.

- Écrire la condition de roulement sans glissement pour deux points M_1 et M_2 de (Δ). En déduire que $\vec{\Omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R})$ est colinéaire à \vec{X} : on pose $\vec{\Omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \omega(t)\vec{X}$. Démontrer que $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ et $\psi(t) \equiv 0$.
 - Établir que $\vec{v}(C/\mathcal{R}, t) = -a\omega\vec{y}$ (on désigne par K le point tel que $\vec{CK} = -a\vec{z}$). En déduire $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ en fonction de $\omega(t)$ et des données.
- On considère deux rouleaux cylindriques (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) identiques au cylindre (\mathcal{C}) de la question précédente, en contact sans glissement avec (π). On pose $\vec{OC}_i = x_i\vec{x} + y_i\vec{y} + a\vec{z}$ ($i = 1, 2$).

À l'instant initial, $t = 0, \vec{OC}_1 = -l/2\vec{y} + a\vec{z}, \vec{OC}_2 = l/2\vec{y} + a\vec{z}$ (l constante strictement positive donnée) et les axes des cylindres sont parallèles à \vec{x} (Figure 6.14.B).

Montrer que :
$$\begin{cases} \vec{\Omega}(\mathcal{C}_i/\mathcal{R}, t) = \omega_i(t)\vec{x} \\ x_i(t) \equiv 0 \\ \dot{y}_i = -a\omega_i \end{cases} \text{ pour } i = 1, 2$$

PROBLÈMES

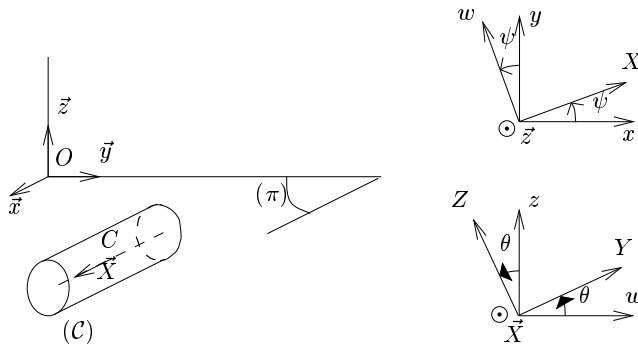


Figure A

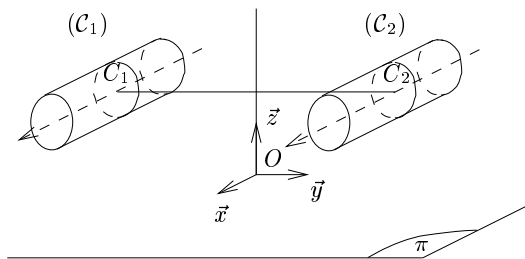


Figure B à $t = 0$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OC_1} = -l/2\vec{y} + a\vec{z} \\ \overrightarrow{OC_2} = l/2\vec{y} + a\vec{z} \end{cases}$$

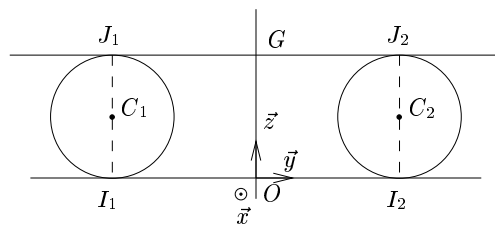


Figure C à $t = 0$

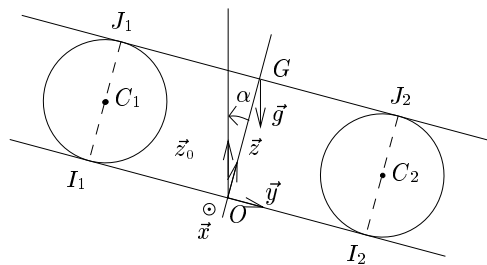


Figure D à $t = 0$

PROBLÈMES

FIG. 6.14 - Définition des différents systèmes étudiés

3. Soit (\mathcal{P}) une planche parallélépipédique homogène, d'épaisseur négligeable, de longueur $2l$, de centre d'inertie G , en contact sans glissement avec les rouleaux introduits en 2.. On note J_1 et J_2 les points géométriques tels que $\overrightarrow{C_1 J_1} = \overrightarrow{C_2 J_2} = a\vec{z}$ et I_1 et I_2 , les points géométriques tels que $\overrightarrow{C_1 I_1} = \overrightarrow{C_2 I_2} = -a\vec{z}$.

Soit $\mathcal{R}^*(G, \vec{X}^*, \vec{Y}^*, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à \mathcal{P} .

On pose :

- $(\vec{x}, \vec{X}^*) = (\vec{y}, \vec{Y}^*) = \psi^*(t)$ mesuré autour de \vec{z} .
- $\overrightarrow{OG} = \lambda(t)\vec{x} + \mu(t)\vec{y} + 2a\vec{z}$

À l'instant initial, $t = 0$, $\overrightarrow{OG} = 2a\vec{z}$, $\psi^* = 0$ (Figure 6.14.C) et les données du 2. sont valables.

- a) Montrer que le roulement sans glissement entre (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}_1) d'une part, entre (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}_2) d'autre part impose : $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{P}/\mathcal{R}) = \vec{0}$ (on pourra utiliser les résultats des questions précédentes pour établir ce résultat).
- b) Calculer $\vec{v}(J_i \in \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_i/\mathcal{P}, t)$ ($i = 1, 2$).
En déduire : $\begin{cases} \dot{\mu}(t) = -2a\omega_i(t) \\ \lambda(t) \equiv 0 \end{cases}$
- c) Montrer que $\begin{cases} y_1(t) = \mu(t)/2 - l/2 \\ y_2(t) = \mu(t)/2 + l/2 \end{cases}$
- d) Montrer $\overrightarrow{J_1 G} = (l/2 + \mu/2)\vec{y}$ et $\overrightarrow{J_2 G} = (-l/2 + \mu/2)\vec{y}$. Quelle conclusion vous inspirent les résultats obtenus?

Deuxième Partie : Dynamique

Dans cette partie, les cylindres (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) de même masse m et la planche (\mathcal{P}) de masse M sont pesants. Soit \vec{z}_0 le vecteur unitaire de la verticale ascendante : $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ est l'accélération de la pesanteur. Le plan (π) est un plan incliné, on pose : $\vec{z}_0 = -\sin\alpha\vec{y} + \cos\alpha\vec{z}$ ($0 < \alpha < \pi/2$; $\alpha = \text{constante}$). Le repère (\mathcal{R}) déjà introduit est supposé galiléen.

À l'instant initial, (Figure 6.14.D) les données en position sont celles de la partie cinématique et toutes les vitesses initiales sont nulles.

On schématise les efforts de contact de (π) sur (\mathcal{C}_i) par un glisseur (\mathcal{G}_i) de moment nul en I_i , de résultante $\overrightarrow{R}_i = X_i\vec{x} + Y_i\vec{y} + N_i\vec{z}$ ($i = 1, 2$).

On schématise les efforts de contact de (\mathcal{P}) sur (\mathcal{C}_i) par un glisseur (\mathcal{G}_i^*) de moment nul en J_i , de résultante $\overrightarrow{R}_i^* = X_i^*\vec{x} + Y_i^*\vec{y} + N_i^*\vec{z}$ ($i = 1, 2$).

- 1a) Appliquer le théorème de la résultante dynamique à (\mathcal{P}) et en déduire 3 équations scalaires (en projetant sur \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}). On notera (E) l'équation contenant $\ddot{\mu}$.
- b) Appliquer le théorème du moment cinétique en G à (\mathcal{P}) .
- c) En combinant les résultats précédents, calculer X_i^* , N_i^* en fonction de μ et des données.

PROBLÈMES

2. Appliquer le théorème de la résultante dynamique à (C_i) et en déduire N_i, X_i en fonction des données et une équation contenant $\ddot{\mu}$ notée (E_i) .
3. Appliquer le théorème du moment cinétique à (C_i) en C_i et en déduire une équation contenant $\ddot{\mu}$ notée (F_i) .
4. En combinant les équations $(E), (E_1), (E_2), (F_1), (F_2)$ calculer $\ddot{\mu}$ en fonction des données et en déduire μ en fonction du temps.
5. Achever la détermination des efforts de contact introduits.
6. Aurait-on pu obtenir plus rapidement le résultat du 4.?

Nota Bene On rappelle que le moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène, de rayon a , de masse m , par rapport à son axe de révolution est $I = ma^2/2$.

Problème II : Mécanique des fluides (noté sur 10)

On considère une « persienne » constituée d'un grand nombre de plaques planes \mathcal{P}_n , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, parallèles, normales au vecteur unitaire \vec{y} , se déduisant les unes des autres par la translation \mathcal{T} de vecteur $h\vec{y}$, h étant une constante positive (Figure 6.15.A). Ces plaques ont pour largeur a et pour longueur b avec b très grand par rapport à a ($b \gg a$).

Le repère orthonormé direct $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est choisi de sorte que O soit le centre de symétrie de la plaque \mathcal{P}_0 et que le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) coupe la plaque \mathcal{P}_n selon un segment P_n (Figure 6.15.B) d'équations :

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = nh \\ -a/2 \leq x \leq a/2 \end{cases} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

On suppose qu'à travers la persienne s'écoule un fluide parfait, incompressible, de masse volumique ρ constante, dont le mouvement est plan dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) et stationnaire. Le fluide est supposé non pesant.

On suppose que très loin en amont ($x \rightarrow -\infty$) l'écoulement est uniforme de vitesse $\vec{V}_1 = U_1(\vec{x} + \tan \alpha_1 \vec{y})$, et que très loin en aval ($x \rightarrow +\infty$) l'écoulement est également uniforme de vitesse $\vec{V}_2 = U_2(\vec{x} + \tan \alpha_2 \vec{y})$. On suppose que les pressions en amont et en aval sont aussi uniformes, de valeurs respectives p_1 et p_2 .

On admet que toute grandeur attachée à l'écoulement (pression, composantes de la vitesse, ...) est une fonction de x et de y , la dépendance en y étant de période h .

On aura à considérer dans la suite un domaine plan δ_L admettant pour frontières, d'une part le profil de persienne P_0 , et d'autre part une courbe fermée γ_L constituée de deux arcs rectilignes $M'_1 M'_2$ et $M_1 M_2$, le premier étant déduit du second par la translation \mathcal{T} , et de deux segments rectilignes $M_1 M'_1$ et

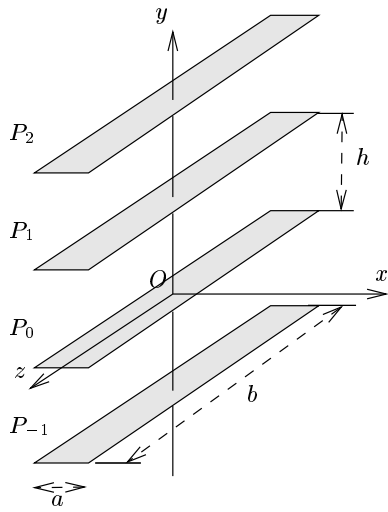


Figure A

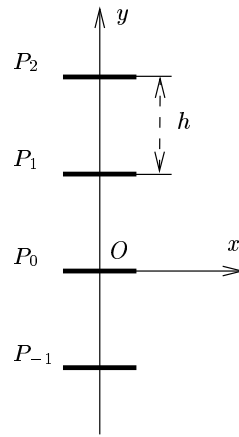


Figure B

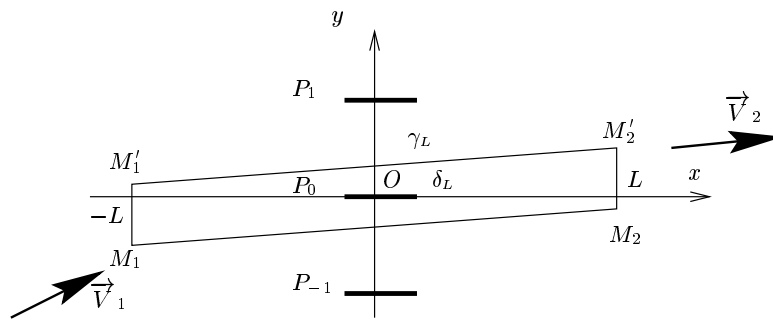


Figure C

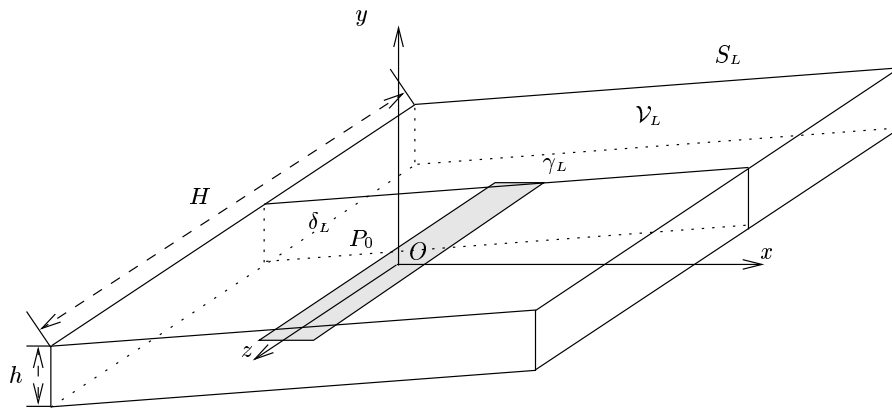


Figure D

FIG. 6.15 - Les différents éléments de la persienne

PROBLÈMES

$M_2M'_2$ d'abscisses $x_1 = -L$ et $x_2 = +L$, L étant une longueur arbitrairement grande (Figure 6.15.C).

On note \mathcal{V}_L le volume parallélépipédique cylindrique de génératrices parallèles à (O, \vec{z}) , de section droite le domaine plan δ_L et limité par les deux plans $z = -H/2$ et $z = H/2$ ($H > b$). Enfin on note S_L la surface limitant \mathcal{V}_L (Figure 6.15.D).

1. Pour l'écoulement stationnaire du fluide défini dans l'énoncé, écrire sous forme vectorielle l'équation d'EULER traduisant la loi fondamentale de la dynamique, puis *démontrer* le théorème de BERNOULLI. On admettra que pour toute quantité scalaire Q définie dans l'espace de l'écoulement, l'équation $\vec{u} \cdot \text{grad } Q = 0$ signifie que Q est constante le long des lignes de courant.

Appliquer ce théorème et en déduire une relation entre les grandeurs de l'amont, celles de l'aval et la masse volumique ρ .

2. Soit $f(x, y)$ une fonction périodique en y de période h . Vérifier que

$$\int_{M_1M_2} f(x, y) ds = \int_{M'_1M'_2} f(x', y') ds'$$

où s et s' sont respectivement les abscisses curvilignes le long de M_1M_2 et de $M'_1M'_2$.

3. Calculer le flux de masse à travers la surface S_L et montrer que $U_1 = U_2$. Dans la suite on désignera par U cette valeur commune.
4. On note $\vec{F} = F_x \vec{x} + F_y \vec{y}$ la résultante des efforts exercés par le fluide sur la partie de la persienne P_0 intérieure à \mathcal{V}_L (pour des raisons de symétrie il n'y a pas de composante F_z sur \vec{z}).

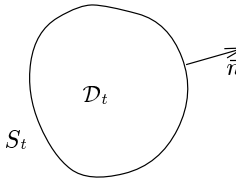
En appliquant le théorème du bilan global de quantité de mouvement (partie résultante) au fluide contenu dans \mathcal{V}_L , montrer que le calcul de \vec{F} se ramène à celui d'intégrales curvilignes sur $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$.

5. Montrer que les composantes F_x et F_y s'expriment à l'aide de h , H , U , α_1 , α_2 et naturellement de la masse volumique ρ .
6. Montrer que la force \vec{F} est orthogonale au vecteur

$$\vec{V}_m = \frac{1}{2} (\vec{V}_1 + \vec{V}_2).$$

Représenter sur une même figure les vitesses \vec{V}_1 , \vec{V}_2 , \vec{V}_m et la force \vec{F} . Quel est l'effet de la force \vec{F} ?

RAPPEL :

$$\frac{D}{DT} \int_{\mathcal{D}_t} \rho \vec{U} dv = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) dv + \int_{S_t} \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS$$


Solution

Problème I

Première Partie

1.a) Soient M_1 et M_2 deux points de (Δ) . La condition de roulement sans glissement du rouleau (\mathcal{C}) par rapport au plan (π) impose :

$$\vec{v}_g(\mathcal{C}/\pi) = \vec{0}.$$

Comme le plan (π) est immobile dans le référentiel galiléen \mathcal{R} , on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v}_C(M_1, \mathcal{R}) = \vec{0} = \vec{v}_C(M_2, \mathcal{R})}$$

où la notation $\vec{v}_S(M, \mathcal{R})$ désigne la vitesse du point M appartenant au solide \mathcal{S} dans le référentiel \mathcal{R} . On en déduit, en utilisant la relation du torseur cinématique liant les points M_1 et M_2 du rouleau :

$$\vec{0} = \vec{v}_C(M_1, \mathcal{R}) = \underbrace{\vec{v}_C(M_2, \mathcal{R})}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{M_1 M_2}}_{(M_1 M_2) \vec{X}} \wedge \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}),$$

d'où :

$$\vec{X} \wedge \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \vec{0}.$$

Par conséquent, $\boxed{\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) \text{ est colinéaire à } \vec{X}}$.

On peut poser $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \omega(t) \vec{X}$. Or, d'après les notations utilisées, on a aussi $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}) = \dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{X}$, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega(t) \\ \dot{\psi}(t) &= 0 \end{cases}$$

car $\dot{\psi} = 0$ et $\psi(t=0) = 0$ d'après les conditions initiales.

1.b) Le point C est le centre d'inertie du rouleau (\mathcal{C}) considéré. La relation du torseur cinématique, pour les points C et K du rouleau, donne :

$$\vec{v}_C(C, \mathcal{R}) = \vec{v}_C(K, \mathcal{R}) + \overrightarrow{CK} \wedge \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{C}/\mathcal{R}).$$

Or, le roulement a lieu sans glissement, ce qui signifie que $\vec{v}_C(K, \mathcal{R}) = \vec{0}$ puisque le point K appartient à la génératrice (Δ) . On peut donc écrire

$$\vec{v}_C(C, \mathcal{R}) = -a\omega(t)\vec{z} \wedge \vec{X},$$

ce qui conduit finalement à :

$$\boxed{\vec{v}_C(C, \mathcal{R}) = -a\omega(t)\vec{y}}.$$

$\vec{v}(C, \mathcal{R})$ s'exprime, en fonction des variables du problème, sous la forme :

$$\vec{v}_C(C, \mathcal{R}) = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} &= & 0 \\ \dot{y} &= & -a\omega(t) \end{cases}}.$$

2. Un raisonnement analogue à celui de la question précédente donne, pour chaque rouleau \mathcal{C}_i :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\Omega}(\mathcal{C}_i/\mathcal{R}) &= & \omega_i(t)\vec{x} \\ \dot{y}_i &= & -a\omega_i(t) \end{cases}}.$$

On a également la relation $\dot{x}_i = 0$, qui s'écrit, en vertu des conditions initiales : $\boxed{x_i = 0}$.

3.a) Supposons que le mouvement de la planche (\mathcal{P}) et des deux rouleaux (\mathcal{C}_i) s'effectue sans glissement, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\vec{v}_y(\mathcal{P}/\mathcal{C}_i) = \vec{0}.$$

En introduisant les points géométriques J_i , on peut écrire la relation précédente sous la forme :

$$\vec{v}_{\mathcal{C}_i}(J_i, \mathcal{R}) = \vec{v}_{\mathcal{P}}(J_i, \mathcal{R}).$$

La relation du torseur cinématique pour le rouleau \mathcal{C}_i donne :

$$\vec{v}_{\mathcal{P}}(J_i, \mathcal{R}) = \vec{v}_{\mathcal{C}_i}(J_i, \mathcal{R}) = \underbrace{\vec{v}_{\mathcal{C}_i}(C_i, \mathcal{R})}_{-a\omega_i\vec{y}} + \overrightarrow{J_i C_i} \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{C}_i/\mathcal{R}) = -2a\omega_i\vec{y}.$$

De même en ce qui concerne la planche (\mathcal{P})

$$\vec{v}_{\mathcal{P}}(J_1, \mathcal{R}) = \vec{v}_{\mathcal{P}}(J_2, \mathcal{R}) + \overrightarrow{J_1 J_2} \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{P}/\mathcal{R}).$$

Puisque $\vec{v}_{\mathcal{P}}(J_i, \mathcal{R})$ et $\overrightarrow{J_1 J_2}$ sont colinéaires à \vec{y} , il vient :

$$\overrightarrow{J_1 J_2} \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{P}/\mathcal{R}) = \vec{0}.$$

Par ailleurs, la planche reste en contact avec les rouleaux, ce qui astreint son vecteur rotation à être suivant \vec{z} uniquement. Par conséquent :

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{P}/\mathcal{R}) = \vec{0}}.$$

On a $\vec{v}_{\mathcal{P}}(J_1, \mathcal{R}) = \vec{v}_{\mathcal{P}}(J_2, \mathcal{R})$, ce qui permet de trouver une relation supplémentaire: $\omega_1 = \omega_2$, qui sera utilisée de façon implicite à la question suivante.

3.b) La planche (\mathcal{P}) et le rouleau (\mathcal{C}_i) sont en contact sans glissement. On a donc :

$$\begin{cases} \vec{v}_{\mathcal{C}_1}(J_1, \mathcal{P}) = \vec{0} \\ \vec{v}_{\mathcal{C}_2}(J_2, \mathcal{P}) = \vec{0} \end{cases}$$

De plus,

$$\vec{v}_{\mathcal{P}}(G, \mathcal{R}) = \vec{v}_{\mathcal{P}}(J_1, \mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{P}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{J_1G} = \vec{v}_{\mathcal{P}}(J_1, \mathcal{R}).$$

D'après les calculs effectués à la question 3.a), il s'ensuit que

$$\vec{v}_{\mathcal{P}}(G, \mathcal{R}) = -2a\omega_i\vec{y} = \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{OG} \right)_{\mathcal{R}}.$$

Compte tenu de la condition initiale $\lambda = 0$ nous en déduisons :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \dot{\mu}(t) = -2a\omega(t) \end{cases}$$

où on a posé $\omega_1(t) = \omega(t) = \omega_2(t)$.

3.c) D'après la question 2., on a $\dot{y}_i = -a\omega$. À l'aide de la question précédente, on en déduit la relation :

$$\dot{y}_1 = \frac{\dot{\mu}}{2} = \dot{y}_2.$$

Avec comme conditions initiales

$$\mu(t=0) = 0, \quad y_1(t=0) = -l/2, \quad y_2(t=0) = l/2,$$

l'intégration de ces deux équations conduit à :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\mu(t)}{2} - l/2 \\ y_2 = \frac{\mu(t)}{2} + l/2 \end{cases}$$

3.d) On peut écrire par exemple :

$$\overrightarrow{J_iG} = \overrightarrow{J_iC_i} + \overrightarrow{C_iO} + \overrightarrow{OG}$$

pour $i = 1, 2$, ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \overrightarrow{J_1G} = \left(\frac{l}{2} + \frac{\mu}{2} \right) \vec{y} \\ \overrightarrow{J_2G} = \left(-\frac{l}{2} + \frac{\mu}{2} \right) \vec{y} \end{cases}$$

On constate que $\overrightarrow{J_1J_2} = l\vec{y}$ d'où l'on conclut :

les deux rouleaux (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) restent à une distance constante l au cours du mouvement du système.

Deuxième Partie

1.a) La planche (\mathcal{P}) est soumise à son poids $M\vec{g}$ et aux efforts de contact \vec{R}_i^* avec chacun des deux rouleaux (\mathcal{C}_i). Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la planche (\mathcal{P}) dans le référentiel \mathcal{R} supposé galiléen, donne :

$$M \left(\frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = M\vec{g} - \vec{R}_1^* - \vec{R}_2^*.$$

D'après la question 3. de l'étude cinématique, on a :

$$\vec{OG} = \mu \vec{y} + 2a \vec{z}.$$

On en déduit par projection sur les axes \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , les équations :

$M\ddot{\mu} = Mg \sin \alpha - Y_1^* - Y_2^*$	(E)
$0 = X_1^* + X_2^*$	(1)
$0 = Mg \cos \alpha + N_1^* + N_2^*$	(2)

1.b) Le théorème du moment cinétique, appliqué au point G et à la planche (\mathcal{P}) dans le référentiel \mathcal{R} supposé galiléen, donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{L}_{\mathcal{P}}(G, \mathcal{R}) \right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_{poids}(G) + \vec{M}_{(-\vec{R}_1^*)}(G) + \vec{M}_{(-\vec{R}_2^*)}(G).$$

Or, $\vec{M}_{poids}(G) = \vec{0}$ puisque G est le centre d'inertie de la planche (\mathcal{P}).

Les efforts de contact de (\mathcal{P}) sur (\mathcal{C}_i) sont modélisés par un glisseur de moment nul en J_i , d'où :

$$\vec{M}_{(-\vec{R}_i^*)}(G) = \underbrace{\vec{M}_{(-\vec{R}_i^*)}(J_i)}_{=\vec{0}} + \vec{GJ}_i \wedge (-\vec{R}_i^*).$$

Le calcul du moment cinétique $\vec{L}_{\mathcal{P}}(G, \mathcal{R})$ peut être mené en utilisant le théorème de KÖENIG entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* :

$$\vec{L}_{\mathcal{P}}(G, \mathcal{R}) = \vec{L}_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}^*) + \underbrace{\vec{GG}}_{=\vec{0}} \wedge M \vec{v}_{\mathcal{P}}(G, \mathcal{R}).$$

Or, la planche (\mathcal{P}) est immobile dans le référentiel \mathcal{R}^* . On a donc :

$$\vec{L}_{\mathcal{P}}(G, \mathcal{R}) = \vec{0},$$

ce qui permet d'écrire le théorème du moment cinétique sous la forme :

$$\boxed{\vec{GJ}_1 \wedge \vec{R}_1^* + \vec{GJ}_2 \wedge \vec{R}_2^* = \vec{0}}.$$

En développant cette expression sur les axes \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , on arrive à

$$\begin{cases} (l/2 + \mu/2)N_1^* = (l/2 - \mu/2)N_2^* & (3) \\ (l/2 + \mu/2)X_1^* = (l/2 - \mu/2)X_2^* & (4) \end{cases}$$

1.c) La combinaison des équations (1) et (4) donne :

$$X_1^* = 0 = X_2^*$$

Les équations (2) et (3) permettent quant à elles d'écrire :

$$\begin{cases} N_1^* = \frac{(\mu - l)Mg \cos \alpha}{2l} \\ N_2^* = \frac{-(\mu + l)Mg \cos \alpha}{2l} \end{cases}$$

2. Chaque rouleau \mathcal{C}_i est soumis à son poids $m\vec{g}$ et aux actions de contact \vec{R}_i de la planche et \vec{R}_i du plan (π). On peut écrire, en appliquant le théorème de la résultante dynamique au rouleau (\mathcal{C}_i) dans le référentiel \mathcal{R} supposé galiléen :

$$m \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OC}_i}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{R}_i + \vec{R}_i^*$$

En projetant sur les axes \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{m}{2}\ddot{\mu} = mg \sin \alpha + Y_i + Y_i^* & (E_i) \\ m\ddot{x}_i = X_i + X_i^* \\ 0 = -mg \cos \alpha + N_i + N_i^* \end{cases}$$

En utilisant les résultats de la question précédente et de la question 2. de l'étude cinématique, on trouve finalement

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ N_1 = g \cos \alpha \left[m - M \frac{(\mu - l)}{2l} \right] \\ N_2 = g \cos \alpha \left[m + M \frac{(\mu + l)}{2l} \right] \end{cases}$$

3. Le théorème du moment cinétique appliqué au rouleau (\mathcal{C}_i) au point C_i dans le référentiel \mathcal{R} galiléen s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{L}_{C_i}(C_i, \mathcal{R}) \right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{M}_{poids}(C_i)}_{=\vec{0}} + \vec{M}_{(\vec{R}_i^*)}(C_i) + \vec{M}_{(\vec{R}_i)}(C_i).$$

car C_i est le centre d'inertie du rouleau (\mathcal{C}_i).

PROBLÈMES

Le moment cinétique $\vec{L}_{C_i}(C_i, \mathcal{R})$ peut se calculer comme à la question 1.b), en utilisant le théorème de KÖNIG et en remarquant que dans le référentiel barycentrique attaché au rouleau (C_i), le mouvement est une rotation autour de l'axe fixe $\Delta_i = (C_i, \vec{x})$ à la vitesse ω_i :

$$\vec{L}_{C_i}(C_i, \mathcal{R}) = I \vec{\omega}_i = \frac{ma^2}{2} \omega_i \vec{x}.$$

L'expression des moments des actions de contact au point C_i est obtenue comme à la question 1.b), en introduisant les points J_i et I_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ma^2}{2} \omega_i \right)_{\mathcal{R}} \vec{x} = \overrightarrow{C_i J_i} \wedge \vec{R}_i^* + \overrightarrow{C_i I_i} \wedge \vec{R}_i.$$

D'après les questions 2. et 3.c) de l'étude cinématique, on a les relations :

$$\omega_i = \frac{-\dot{y}_i}{a} = \frac{-\dot{\mu}}{2a},$$

ce qui permet, après projection sur les axes \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , d'obtenir :

$$\boxed{\frac{m}{4} \ddot{\mu} = Y_i^* - Y_i \quad (F_i)}.$$

On remarque que l'une des équations obtenues après la projection redonne la relation $X_i^* = X_i$, ces quantités étant nulles d'après la question 1.c).

4. On a désormais à notre disposition 5 équations :

$$\begin{cases} M \ddot{\mu} = Mg \sin \alpha - Y_1^* - Y_2^* & (E) \\ \frac{m \ddot{\mu}}{2} = mg \sin \alpha + Y_i + Y_i^* & (E_i) \quad i = 1, 2 \\ \frac{m \ddot{\mu}}{4} = Y_i^* - Y_i & (F_i) \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

et cinq inconnues à déterminer : $\ddot{\mu}$, Y_1 , Y_2 , Y_1^* et Y_2^* . Les combinaisons $(E_1) + (F_1)$ et $(E_2) + (F_2)$ permettent de déterminer une expression de $Y_1^* + Y_2^*$ en fonction de $\ddot{\mu}$. L'utilisation de cette expression dans l'équation (E) conduit à :

$$\boxed{\ddot{\mu} = \frac{4(M+m)}{4M+3m} g \sin \alpha}.$$

Puisqu'à $t = 0$, $\dot{\mu} = 0$ et $\mu = 0$, on obtient par intégration :

$$\boxed{\mu = \frac{2(M+m)}{4M+3m} (g \sin \alpha) t^2}.$$

5. La détermination complète des efforts de contact s'effectue en remplaçant $\ddot{\mu}$ par son expression dans les différentes équations de la question 4.. On trouve

en définitive :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0 = X_2 \\ X_1^* = 0 = X_2^* \\ Y_1 = \frac{-mg \sin \alpha}{3m + 4M} \left(m + \frac{3M}{2} \right) = Y_2 \\ Y_1^* = \frac{-mg \sin \alpha}{2(3m + 4M)} = Y_2^* \\ N_1 = g \cos \alpha \left[m - M \frac{(\mu - l)}{2l} \right] \\ N_2 = g \cos \alpha \left[m + M \frac{(\mu + l)}{2l} \right] \\ N_1^* = \frac{(\mu - l)Mg \cos \alpha}{2l} \\ N_2^* = \frac{-(\mu + l)Mg \cos \alpha}{2l} \end{array} \right.$$

6. D'après l'étude cinématique menée dans la première partie, le problème étudié ne comporte qu'un seul degré de liberté : la seule donnée de $\mu(t)$ (défini par $\vec{OG} = \mu(t)\vec{y} + 2a\vec{z}$) suffit pour connaître le mouvement du système (\mathcal{S}), composé de la planche (\mathcal{P}) et des deux rouleaux (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2). Il est alors tentant d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel (\mathcal{R}') :

$$\frac{dEc^{(\mathcal{R}')}}{dt} = \mathcal{P}_{int}^{(\mathcal{R}')} + \mathcal{P}_{ext}^{(\mathcal{R}')} ,$$

car ce théorème est particulièrement efficace dans le cas de systèmes, même complexes, ne comportant qu'un seul degré de liberté. Cependant, il faut choisir convenablement le référentiel (\mathcal{R}') et le système auquel on applique le théorème, afin de s'affranchir du calcul des puissances des forces inconnues (ici les actions de contact).

Un premier système serait la planche (\mathcal{P}) seule dans le référentiel \mathcal{R} . On constate cependant en écrivant les différentes puissances mises en jeu qu'il est nécessaire de connaître les actions de contact \vec{R}_i entre la planche et les deux rouleaux.

On peut alors considérer le système (\mathcal{S}) défini précédemment. Les forces extérieures à (\mathcal{S}) sont le poids et les actions de contact entre les rouleaux et le plan (π). Les forces intérieures au système sont les actions de contact de la planche sur les rouleaux, et des rouleaux sur la planche, dont la puissance n'est *a priori* pas nulle. Le théorème de l'énergie cinétique, appliqué dans le référentiel galiléen \mathcal{R} à (\mathcal{S}) a pour expression :

$$\begin{aligned} \frac{dEc^{(\mathcal{R})}}{dt} &= \mathcal{P}_{int}^{(\mathcal{R})} + \mathcal{P}_{ext}^{(\mathcal{R})} \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{C}_1}^{(\mathcal{R})} + \mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{C}_2}^{(\mathcal{R})} + \mathcal{P}_{\pi \rightarrow \mathcal{C}_1}^{(\mathcal{R})} + \mathcal{P}_{\pi \rightarrow \mathcal{C}_2}^{(\mathcal{R})} + \mathcal{P}_{poids}^{(\mathcal{R})} . \end{aligned}$$

Les hypothèses de contact sans glissement et de moment des efforts de contact nul au point de contact (cette dernière hypothèse étant équivalente à la possibilité de roulement sans frottement de roulement) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{C}_1}^{(\mathcal{R})} &= \underbrace{\vec{R}_1^* \cdot \vec{v}_g(\mathcal{C}_1/\mathcal{P})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_1^*(J_1) \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{C}_1/\mathcal{P})}_{\vec{0}} = \vec{0} \\ \mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{C}_2}^{(\mathcal{R})} &= \underbrace{\vec{R}_2^* \cdot \vec{v}_g(\mathcal{C}_2/\mathcal{P})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_2^*(J_2) \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{C}_2/\mathcal{P})}_{\vec{0}} = \vec{0} \\ \mathcal{P}_{\pi \rightarrow \mathcal{C}_1}^{(\mathcal{R})} &= \underbrace{\vec{R}_1 \cdot \vec{v}_{\mathcal{C}_1}(I_1, \mathcal{R})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_1(I_1) \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{C}_1/\mathcal{R})}_{\vec{0}} = \vec{0} \\ \mathcal{P}_{\pi \rightarrow \mathcal{C}_2}^{(\mathcal{R})} &= \underbrace{\vec{R}_2 \cdot \vec{v}_{\mathcal{C}_2}(I_2, \mathcal{R})}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_2(I_2) \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{C}_2/\mathcal{R})}_{\vec{0}} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Le théorème de l'énergie cinétique se résume ainsi à :

$$\frac{dEc^{(\mathcal{R})}}{dt} = \mathcal{P}_{poids}^{(\mathcal{R})},$$

ce qui va nous permettre de retrouver de façon plus simple le résultat de la question 4.

Le calcul de l'énergie cinétique du système peut s'effectuer par :

$$Ec^{(\mathcal{R})} = \frac{1}{2}M(\dot{\mu})^2 + Ec_{\mathcal{C}_1}^{(\mathcal{R})} + Ec_{\mathcal{C}_2}^{(\mathcal{R})}.$$

En utilisant le théorème de KENIG, on obtient :

$$Ec_{\mathcal{C}_i}^{(\mathcal{R})} = \frac{1}{2}m(\dot{y}_i)^2 + Ec_{\mathcal{C}_i}^{(\mathcal{R}_i^*)}$$

où \mathcal{R}_i^* est le référentiel barycentrique attaché au rouleau (\mathcal{C}_i). Dans son référentiel barycentrique, le mouvement du rouleau (\mathcal{C}_i) est un mouvement de rotation autour de l'axe fixe $\Delta_i = (C_i, \vec{x})$ à la vitesse angulaire ω_i . On a donc :

$$Ec_{\mathcal{C}_i}^{(\mathcal{R})} = \frac{1}{2}m(\dot{y}_i)^2 + \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \frac{1}{2}(I + ma^2)\omega_i^2 = \frac{3ma^2}{4}\omega_i^2$$

d'après la relation $\dot{y}_i = -a\omega$ déduite de la partie cinématique. En utilisant de plus la relation $\dot{\mu} = -2a\omega$ provenant de la question 3.b) de la première partie, il vient :

$$Ec^{(\mathcal{R})} = \frac{4M + 3m}{8}(\dot{\mu})^2.$$

Quant à la puissance du poids, on peut la déterminer en décomposant le système en ses différents éléments :

$$\mathcal{P}_{poids}^{(\mathcal{R})} = M\vec{g} \cdot \vec{v}_{\mathcal{P}}(G, \mathcal{R}) + m\vec{g} \cdot \vec{v}_{\mathcal{C}_1}(C_1, \mathcal{R}) + m\vec{g} \cdot \vec{v}_{\mathcal{C}_2}(C_2, \mathcal{R})$$

$$= g \sin \alpha \dot{\mu} [M + m].$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire, en simplifiant membre à membre par $\dot{\mu}$ qui est non nul au cours du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\mu} = \frac{4g \sin \alpha (M + m)}{4M + 3m}.}$$

Remarque : on aurait pu également calculer l'énergie cinétique de chacun des deux rouleaux en utilisant le mouvement hélicoïdal tangent de chaque rouleau, qui est une rotation d'axe fixe (I_i, \vec{x}) et de vitesse angulaire ω_i . L'expression du moment d'inertie par rapport à cet axe peut être obtenue grâce au théorème d'HUYGENS à partir du moment d'inertie par rapport à Δ_i que l'on connaît. Cette remarque est d'ailleurs valable pour l'ensemble des calculs des éléments cinétiques des rouleaux effectués dans ce problème.

Problème II

1. Dans le cas le plus général, l'équation d'EULER s'écrit :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \overrightarrow{F}_{ext}$$

pour un fluide de masse volumique ρ soumis à des forces extérieures de résultante \overrightarrow{F}_{ext} . L'opérateur gradient est noté indifféremment $\overrightarrow{\text{grad}}$ ou $\vec{\nabla}$. Dans le cas qui nous intéresse, le fluide est supposé non pesant et n'est soumis à aucune force extérieure ; on se place de plus en régime stationnaire. L'équation d'EULER se met alors sous la forme :

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} p.$$

Le fluide considéré étant incompressible, sa densité est constante, ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p}{\rho} \right).}$$

La démonstration du théorème de BERNOULLI nécessite l'utilisation de la formule d'analyse vectorielle :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (v^2) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

qui permet d'exprimer l'équation d'EULER sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{0}.$$

Comme $\vec{v} \perp [(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}]$, nous pouvons aussi écrire :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0,$$

d'où la forme usuelle de la relation de BERNOUILLI :

$$\boxed{\frac{\rho \vec{v}^2}{2} + p = \text{constante} \quad \text{le long d'une ligne de courant.}}$$

L'application du théorème de BERNOUILLI nécessite de choisir une ligne de courant dans l'écoulement considéré. Dans le cas qui nous intéresse, on peut choisir n'importe quelle ligne de courant joignant la zone ($x \rightarrow -\infty$) en amont de la persienne à la zone ($x \rightarrow +\infty$) en aval de la persienne. Pour cette ligne de courant, le théorème de BERNOUILLI donne :

$$\frac{\rho \vec{V}_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho \vec{V}_2^2}{2} + p_2$$

ce qui peut encore s'écrire, en fonction des données du problème :

$$\boxed{\frac{\rho U_1^2}{2}(1 + \tan^2 \alpha_1) + p_1 = \frac{\rho U_2^2}{2}(1 + \tan^2 \alpha_2) + p_2.}$$

2. En effectuant le changement de variables $x' = x$ et $y' = y + h$, il vient :

$$\int_{M_1 M_2} f(x, y) ds = \int_{M'_1 M'_2} f(x', y' - h) ds',$$

avec $(ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 = dx^2 + dy^2 = ds^2$. La fonction f étant périodique en y de période h , on a :

$$\boxed{\int_{M_1 M_2} f(x, y) ds = \int_{M'_1 M'_2} f(x', y') ds'}$$

avec les mêmes sens d'orientation pour les arcs $M_1 M_2$ et $M'_1 M'_2$.

3. Soit Φ_m le flux de masse à travers S_L . Il s'écrit, par définition :

$$\Phi_m = \oiint_{S_L} \rho \vec{V} \cdot \vec{dS} = \oiint_{S_L} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$$

où \vec{n} est orienté vers l'extérieur de la surface S_L , le vecteur $\rho \vec{V}$ étant le vecteur densité de courant de masse.

En développant l'intégrale précédente conformément aux notations des figures 6.15.C et 6.15.D, on a :

$$\Phi_m = \int_{z=-H/2}^{z=H/2} dz \int_{\gamma_L} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_{-H/2}^{H/2} \rho dz \left[\int_{M_1 M_2} \vec{V} \cdot \vec{n}_1 ds_1 \right]$$

$$+ \int_{M_2 M'_2} \vec{V} \cdot \vec{n}_2 ds_2 + \int_{M'_2 M'_1} \vec{V} \cdot \vec{n}_3 ds_3 + \int_{M'_1 M_1} \vec{V} \cdot \vec{n}_4 ds_4 \Big]$$

où \vec{n}_i , $i = 1, 2, 3, 4$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à l'arc d'intégration considéré, dirigé vers l'extérieur de S_L . ds_i est orienté positivement selon les conventions de la figure 6.16 (\vec{n}_2 et \vec{n}_4 sont parallèles à Ox).

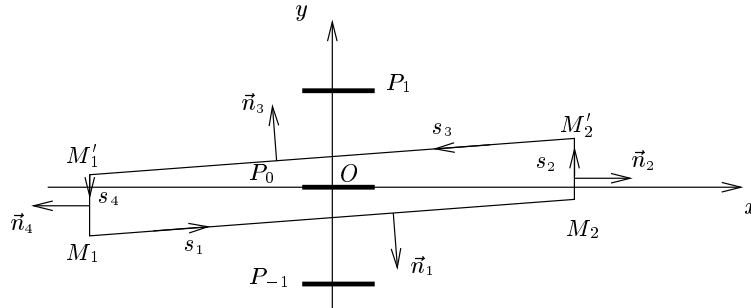


FIG. 6.16 - Les orientations des vecteurs unitaires \vec{n}_i et des abscisses curvignes le long de la courbe γ_L .

Les grandeurs considérées sont toutes périodiques en y de période h , d'où :

$$\begin{aligned} \int_{M_1 M_2} \vec{V} \cdot \vec{n}_1 ds_1 + \int_{M'_2 M'_1} \vec{V} \cdot \underbrace{\vec{n}_3}_{= -\vec{n}_1} ds_3 &= \int_{M_1 M_2} V_{\perp} ds_1 \\ &\quad - \int_{M'_2 M'_1} V_{\perp} \underbrace{ds_3}_{= -ds_1} \\ &= \int_{M_1 M_2} V_{\perp} ds_1 - \int_{M'_1 M'_2} V_{\perp} ds_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après la question 2..

De plus, L est une longueur très grande devant toutes les autres longueurs du problème. On peut alors considérer que l'on a :

$$\begin{cases} \text{sur l'arc } M_2 M'_2, & \vec{V} \simeq \vec{V}_2 \\ \text{sur l'arc } M'_1 M_1, & \vec{V} \simeq \vec{V}_1. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\Phi_m = \int_{-H/2}^{H/2} \rho dz \int_{M_2 M'_2} V_{2x} ds_2 + \int_{-H/2}^{H/2} \rho dz \int_{M'_1 M_1} (-V_{1x}) ds_4$$

puisque le long de l'arc $M_2 M'_2$, $\vec{n}_2 = \vec{e}_x$ et le long de l'arc $M'_1 M_1$, $\vec{n}_4 = -\vec{e}_x$, les grandeurs ds_2 et ds_4 étant orientées conformément à la figure 6.16. Le flux de

PROBLÈMES

masse à travers S_L s'écrit donc :

$$\boxed{\Phi_m = Hh\rho(U_2 - U_1)}.$$

En régime stationnaire, la conservation de la masse contenue dans le volume \mathcal{V}_L entouré par S_L , impose la relation :

$$0 = \frac{dm}{dt} = \Phi_m,$$

où m est la masse de fluide contenue dans le volume \mathcal{V}_L . On en déduit :

$$\boxed{U_1 = U = U_2}.$$

4. Les forces ressenties par le fluide contenu dans \mathcal{V}_L sont $-\vec{F}$ exercée par la persienne P_0 et $-p\vec{dS}$ sur chaque élément de surface dS de S_L . Ce dernier terme résulte des forces de pression exercées par le fluide extérieur sur le fluide intérieur au volume \mathcal{V}_L avec \vec{dS} orienté vers l'extérieur du volume \mathcal{V}_L .

Le théorème du bilan global de quantité de mouvement, appliqué au fluide contenu dans \mathcal{V}_L , donne :

$$\frac{D}{Dt} \left(\iiint_{\mathcal{V}_L} \rho \vec{V} d\tau \right) = -\vec{F} + \iint_{S_L} -p\vec{dS}.$$

Or, d'après le rappel, on a, en régime permanent :

$$\frac{D}{Dt} \left(\iiint_{\mathcal{V}_L} \rho \vec{V} d\tau \right) = \iiint_{\mathcal{V}_L} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V})}_{= \vec{0}} + \iint_{S_L} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

ce qui conduit à l'expression de \vec{F} :

$$\vec{F} = - \iint_{S_L} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS - \iint_{S_L} p dS \vec{n}$$

où \vec{n} est orienté vers l'extérieur du volume \mathcal{V}_L .

Le calcul des différents termes s'effectue selon une méthode analogue à celle utilisée à la question 3. :

•

$$\iint_{S_L} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_{-H/2}^{H/2} dz \left[\int_{M_1 M_2} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}_1) ds_1 + \int_{M_2 M'_2} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}_2) ds_2 + \int_{M'_2 M'_1} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}_3) ds_3 + \int_{M'_1 M_1} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}_4) ds_4 \right]$$

avec les orientations de la figure 6.16. Cette expression se simplifie composante par composante pour les mêmes raisons qu'à la question 3., ce qui permet d'écrire :

$$\iint_{S_L} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \rho H \left[\int_{M_2 M'_2} \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{e}_x) ds_2 + \int_{M'_1 M_1} \vec{V} (\vec{V} \cdot (-\vec{e}_x)) ds_4 \right]$$

$$\oiint_{S_L} p dS \vec{n} = \int_{-H/2}^{H/2} dz \left[\int_{M_1 M_2} p \vec{n}_1 ds_1 + \int_{M_2 M'_2} p \vec{n}_2 ds_2 + \int_{M'_2 M'_1} p \vec{n}_3 ds_3 + \int_{M'_1 M_1} p \vec{n}_4 ds_4 \right].$$

Cette expression se simplifie également par un traitement analogue à celui de la question 3. :

$$\oiint_{S_L} p dS \vec{n} = H \left[\int_{M_2 M'_2} p \vec{e}_x ds_2 - \int_{M'_1 M_1} p \vec{e}_x ds_4 \right].$$

En regroupant finalement les différents termes, il vient :

$$\vec{F} = \int_{M'_1 M_1} H \left[p \vec{e}_x + \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{e}_x) \right] ds_4 - \int_{M_2 M'_2} H \left[p \vec{e}_x + \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{e}_x) \right] ds_2.$$

5. On peut considérer, comme à la question 3., que

$$\begin{cases} \text{sur l'arc } M'_1 M_1, & \vec{V} \simeq \vec{V}_1 \text{ et } p \simeq p_1 \\ \text{sur l'arc } M_2 M'_2, & \vec{V} \simeq \vec{V}_2 \text{ et } p \simeq p_2. \end{cases}$$

Par projection sur \vec{e}_x et \vec{e}_y de la relation obtenue à la question précédente, et en utilisant l'expression de la quantité $(p_2 - p_1)$ déduite la question 1., il vient :

$$\begin{cases} F_x = \frac{\rho H h U^2}{2} (\tan^2 \alpha_2 - \tan^2 \alpha_1) \\ F_y = \rho H h U^2 (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \end{cases}$$

On peut s'étonner de trouver que la force dépend de H qui est le côté *a priori* arbitraire du volume de contrôle \mathcal{V}_L . Le problème vient de ce que l'on a supposé à la question 4. que les intégrales curvilignes sur $M_1 M'_1$ et $M_2 M'_2$ sont invariantes par translation d'axe z . Cela n'est correct que pour $H \simeq b$ (avec toujours $H > b$), c'est-à-dire $H - b \ll H$. Dans ces conditions, F dépend linéairement de H , c'est-à-dire de b .

6. Le vecteur $\vec{V}_m = (1/2)(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$ a pour composantes sur la base \vec{e}_x et \vec{e}_y :

$$\begin{cases} V_{m_x} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) = U \\ V_{m_y} = \frac{U}{2}(\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2). \end{cases}$$

Le calcul du produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{V}_m$ montre que \vec{F} est bien orthogonale à \vec{V}_m .

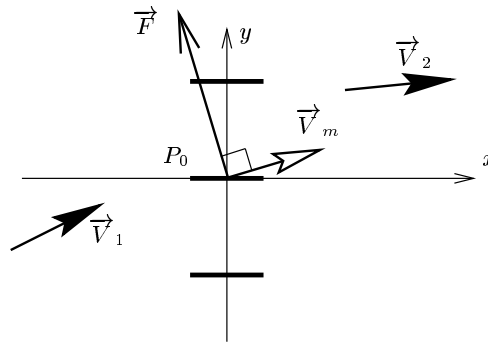


FIG. 6.17 - Les directions des vitesses \vec{V}_1 , \vec{V}_2 , \vec{V}_m et de la force \vec{F}

L'effet de la force \vec{F} est de fermer la persienne, c'est-à-dire de positionner les plaques \mathcal{P}_n perpendiculairement à la direction moyenne de l'écoulement du fluide, ce qui correspond bien au rôle protecteur d'une persienne. En toute rigueur, il faudrait calculer le moment des forces plutôt que la résultante \vec{F} pour pouvoir conclure quant au rôle protecteur des persiennes. . .