M2 Physique des Liquides
Physique Statistique — Année 2011-2012

TD 1 : Quelques résultats concernant le modèle d'Ising

I. Modèle d'Ising à une dimension

On considère N sites régulièrement espacés le long d'une chaîne 1D. En chaque site i, on a un spin σ_i de valeur ± 1. L'énergie d'une configuration C est donnée par $E(C) = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1}$, où J est une constante positive. On suppose qu'on a affaire à des conditions aux limites périodiques, ie que la chaîne est refermée sur un cercle et que $\sigma_1 \equiv \sigma_{N+1}$.

1. Calcul du paramètre d'ordre.

On considère dans cette question un champ magnétique extérieur h uniforme.

a. Calculer la fonction de partition de ce modèle, en commençant par la réécrire comme la trace d'un produit de matrices 2×2 (matrices de transfert).

b. En déduire l'énergie libre. Que devient cette expression à la limite thermodynamique $N \to \infty$?

c. Que vaut l'aimantation spontanée ? Conclusion ?

2. Calcul des fonctions de corrélation.

Le champ magnétique extérieur h est désormais supposé nul.

a. De même que précédemment, exprimer la fonction de corrélation $\langle\sigma_r\sigma_{s+r}\rangle$ comme la trace d'un produit de matrices 2×2.

b. En déduire $\lim_{N\to\infty}\langle\sigma_r\sigma_{s+r}\rangle$.

II. Modèle d'Ising à deux dimensions

On se propose de montrer l'existence d'une aimantation spontanée à température non nulle en reproduisant les arguments de Peierls. On considère pour cela un réseau carré de N sites, avec des spins gelés à $+1$ sur le bord du système. Une configuration C est définie par la donnée d'îlots de spins -1 dans un bain de spins $+1$. Ces îlots peuvent eux-mêmes être définis par leurs frontières, qui sont des polygones tracés entre les spins -1 et $+1$, et il existe une correspondance biunivoque entre la donnée de ces polygones et une configuration C.

On commence par classer tous les polygones qui peuvent apparaître en les numérotant selon leur périmètre b et un indice j variant entre 1 et $\nu(b)$ selon la forme et l'emplacement du polygone $P_b^{(j)}$ considéré. On note $N_b^{(j)}$ le nombre de sites enclos dans $P_b^{(j)}$.

Finalement, $C = \{P_{b_1}^{(j_1)},\ P_{b_2}^{(j_2)},\ ...\}$.

On note $N_\pm(C)$ le nombre de sites ± 1 figurant dans C, si bien que l'aimantation s'écrit $m = 1 - 2\dfrac{\langle N_-(C)\rangle}{N}$. On se propose de montrer qu'à température assez basse, $\frac{\langle N_-(C)\rangle}{N} < \frac{1}{2}$.

1. En introduisant la fonction indicatrice $\chi_b^{(j)}(C)$ valant 1 si $P_b^{(j)} \in C$ et 0 sinon, montrer que :

$$\langle N_-(C)\rangle \leq \sum_b \sum_{1\leq j\leq \nu(b)} \langle \chi_b^{(j)}(C)\rangle N_b^{(j)}.$$

2. Montrer alors les inégalités suivantes :

(i) $N_b^{(j)} \leq \left(\dfrac{b}{4}\right)^2$;

(ii) $\nu(b) \leq N3^{b-1}$;

(iii) $\langle \chi_b^{(j)}(C)\rangle \leq e^{-2b\beta J}$.

3. Déduire de la question précédente l'existence d'une aimantation spontanée à température non nulle.