M2 Physique des Liquides
Physique Statistique Année 2011-2012

TD 2 : Théorie de Landau

I. Théorie de Landau et théorie de champ moyen

La théorie de Landau présentée en cours est purement thermodynamique. On se propose d'étudier le lien entre cette théorie de Landau et des approches plus microscopiques de physique statistique. On s'appuiera pour cela sur un modèle de spins $\sigma_i = \pm 1$ sur réseau hypercubique, en champ extérieur inhomogène h_i, l'énergie d'une configuration C étant donnée par :

$$E(C) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum_i h_i\sigma_i,$$

où $J_{ij} = J_{ji} = J_{|i-j|}$ est un terme d'interaction général invariant par translation.

A. Champ moyen : approche variationnelle

On cherche le problème de spins indépendants « le plus proche » du problème de spins en interaction, associé à une énergie $E_0(C) = -\sum_i x_i\sigma_i$. L'approche variationnelle développée ci-dessous va permettre de déterminer les x_i.

On note

$$\langle A\rangle = \frac{1}{Z}\sum_C Ae^{-\beta E(C)} \text{ et } \langle A\rangle_0 = \frac{1}{Z_0}\sum_C Ae^{-\beta E_0(C)}.$$

1. Montrer que $F \leq \inf_{x_i}\{F_0 + \langle E - E_0\rangle_0\}$, où F (resp. F_0) désigne l'énergie libre du système de spins initial (resp. indépendants).

2. Par définition, l'énergie libre du champ moyen F^{CM} désigne le membre de droite de l'inégalité précédente. L'énergie de champ moyen est donnée par E_0 où les $x_i = x_i^*$ réalisent la condition de borne inférieure de la question précédente.

a. Ecrire l'équation implicite vérifiée par les x_i^*.

b. Ecrire l'aimantation $m_i = -\dfrac{\partial F^{CM}}{\partial h_i}$ en fonction de x_i^*.

c. Ecrire le potentiel thermodynamique $\Gamma^{CM} = F^{CM} + \sum_i h_i m_i$ en fonction de T et m_i.

B. Champ moyen : comparaison avec la théorie de Landau

1. On commence par considérer le cas où le champ magnétique appliqué est homogène, si bien que l'aimantation elle-même est homogène. En d'autres termes, $\forall i\ h_i = h,\ m_i = m$.

Développer $\gamma \equiv \Gamma/N$, le potentiel thermodynamique par spin, en puissances de m à l'ordre 4 inclus. Comment ce résultat se compare-t-il à la théorie de Landau ?

2. On considère désormais le cas général d'un champ magnétique appliqué inhomogène, pour calculer les fonctions de corrélations connexes.

a. Montrer que la fonction de corrélation connexe (dont l'inverse matriciel s'écrit $(G^{-1})_{ij} = (kT)^{-1}\dfrac{\partial^2\Gamma^{CM}}{\partial m_i \partial m_j}$) est donnée en champ nul et au-dessus de la température critique par

$$G_{ij} = kT \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathrm{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}}{kT - \mathcal{J}(\mathbf{q})},$$

où

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}) \equiv \sum_j J_{ij} e^{i\mathrm{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}.$$

b. Montrer que, dans le cas particulier d'un couplage J entre plus proches voisins,

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}) = \mathcal{J}(\mathbf{0}) - Jq^2 + \mathcal{O}(q^4).$$

c. Vérifier qu'alors la fonction de corrélation connexe de Landau est reconstituée.

II. Cas d'un paramètre d'ordre vectoriel

On se propose ici d'étendre la théorie de Landau vue dans le cas d'un paramètre d'ordre m scalaire (pour un système invariant par retournement du paramètre d'ordre $m \to -m$), au cas d'un paramètre d'ordre vectoriel $\mathbf{m}$, à n dimensions (pour un système invariant par rotation du paramètre d'ordre). L'espace physique considéré est lui de dimension d.

Le potentiel thermodynamique de Landau d'un système défini par une variable continue $\phi(\mathbf{r})$ peut s'écrire dans ce cas :

$$\Gamma(T, \mathbf{m}(\mathbf{r})) = \Gamma_0(T) + \int \mathrm{d}^d r \left\{ \frac{1}{2} a(T) \mathbf{m}^2 + \frac{1}{4} b(T) (\mathbf{m}^2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\nabla m_i)^2 \right\},$$

où $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \langle \phi(\mathbf{r}) \rangle$.

1. Déterminer le comportement du paramètre d'ordre au voisinage de la température critique.

2. Déterminer la matrice des fonctions de corrélation connexes $G_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \langle \phi_i(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}') \rangle - \langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle \langle \phi_j(\mathbf{r}') \rangle$.