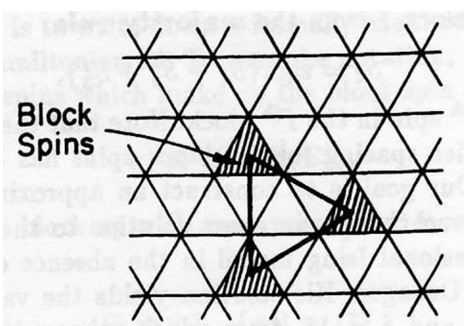
TD 3 : Blocs de spins : modèle d'Ising 2D sur réseau triangulaire

On considère un modèle d'Ising 2D sur un réseau triangulaire, décrit par un hamiltonien :

$$\widetilde{H} \equiv -\beta H = K \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j$$

où $S_i = \pm 1$.

On définit des blocs de spins en groupant 3 spins d'un même triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le spin du bloc I résultant est alors défini par la "règle de la majorité" :

$$S_I = \text{sign}(S_I^1 + S_I^2 + S_I^3)$$

où S_j^I désigne le $j^{\text{ème}}$ spin du $I^{\text{ème}}$ bloc. Ces nouveaux spins sont alors répartis aux nœuds d'un nouveau réseau triangulaire.

1. Calculer le pas du nouveau réseau triangulaire en fonction du pas a du réseau triangulaire de départ.

2. Représentation formelle du hamiltonien à gros grain.

On cherche à écrire formellement le hamiltonien $\widetilde{H'}$ du nouveau système. On note $\sigma_I \equiv \{S_I^1, S_I^2, S_I^3\}$ l'ensemble des spins du réseau initial qui constituent le bloc de spins I.

a. Expliciter les configurations $\{\sigma_I\}$ compatibles avec les nouveaux spins $S_I = \pm 1$

b. On définit $\widetilde{H'}$ par :

$$e^{\widetilde{H'}[S_I]} = \sum_{\{\sigma_I\}} e^{\widetilde{H}[S_I, \sigma_I]},$$

où la somme porte sur les configurations des spins initiaux compatibles avec les valeurs $\{S_I\}$ des nouveaux spins.

Par ailleurs, on sépare $\widetilde{H}$ en 2 contributions :

$$\widetilde{H} = \widetilde{H_0} + \widetilde{V},$$

où

$$\widetilde{H_0} \equiv K \sum_I \sum_{i,j \in I} S_i S_j$$

décrit les interactions entre spins d'un même bloc de spin et

$$\widetilde{V} \equiv K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I,\, j \in J} S_i S_j$$

décrit les interactions entre spins de blocs différents (dans ces deux équations, i et j sont plus proche voisins sur le réseau initial).

Par la suite, $\widetilde{V}$ sera considéré comme une perturbation par rapport au hamiltonien $\widetilde{H_0}$.

Montrer que

$$e^{\widetilde{H'}[S_I]} = \langle e^{\widetilde{V}} \rangle_0 (Z_0(K))^M,$$

où M désigne le nombre de blocs du système initial,Z_0 est une fonction de K à déterminer et $\langle ... \rangle_0$ correspond à une moyenne par rapport au hamiltonien $\widetilde{H_0}$.

3. Calcul perturbatif de la loi de transformation du RG

a. Montrer que

$$\ln \langle e^{\widetilde{V}} \rangle_0 = \langle \widetilde{V} \rangle_0 + \frac{1}{2}(\langle \widetilde{V}^2 \rangle_0 - \langle \widetilde{V} \rangle_0^2) + \mathcal{O}(V^3).$$

Par la suite, nous ne conserverons que le premier terme de ce développement .

b. Montrer que

$$\widetilde{H'}[S_I] = M \ln Z_0(K) + K' \sum_{\langle I,J \rangle} S_I S_J + \mathcal{O}(V^2),$$

où

$$K' = 2K(\phi(K))^2$$

avec $\phi(K)$ à déterminer.

4. Points fixes et exposants critiques

a. Déterminer les points fixes de la transformation précédente.

b. Calculer l'exposant ν définissant la divergence de la longueur de corrélation au point critique.