

Mécanique des Fluides

Travaux dirigés

Contenu

1	Formulaire	2
2	A propos du théorème du transport de Reynolds	6
3	Ressaut hydraulique dans un canal	8
4	Grandes ondes de gravité longitudinales dans un canal	10
5	Ecoulement barotrope d'un gaz compressible	14
6	Résorption d'une cavité	15
7	Oscillations dans un fluide visqueux	16
8	Un problème d'adhérence	17
9	Ecoulement de Poiseuille et gradient de pression oscillant	20
10	Trainée sur une plaque (méthode de von Kármán)	22
11	Dynamique d'étalement d'une goutte visqueuse	24
12	Instabilité de l'imprimeur	26
13	Pour une cuiller de miel...	29
14	Enoncés divers	32

1 Formulaire

Opérateurs différentiels

Relations usuelles :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) &= \Delta U \\
 \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= 0 \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) &= 0 \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \\
 \overrightarrow{\operatorname{grad}}(UW) &= U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W + W \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \\
 \operatorname{div}(U\vec{A}) &= U \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(U\vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \wedge \vec{A} + U \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \\
 \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B} \\
 \operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B}
 \end{aligned}$$

Relations intégrales :

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \iint_{S(C)} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} \\
 \oint_C U d\vec{l} &= - \iint_{S(C)} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \wedge d\vec{S} \\
 \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{A} dV \\
 \oiint_S U d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U dV \\
 \oiint_S \vec{A} \wedge d\vec{S} &= - \iiint_{V(S)} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} dV \\
 \oiint_S (U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W - W \overrightarrow{\operatorname{grad}} U) \cdot d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} (U \Delta W - W \Delta U) dV
 \end{aligned}$$

Théorème de Leibnitz :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}$$

Théorème du transport de Reynolds :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right] dV$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \vec{\nabla}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2(\vec{A}) = (\Delta A_x) \vec{e}_x + (\Delta A_y) \vec{e}_y + (\Delta A_z) \vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques :

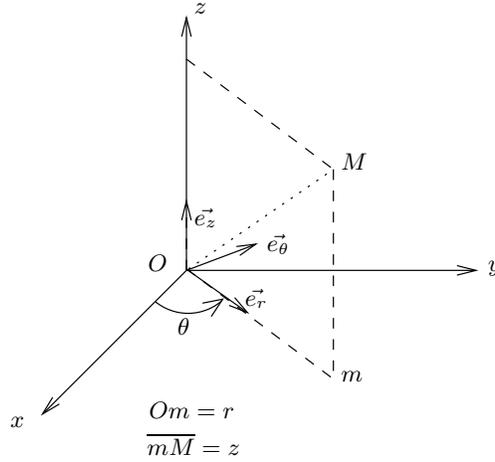


Figure 1: Notations utilisées dans le système des coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\overrightarrow{\text{grad}}U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + (\Delta A_z) \vec{e}_z$$

Coordonnées sphériques :

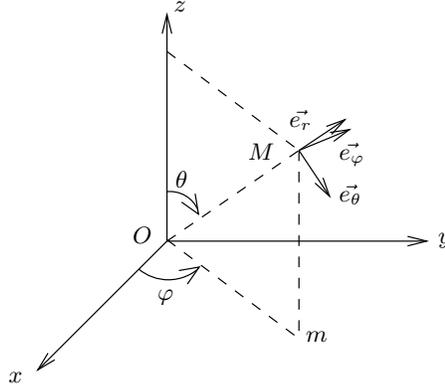


Figure 2: Notations utilisées dans le système des coordonnées sphériques (r, θ, φ)

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = & \left(\Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ & + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\theta + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Conservation de la masse et Equation de Navier-Stokes

Pour un fluide Newtonien et incompressible on a :

$$\text{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f}_m + \nu \vec{\nabla}^2 u$$

En coordonnées cartésiennes avec $\vec{u} = (u, v, w)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

En coordonnées cylindriques avec $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

sur l'axe r

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \mu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe θ

$$\rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \mu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe z

$$\rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \mu \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

En coordonnées sphériques avec $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

sur l'axe r

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

sur l'axe θ

$$\rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

sur l'axe φ

$$\rho \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot \theta}{r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

2 A propos du théorème du transport de Reynolds

Soit une fonction $f(\vec{r}, t)$ dépendant des coordonnées d'espace \vec{r} et du temps t . On s'intéresse aux variations temporelles de la grandeur

$$M(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f(\vec{r}, t) d^3\vec{r},$$

où le domaine $\mathcal{D}(t)$ considéré peut se déplacer et se déformer au cours du temps (on parle de volume de contrôle). On note $\vec{V}(\vec{r}, t)$ la vitesse de déplacement d'un point \vec{r} se situant sur la surface $S(t)$ du domaine mobile $\mathcal{D}(t)$. On peut montrer que

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} f(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right] = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} f(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

$$= \int_{\mathcal{D}(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} [f(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t)] \right\} d^3\vec{r} \quad (2)$$

Ce résultat constitue le théorème du transport de Reynolds, qui peut se généraliser à une grandeur $\vec{F}(\vec{r}, t)$ vectorielle. En effet, en écrivant (1) pour chacune des composantes du champ \vec{F} , il vient :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} \vec{F}(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right] = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} \vec{F}(\vec{r}, t) (\vec{V} \cdot d\vec{S}). \quad (3)$$

Pour un volume de contrôle fixe, on retrouve :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \vec{F}(\vec{r}, t) d^3\vec{r} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} d^3\vec{r}. \quad (4)$$

Conservation de la masse

Dans le cas particulier où f désigne la masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ d'un fluide (éventuellement compressible) de champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$, le taux de variation de la masse $M(t)$ contenue dans le domaine $\mathcal{D}(t)$ est ainsi donné par

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{V}) \right] d^3\vec{r}.$$

Le déplacement de $\mathcal{D}(t)$ est pour le moment arbitraire (en conséquence de quoi $\vec{V} \neq \vec{v}$ en général). On peut néanmoins choisir de suivre dans leur mouvement les particules fluides contenues à l'instant initial dans le domaine $\mathcal{D}(0)$ (le volume de contrôle est alors un volume "matériel"). Dans ces conditions, $\vec{V} = \vec{v}$. De plus, en l'absence de sources de création ou d'annihilation de matière (cas générique), la masse $M(t)$ se conserve au cours du temps, indépendamment des déformations de $\mathcal{D}(t)$. On a alors

$$\frac{dM}{dt} = 0 \iff \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \right] d^3\vec{r} = 0,$$

et l'on retrouve la relation de continuité.

Exemple d'application : obtention des équations du mouvement en "eau peu profonde"

Transport de la quantité de mouvement

Soit à l'instant $t = 0$ un volume $\mathcal{D}(0)$, que l'on suit avec le mouvement des particules fluides qu'il contient (volume matériel). Comme précédemment, on a ici $\vec{V}(M, t) = \vec{v}(M, t)$ pour tous les points M de la surface $S(t)$ du volume $\mathcal{D}(t)$. On note $\vec{F}(t)$ la résultante des forces extérieures s'exerçant sur $\mathcal{D}(t)$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right],$$

que l'on peut réexprimer à l'aide du théorème du transport :

$$\vec{F}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}). \quad (5)$$

Exemple d'application : voir le TD sur le ressaut hydraulique (page 8). Obtention de la vitesse de propagation d'un mascaret en fonction des caractéristiques du ressaut.

Exercice 1 A l'aide du théorème du transport, retrouver la règle de LEIBNITZ

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}.$$

Exercice 2 Interprétation de l'opérateur divergence.

Soit un volume matériel élémentaire δv . Etablir que le taux de variation de δv est donné par la divergence du champ de vitesse \vec{v} :

$$\frac{1}{\delta v} \frac{d(\delta v)}{dt} = \text{div } \vec{v}.$$

Exercice 3 Considérons un volume matériel $\mathcal{D}(t)$. Montrer que pour toute fonction $\Phi(\vec{r}, t)$, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \Phi d\vec{r} = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{D\Phi}{Dt} d\vec{r},$$

où D/Dt désigne la dérivée particulière. Ce résultat est parfois désigné sous le nom de théorème de REYNOLDS.

3 Ressaut hydraulique dans un canal

On considère un écoulement stationnaire de faible profondeur dans un canal ouvert rectangulaire et de pente négligeable. On s'intéresse à la formation d'un ressaut immobile (changement brutal de la profondeur de H_1 en amont, à H_2 en aval ; ce changement s'effectue sur une distance comparable à la profondeur, avec $H_1 < H_2$). Pour simplifier l'analyse, le modèle de cet écoulement néglige la viscosité et la compressibilité du fluide et suppose les vitesses d'écoulement \vec{V}_1 et \vec{V}_2 uniformes et horizontales en amont comme en aval du ressaut.

La géométrie de l'écoulement est représentée sur la figure 1.

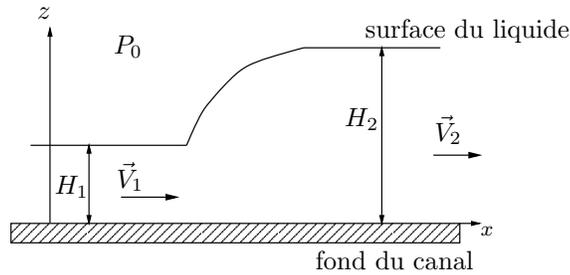


Figure 1: Ressaut hydraulique

- 1) Montrer que la répartition de la pression dans le fluide est hydrostatique. Exprimer la pression $P(z)$ en amont et en aval du ressaut en fonction de la masse volumique ρ du fluide, de la hauteur z considérée et de la pression atmosphérique P_0 .
- 2) Equation de conservation de la masse.
Donner l'expression du débit massique D en fonction de (V_1, H_1, L) et (V_2, H_2, L) , L étant la largeur du canal.
- 3) Equation de transport de la quantité de mouvement.

- a) Utiliser le théorème du transport de Reynolds relatif à la densité de quantité de mouvement pour obtenir la relation entre les grandeurs amont et aval :

$$\frac{1}{2} g H_1^2 + V_1^2 H_1 = \frac{1}{2} g H_2^2 + V_2^2 H_2,$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

- b) On pose

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gH_1}}, \quad F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gH_2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{H_2}{H_1}.$$

F_1 et F_2 sont les nombres de Froude amont et aval. Calculer V_1 et V_2 puis F_1 et F_2 en fonction de H_1 , H_2 et g et enfin α en fonction de F_1 .

- c) Montrer que pour $\alpha > 1$ on a $F_1 > 1$ (régime super-critique) et $F_2 < 1$ (régime sous critique).
- d) A.N. Avec un débit par unité de largeur de $1,5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et une profondeur d'approche de $0,2 \text{ m}$, calculer F_1 puis H_2 .

4) Bilan énergétique

- a) On rappelle que pour une particule de fluide de vitesse \vec{v} dans un champ de pesanteur, la densité d'énergie est $e = \rho (v^2/2 + gz)$. En appliquant le théorème du transport de Reynolds à la densité d'énergie, montrer que l'on a la relation

$$-\dot{Q} = \oint_{s.c} \rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

où \dot{Q} est la puissance dissipée dans le volume de contrôle (v.c.) sous une forme turbulente et s.c est la surface de contrôle.

- b) Donner l'expression de la puissance dissipée dans le ressaut en fonction de D , des grandeurs V et H en amont et aval, ainsi que de ρ et g . Calculer la puissance dissipée pour un canal d'un mètre de largeur contenant de l'eau.

5) Vitesse de propagation d'un mascaret.

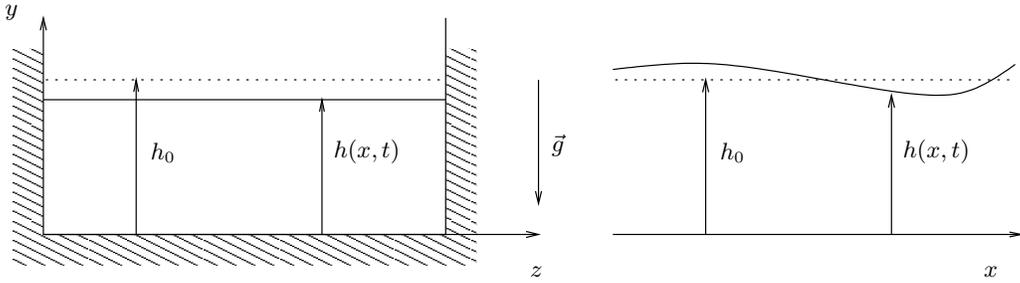
On observe la propagation d'une discontinuité de hauteur d'eau à la célérité \vec{c} dans le canal. En amont du front d'onde, la hauteur d'eau est H_2 et la vitesse d'écoulement \vec{V}_2 ($V_2 < c$). En aval, la hauteur est H_1 ($H_1 < H_2$) et le liquide est immobile.

- a) En utilisant un changement de référentiel adéquat ainsi que les résultats obtenus pour le ressaut, calculer la vitesse de propagation c en fonction de H_1 , H_2 et g .
- b) Dans le cas limite où $H_2/H_1 = (1 + \varepsilon)H_1$, avec $\varepsilon \rightarrow 0$, comment sont modifiés les résultats lorsque la vitesse d'écoulement \vec{V}_1 en aval n'est pas nulle ?

4 Grandes ondes de gravité longitudinales dans un canal

On considère la propagation des ondes dans un canal horizontal sans écoulement moyen ou permanent. Le canal est de grande longueur (dirigée suivant l'axe des x) et la surface de la section transversale du liquide est $S_0 = h_0\ell$ à l'équilibre statique (h_0 est la hauteur du liquide au repos et ℓ la largeur du canal). En présence d'un écoulement, la hauteur du liquide est $h(x, t)$ et la section devient $S(x, t) = \ell h(x, t)$.

Nous étudions les déplacements des particules de liquide dans la direction longitudinale, le champ de vitesse est donc $\vec{v}(\vec{r}, t) = u(x, t)\hat{x}$. Le liquide a une masse volumique ρ constante, et se trouve soumis à un champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = -g\hat{y}$. La viscosité est négligée et on se limite dans tout le problème à de petits mouvements : $|h - h_0| \ll h_0$ pour des longueurs d'onde λ grandes : $\lambda \gg h_0$.



I. Approximation linéaire

1) Justification du modèle

Les ondes de surface dans un canal ont un champ de vitesse \vec{v} qui dérive d'un potentiel φ : $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ avec $\varphi = \varphi_0 \text{ch}(ky) \cos(kx \pm \omega t)$ (φ_0 est une constante) avec une équation de dispersion $\omega(k)^2 = kg \text{th}(kh_0)$.

Montrer que le potentiel φ vérifie l'équation de Laplace (l'écoulement est irrotationnel et incompressible) et qu'il vérifie aussi les conditions aux limites sur la surface du liquide ($y = h \simeq h_0$), sur le fond ($y = 0$) et sur les côtés verticaux du canal ($z = 0$ et $z = \ell$).

En déduire que les vitesses latérale et verticale sont négligeables devant la vitesse longitudinale et qu'on a un écoulement longitudinal avec les grandeurs $\vec{v} = u(x, t)\hat{x}$ et $h(x, t)$.

2) Equations locales de $u(x, t)$ et $h(x, t)$ linéarisées.

a - A partir de l'équation du mouvement (que l'on peut retrouver à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule fluide), montrer que la pression s'écrit $p(x, y, t) = p_0 + \rho g[h(x, t) - y]$ où p_0 est la pression à la surface du liquide. En déduire la relation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

b - En utilisant l'incompressibilité de l'écoulement, montrer que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0.$$

On peut retrouver ce résultat à l'aide du théorème du transport de Reynolds appliqué à la masse sur un volume de contrôle compris entre les sections d'abscisses x et $x + dx$ (attention : bien préciser comment l'on choisit de faire se déplacer le volume de contrôle).

c - Linéariser ces deux équations et obtenir l'équation d'onde pour les petits mouvements. Vérifier que h est de la forme

$$h(x, t) = f_+(x - C_0 t) + f_-(x + C_0 t),$$

où f_+ et f_- sont des fonctions correspondant à des ondes progressives montante et descendante, qui se propagent sans dispersion, avec une vitesse de phase C_0 dont on donnera l'expression. Montrer que C_0 est le coefficient du premier terme linéaire de l'équation de dispersion $\omega(k)$ des ondes de gravité. Obtenir l'expression de la vitesse :

$$u(x, t) = \frac{C_0}{h_0} [f_+(x - C_0 t) - f_-(x + C_0 t)].$$

- 3) Exprimer la relation fonctionnelle $h(u)$ entre la hauteur h de la surface du liquide et sa vitesse u dans le canal à l'abscisse x et au temps t pour des grandes ondes progressives (montantes ou descendantes). Vérifier qu'on a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm C_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

II. Raidissement du profil d'une onde progressive

Dans cette partie du problème, on reprend les équations non linéaires entre u et h (question I-2,a,b) et on admet que la hauteur de la surface du liquide $h(u)$ est encore une fonction de la vitesse u . On s'intéresse à la propagation d'une onde progressive (montante ou descendante).

- 1) Obtention de la relation fonctionnelle $h(u)$.

Ecrire les équations couplées en u et h en introduisant l'expression dh/du , puis en déduire les relations :

$$\left[\frac{dh(u)}{du} \right]^2 = \frac{h(u)}{g} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{gh(u)} = \frac{1}{2} \frac{u}{\sqrt{g}} + \text{constante.}$$

- 2) Calcul de la vitesse de propagation d'une perturbation.

Montrer que l'on obtient l'équation locale en u :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad U(u) = u \pm \sqrt{gh(u)} = 3u/2 \pm C_0,$$

où les signes $+/-$ correspondent aux ondes montantes/descendantes (on pourra s'aider de l'équation linéarisée de la question I-2-c).

Vérifier que $u = F[\alpha = x - U(u)t]$ est solution de l'équation locale en u , où F est une fonction quelconque. Quelle est la signification de la grandeur $U(u)$?

3) Calcul de l'évolution temporelle du gradient de vitesse pour une onde progressive.

On pose $x - U(u)t = F^{-1}(u) = G(u)$. G est la fonction inverse de F . En partant de l'expression de $\partial G/\partial x$ (notée $\partial_x G$), calculer dG/du en fonction du gradient de vitesse initial $(\partial_x u)_{t=0}$.

En déduire la relation

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t=0} \right]^{-1} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_t \right]^{-1} - \frac{3}{2} t$$

entre le gradient de vitesse initial et le gradient de vitesse au temps t . Pour quelles valeurs de $(\partial_x u)_{t=0}$ l'inverse du gradient de vitesse $1/(\partial_x u)_{t=\tau}$ après une durée τ peut-il s'annuler ? Calculer cette durée τ . Quelle conclusion peut-on tirer lorsque t passe d'une valeur inférieure à τ à une valeur supérieure à τ ? Schématiser l'évolution temporelle d'une impulsion qui se déplace vers les $x > 0$.

III. Formation d'une discontinuité à partir d'une petite perturbation initiale

On impose une perturbation initiale de la surface du liquide et une vitesse initiale nulle

$$\begin{aligned} h(x, t = 0) &= h_0 + H \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \text{pour } |x| \leq \frac{L}{2} & \text{avec } |H| \ll h_0 \\ h(x, t = 0) &= 0 & \text{pour } |x| > \frac{L}{2} \\ \text{et } u(x, t = 0) &= 0 \end{aligned}$$

- 1) En utilisant la forme des solutions ondulatoires linéarisées obtenues à la question I-2-c et à l'aide des conditions initiales, obtenir l'expression de l'onde montante initiale.
- 2) Calculer la durée τ de formation d'une discontinuité en fonction de L , h_0 , H et C_0 .

IV. Grandes ondes de gravité non linéaires dans un milieu faiblement dispersif

Dans l'approximation des grandes ondes progressives, la vitesse $u(x, t)$ vérifie la relation locale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad U(u) = C_0 + \frac{3}{2} u.$$

Une impulsion de vitesse qui se propage subit un raidissement. Cet effet non linéaire est néanmoins contrarié par la dispersion du milieu qu'il faut prendre en compte dans la modélisation.

- 1) Calcul de l'équation de dispersion pour un milieu faiblement dispersif.

Calculer le premier terme dispersif (non linéaire) de l'équation de dispersion $\omega(k)$. On donne le développement $\text{th } \theta = \theta - \theta^3/3 + \mathcal{O}(\theta^5)$ au voisinage de 0.

- 2) Equation de Korteweg de Vries (KdV)

a - Montrer que pour une onde progressive montante en $e^{i(kx - \omega t)}$ l'équation de dispersion implique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{C_0 h_0^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

b - Justifier que pour tenir compte du raidissement et de la dispersion de l'onde, l'équation locale précédente devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(C_0 + \frac{3}{2} u \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{C_0 h_0^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

En déduire que par un changement de référentiel et d'échelle de la vitesse $u(x, t) \rightarrow V(x, t)$, on obtient l'équation dite de KdV :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} = 0,$$

où β est une constante.

3) Propagation d'une onde progressive solitaire.

On suppose qu'une impulsion d'extension spatiale ℓ se déplace à une vitesse constante \mathcal{V} sans se déformer. L'élargissement par dispersion doit être compensé par le raidissement dû à la non linéarité. Quelle est la relation d'ordre de grandeur entre ℓ et \mathcal{V} .

4) Montrer que pour toute constante C positive, la fonction

$$u(x, t) = \frac{3C}{\operatorname{ch}^2 \left[\frac{\sqrt{C}}{2} (x - Ct) \right]}$$

est solution de l'équation de KdV avec $\beta = 1$. Montrer que cette onde est une "bosse" (une onde solitaire) se propageant vers les x positifs à la vitesse C . La relation entre ℓ et \mathcal{V} obtenue au IV-3) est-elle satisfaite ?

5 Ecoulement barotrope d'un gaz compressible

- 1) Rappeler l'équation d'Euler pour un fluide parfait. Lorsque l'écoulement considéré est barotrope, la masse volumique ρ en un point \vec{r} ne dépend que de la pression P en ce point. Les surfaces isobares et iso-densité (isostères) sont alors confondues. Montrer que dans ce cas, le terme de pression $(-\text{grad } P)/\rho$ dérive d'un potentiel (on peut par exemple montrer la nullité de son rotationnel). Expliciter le potentiel en question.
- 2) En déduire la généralisation du théorème de BERNOULLI stationnaire au cas d'écoulements compressibles barotropes.
- 3) Montrer que dans l'écoulement isentropique d'un gaz parfait, on $dh = (dP)/\rho$ où h est l'enthalpie massique, puis

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \text{Cste.}$$

Dans l'expression précédente, γ est l'indice d'adiabaticité défini par le rapport c_p/c_v des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. Quelle est la valeur de γ pour l'air (considéré ici comme un gaz parfait diatomique) ?

- 4) En déduire que le long d'une ligne de courant (ou de vorticité, notion à définir), l'enthalpie massique totale

$$h_{\text{tot}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$$

est une constante pour les écoulements barotropes.

- 5) Un réservoir rempli d'air dans lequel règne une pression $P_1 = 1.5 \cdot 10^5$ Pa est initialement à l'équilibre thermodynamique à la température $T_1 = 300$ °K. On perfore le récipient d'une mince ouverture.   l'extérieur, la pression atmosphérique est $P_2 = 10^5$ Pa. En supposant l'écoulement suffisamment rapide pour être adiabatique et en négligeant la viscosité de l'air, calculer la vitesse moyenne d'expulsion du jet. Pourquoi est-il légitime de négliger la force de pesanteur dans le cas présent ?

6 Résorption d'une cavité

Un fluide parfait, homogène, incompressible, de densité ρ , est initialement au repos à la pression P_0 dans l'espace tout entier. On retire brusquement un volume sphérique de rayon a . On se propose de déterminer le temps de remplissage de la cavité.

1/ Ecrire l'équation du mouvement en coordonnées sphériques (on prendra un champ des vitesses de la forme $\vec{u}(\vec{r}, t) = u(r, t) \vec{e}_r$). Montrer que l'équation de continuité conduit à la relation $r^2 u(r, t) = F(t)$. On pourra pour ce faire, utiliser soit la forme locale, soit la forme intégrale de l'équation de continuité.

2/ On note $R(t)$ le rayon de la cavité à l'instant t et $U(t)$ la vitesse radiale de son bord. Montrer en intégrant l'équation d'Euler entre l'infini et $R(t)$ que l'on a :

$$-\frac{F'(t)}{R} + \frac{U^2}{2} = \frac{P_0}{\rho}. \quad (1)$$

Montrer que l'on peut également obtenir ce résultat grâce à l'équation de Bernoulli écrite sous la forme : $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ avec $\vec{\nabla}(\partial_t \phi + u^2/2 + P/\rho) = 0$.

Déduire de (1) que U satisfait l'équation :

$$-\frac{3U^2}{2} - \frac{R}{2} \frac{dU^2}{dR} = \frac{P_0}{\rho}. \quad (2)$$

3/ Exprimer alors U en fonction de R et montrer que le temps de remplissage est

$$\tau = \sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{(a/R)^3 - 1}} = \left(\frac{3\pi a^2 \rho}{2P_0}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)}. \quad (3)$$

Rappel : $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ avec $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

4/ Comment se comporte $F(t)$ lorsque $t \simeq \tau$? En déduire que, pour t voisin de τ , tout le fluide a pratiquement une vitesse nulle sauf au voisinage de l'origine où la vitesse est considérable.

5/ Montrer que ce modèle prévoit, en tout point du fluide, une pression qui tend vers l'infini lorsque t tend vers τ .

7 Oscillations dans un fluide visqueux

On considère un fluide visqueux incompressible en contact avec une plaque plane illimitée animée, dans son plan, d'un mouvement oscillatoire. On demande d'étudier le mouvement induit dans le fluide en présence d'un champ de gravité vertical, perpendiculaire à la plaque.

Milieu semi-infini

Le fluide occupe le demi-espace $z > 0$. Le plan solide horizontal xOy est animé d'un mouvement parallèle à l'axe Ox , avec une vitesse algébrique $U_0 \cos \omega t$. On cherchera une solution de la forme $\vec{u} = (u(z, t), 0, 0)$ (et $P = P(z)$), avec $u(z, t) = \text{Re} \{u_0(z) e^{-i\omega t}\}$; $u_0(z)$ est une amplitude complexe.

- 1) Vérifier que l'équation de conservation de la masse est satisfaite. (Déterminer à une constante additive près, la fonction $P(z)$.)
- 2) Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $u_0(z)$. La résoudre avec les conditions aux limites $u_0(0) = U_0$ et $u_0(\infty) = 0$. On pourra poser $k^2 = i\omega/\nu$ et $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$. Quelle est la signification physique du paramètre δ ? Estimer sa valeur numérique pour une fréquence de 100 Hz, dans une huile de viscosité cinématique $\nu = 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$. Voyez-vous une analogie entre le problème considéré ici et un phénomène concernant un courant électrique de haute fréquence dans un milieu conducteur?
- 3) Déterminer la force visqueuse $\vec{f}(t)$ par unité d'aire que la plaque mobile exerce sur le fluide. Déterminer également la puissance moyenne par unité d'aire fournie par la plaque au fluide.
- 4) Montrer que la puissance dissipée par les forces de viscosité dans un élément de volume V s'écrit, dans le cas présent :

$$\mathcal{P} = \rho\nu \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dv.$$

En déduire la puissance moyenne par unité d'aire dissipée dans le fluide par les forces de viscosité. Conclusion?

Epaisseur finie

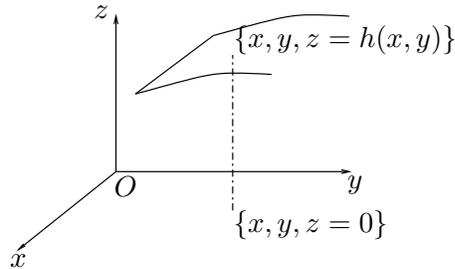
On suppose maintenant que le fluide occupe seulement une hauteur h au-dessus du plan xOy . La surface libre, sur laquelle ne s'exerce aucune force, demeure plane et constitue le plan $z = h$. La vitesse de la plaque xOy est encore $U_0 \cos \omega t$, selon l'axe Ox .

- 1) Quelles sont les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = h$? Déterminer l'amplitude complexe $u_0(z)$. Déterminer l'amplitude complexe f_0 de la force par unité d'aire que la plaque exerce sur le fluide.
- 2) Dans le cas limite $h \rightarrow \infty$ donner l'expression de la force réelle $f(t)$ correspondante et vérifier que l'on retrouve le résultat de la partie précédente. Lorsque $h \ll \delta$, donner l'expression explicite de la force réelle $f(t)$ et expliquer la signification physique du résultat. Quelle peut-être l'application d'un tel montage?

8 Un problème d'adhérence

I - Ecoulement rampant dans un film mince

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide incompressible confiné entre deux surfaces rigides et immobiles (paramétrées par les altitudes $z = 0$ et $z = h(x, y)$). On suppose la masse volumique ρ , la viscosité dynamique μ et la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ constantes.



Soient U une vitesse caractéristique horizontale et L une longueur caractéristique horizontale (dans le plan xOy). On suppose que $h \ll L$ et on néglige la force de pesanteur.

- 1) Ecrire les équations locales de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible couplant le champ de vitesse $\vec{u}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ et le champ de pression $p(x, y, z, t)$.
- 2) Montrer que le terme de viscosité de l'équation locale du mouvement est de la forme

$$\nabla^2 \vec{u} \simeq \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2}.$$

- 3) Montrer que $W \simeq hU/L$, où U et W sont les ordres de grandeur de la vitesse suivant les directions horizontale et verticale respectivement.
- 4) Montrer que le terme d'inertie peut être négligé devant le terme de viscosité, si $\text{Re} (h/L)^2 \ll 1$ (Re est le nombre de Reynolds horizontal). On suppose cette condition réalisée dans la suite.
- 5) Justifier que sous les mêmes hypothèses, le terme d'instationnarité peut être également négligé.
- 6) Etablir que la pression p est en première approximation une fonction de x et y .
- 7) Le tenseur des contraintes est

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

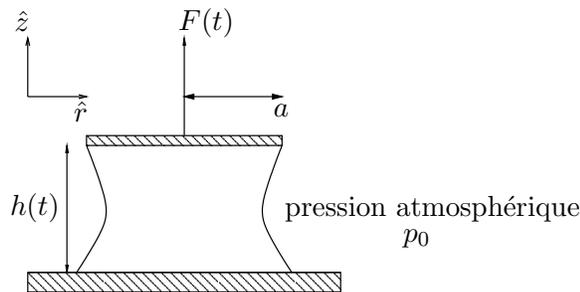
En déduire qu'en première approximation, les termes non diagonaux sont négligeables devant les termes diagonaux, eux-mêmes dominés par la contribution due à la force de pression.

II - Calcul d'adhérence

Dans un écoulement de film mince en régime permanent avec $h/L \ll 1$ et $\text{Re} (h/L)^2 \ll 1$ on a obtenu les équations locales :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} p &= \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{u} & \text{avec } \vec{u}(x, y, z) &= (u(x, y, z), v(x, y, z)) \quad \text{et } p(x, y) \\ \text{div } \vec{u} &= 0 \\ T_{ij} &= -p \delta_{ij} \end{aligned}$$

On considère un disque de rayon a placé parallèlement à un plan rigide. L'espace entre ces deux surfaces occupé par un fluide visqueux, est séparé par une distance $h(t)$ qui varie lorsqu'on applique une force ascendante $F(t)$ sur le disque.



Dans cette seconde partie, on souhaite obtenir l'expression de la force $F(t)$ en fonction de l'épaisseur du film $h(t)$. On cherche une solution bidimensionnelle du champ de vitesse $\vec{u} = u_r(r, z, t)\hat{r} + u_z(r, z, t)\hat{z}$. \hat{r} et \hat{z} sont les vecteurs unitaires radial et axial ; u_r et u_z les composantes radiale et axiale de la vitesse en coordonnées cylindriques.

On admettra qu'on peut utiliser le modèle permanent de l'écoulement rampant du film mince avec les grandeurs caractéristiques telles que $h \ll L$ et $\text{Re} h^2 \ll L^2$, et que l'on peut ainsi négliger le terme de convection locale en $\partial \vec{u} / \partial t$ devant le terme de viscosité en $\nu \nabla^2 \vec{u}$.

- 1) Ecrire les trois équations locales reliant $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$, $p(r, t)$ ainsi que les conditions aux limites sur u_r , u_z et p . On rappelle l'expression de la divergence

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} u_z.$$

- 2) On veut calculer la pression $p(r, t)$ en $z = h(t)$ et en r .
 - a) Calculer u_r en fonction de $\partial p / \partial r$, z et h en tenant compte des conditions aux limites.
 - b) Calculer u_z en fonction de $\partial p / \partial r$, r , z et h à l'aide de l'équation d'incompressibilité en tenant compte de la condition aux limites en $z = 0$.
 - c) Dédire la relation reliant $\partial p / \partial r$ aux grandeurs r et $h(t)$ en utilisant la condition aux limites sur u_z en $z = h(t)$.
 - d) Intégrer l'équation en $p(r, t)$ en tenant compte des conditions aux limites sur la surface du fluide en contact avec l'air.
- 3) Calculer la force d'adhérence par unité de surface exercée par le fluide sur le disque.

4) AN. On donne

$$\left. \begin{aligned} h &= 0,1 \text{ mm} \\ \frac{dh}{dt} &= 1 \text{ mm s}^{-1} \\ a &= 1 \text{ cm} \\ \nu &= 1,004 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \\ \mu &= 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ N s m}^{-2} \end{aligned} \right\} \text{ pour l'eau à } 20^\circ \text{ C}$$

- a) Vérifier que les conditions d'écoulement rampant dans le film mince sont vérifiées.
- b) Calculer la force d'aspiration par unité de surface.

9 Ecoulement de Poiseuille et gradient de pression oscillant

Soit un fluide visqueux, illimité dans les directions Ox et Oz , incompressible et de densité ρ . On notera μ sa viscosité dynamique, $\nu = \mu/\rho$ sa viscosité cinématique, P la pression et (u, v, w) les composantes du champ de vitesse sur les axes Ox , Oy et Oz . On supposera que l'action de la pesanteur est négligeable.

On se propose d'étudier des écoulement dans le plan xOy , invariants par translation selon Oz et dont les lignes de courant sont parallèles à Ox .

1/ Donner la forme du champ des vitesses qui découle des hypothèses de travail dans lesquelles on se place. On utilisera également avec profit la conservation de la masse.

2/ Montrer que l'équation de Navier-Stokes permet alors d'établir que la pression P ne dépend que de x et t et qu'ainsi l'équation du mouvement se découple et peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = G(t) \quad \text{et} \quad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} = G(t) . \quad (1)$$

3/ On considère désormais une configuration où le fluide est compris entre deux parois planes immobiles situées en $y = \pm a$ et on impose un gradient de pression de la forme $G(t) = \text{Re} \{-G_0 e^{-i\omega t}\}$ (attention au signe). Cette forme de $G(t)$ et les résultats de la question (1) permettent de chercher une solution pour le champ de vitesse sous la forme $u(y, t) = \text{Re} \{u_0(y) e^{-i\omega t}\}$; $u_0(y)$ étant une amplitude complexe. Ecrire et résoudre l'équation dont u_0 est solution. On pourra poser $k = (1 - i)/\delta$ avec $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$.

4/ On se place tout d'abord dans la limite "basse fréquence" où $|ka| \ll 1$ (c'est à dire $a \ll \delta$). Montrer que l'on retrouve un profil de Poiseuille oscillant en phase avec le gradient de pression.

5/ Dans la limite $|ka| \gg 1$ (c'est à dire $a \gg \delta$), montrer que le profil $u_0(y)$ est presque constant, sauf au voisinage des parois dans une bande (une couche limite) dont on indiquera l'épaisseur. Tracer grossièrement l'allure de $|u_0(y)|$. Montrer que le fluide se comporte dans presque tout l'espace comme un fluide parfait soumis à la densité volumique de force $-G(t)$. Expliquer ce phénomène par un raisonnement simple portant sur le temps d'établissement de la couche limite. Retrouver l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite par un calcul élémentaire (on rappelle que la vorticité diffuse en un temps t sur une distance de l'ordre de $\sqrt{\nu t}$).

6/ Lorsque $|ka| \gg 1$ on cherche à retrouver le profil de vitesse de manière approchée. On écrit d'après la question précédente et dans l'esprit de la couche limite :

$$u_0(y) = \frac{iG_0}{\rho\omega} + v_+(y) + v_-(y), \quad (2)$$

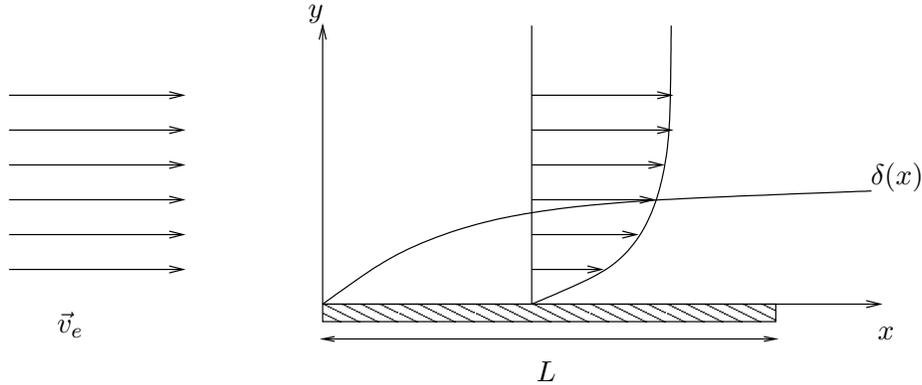
v_{\pm} n'ayant de valeur notable qu'au voisinage de $y = \pm a$. On impose les conditions limites de manière approchée en écrivant

$$v_{\pm}(y = \pm a) = -\frac{iG_0}{\rho\omega} \quad \text{et} \quad v_{\pm}(y) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad (a - (\pm)y) \gg \delta. \quad (3)$$

Montrer qu'on obtient $v_{\pm}(y) = -\frac{iG_0}{\rho\omega} \exp\{k(-a \pm y)\}$. Donner alors la forme de la solution approchée $u_0(y)$ ainsi obtenue. Montrer que cette solution peut être obtenue directement en faisant une approximation simple dans l'expression exacte de $u_0(y)$.

10 Traînée sur une plaque (méthode de von Kármán)

Une mince plaque plane immobile est placée sous incidence nulle dans un écoulement de champ de vitesse uniforme $\vec{v}_e = U_e \vec{\nabla}x$ de nombre de Reynolds $Re = U_e L / \nu \gg 1$. L est la dimension longitudinale de la plaque et ν la viscosité cinématique du fluide incompressible. Il se forme une région de transition d'épaisseur $\delta(x)$ près de la plaque, où le champ de vitesse bidimensionnel se met sous la forme $\vec{v}(x, y) = u(x, y) \vec{\nabla}x + v(x, y) \vec{\nabla}y$.



On désire calculer la force de traînée subie par la plaque en utilisant l'équation intégrale de von Kármán.

I. Equation intégrale approchée de von Kármán

On rappelle la forme des équations de Prandtl et les conditions aux limites dans la couche limite pour $x > 0$ et $0 \leq y \leq \delta(x)$ pour l'écoulement laminaire permanent d'un fluide incompressible :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{équation du mouvement longitudinale}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{équation de continuité}$$

$$\vec{v}(x, y = \delta(x)) \simeq U_e \vec{\nabla}x$$

$$\vec{v}(x, y = 0) = 0$$

En déduire par continuité la condition aux limites portant sur $\partial_y u$ en $y = \delta(x)$, puis la condition aux limites sur $\partial_y^2 u(x, y)$ en $y = 0$. On note $\partial_y \equiv \partial/\partial y$.

1) Montrer que le terme convectif de l'équation du mouvement est égal à $\partial_x(u^2) + \partial_y(uv)$.

2) Intégration de l'équation du mouvement entre $y = 0$ et $y = \delta(x)$.

a) Etablir la relation de Leibnitz

$$\frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} f(x, y) dy = \left[\frac{dg(x)}{dx} \right] f[x, g(x)] + \int_0^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy,$$

que l'on peut considérer comme une version unidimensionnelle du théorème du transport de Reynolds.

b) Montrer que

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial(uv)}{\partial y} dy = -U_e \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

c) Etablir la relation

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

d) En déduire la forme intégrale des équations de Prandtl :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{\delta(x)} [u - U_e] u dy \right\} = -\nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

II. Épaisseur de la couche limite et force de traînée subie par la plaque

On suppose que dans la couche limite ($0 \leq y \leq \delta(x)$), la composante longitudinale de la vitesse prend la forme simple

$$u(x, y) = U_e \sin \left[\frac{\pi y}{2\delta(x)} \right].$$

- 1) Cette expression de la composante $u(x, y)$ ainsi que $\partial_y u(x, y)$ et $\partial_y^2 u(x, y)$ vérifient-elles les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = \delta(x)$?
- 2) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\delta(x)$ en utilisant la forme intégrale des équations de Prandtl de la couche limite. On rappelle que $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$. Calculer $\delta(x)$ puis $\delta(x)/x$ et comparer avec le calcul exact de Blasius.
- 3) Calculer la contrainte de cisaillement $\tau_0(x)$ exercée par le fluide sur la plaque puis sa valeur moyenne $\langle \tau_0 \rangle$ sur une plaque d'extension L le long de l'écoulement. On exprimera $\tau_0(x)$ et $\langle \tau_0 \rangle$ en fonction de la densité d'énergie cinétique $\rho U_e^2/2$ et du nombre de Reynolds.
- 4) De l'eau s'écoule le long d'une plaque plane avec une vitesse en amont de 0.02 m/s. Déterminer la vitesse à une distance de 10 mm de la plaque et à une abscisse de 1,5 m et 15 m du bord.

On donne la viscosité cinématique de l'eau à $15^\circ C$: $\nu = 1,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et on rappelle que le régime de l'écoulement est laminaire pour $Re < 3 \cdot 10^5$.

11 Dynamique d'étalement d'une goutte visqueuse

D'après l'examen de Novembre 1999

A l'instant $t = 0$, une goutte d'un liquide non volatil de volume V est déposée sur un substrat plan horizontal et immobile. On se place dans la situation du mouillage total, où sous l'action de la gravité, la goutte s'étale complètement jusqu'à former un film extrêmement mince. On se propose d'étudier la dynamique de l'étalement pour un liquide newtonien incompressible. La goutte est supposée avoir à tout instant une symétrie de révolution autour de l'axe Oz et on adopte le système (r, z) des coordonnées cylindriques. On note $R(t)$ le rayon à l'instant t et $h(r, t)$ le profil de l'interface entre le liquide et l'air (voir la figure). En tout point de l'interface on a $h \ll R$, et on néglige les forces de tension superficielle.

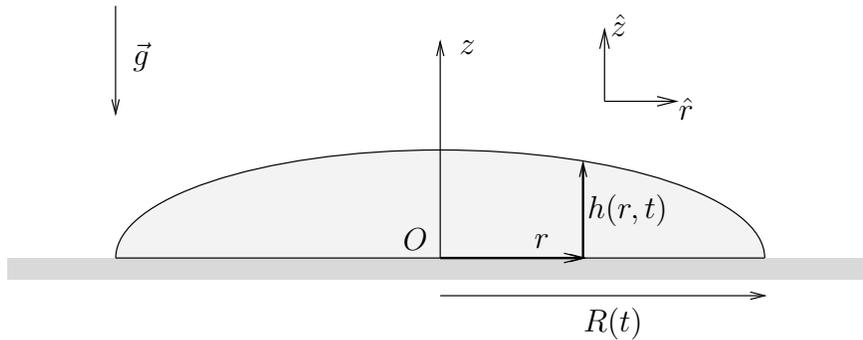


Figure 1: Etalement d'une goutte axisymétrique sur le plan $z = 0$

Soient u et w les composantes radiales et verticales du champ de vitesse de la goutte :

$$\vec{v}(r, z, t) = u(r, z, t) \hat{r} + w(r, z, t) \hat{z}.$$

La masse volumique du liquide est ρ et sa viscosité cinématique ν .

- 1) A l'aide de l'équation de continuité, établir que l'ordre de grandeur de w est négligeable devant celui de la composante horizontale u .
- 2) a) Montrer que les termes instationnaire $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ et inertiel $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ sont du même ordre de grandeur.
b) A quelle condition peut-on négliger les termes précédents dans l'équation de Navier-Stokes ? Dans toute la suite, on supposera cette condition remplie (approximation quasi-stationnaire).
- 3) En notant $P(r, z, t)$ la pression, justifier que l'équation d'évolution de u se met sous la forme

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \simeq \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1)$$

- 4) En considérant une particule fluide située à l'interface liquide/air, établir la relation entre $\frac{Dh}{Dt}$ et $w(r, z = h, t)$. En déduire celle entre $\frac{\partial h}{\partial t}$, $u(r, z = h, t)$, $w(r, z = h, t)$ et $\frac{\partial h}{\partial r}$.

5) En intégrant l'équation de continuité sur l'épaisseur de la goutte, en déduire :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \int_0^{h(r,t)} u(r, z, t) dz \right] = 0.$$

6) On admet que la pression à l'intérieur de la goutte suit une loi hydrostatique. Si P_0 est la pression du gaz à l'extérieur de la goutte et g l'accélération de la gravité, écrire la forme de $P(r, z, t)$.

Calculer le rayon de courbure de la goutte en supposant qu'elle a la forme d'une calotte sphérique d'épaisseur h et de rayon R . Dans quelle(s) condition(s) est-il légitime de négliger les forces de tension superficielle ?

7) Intégrer l'équation (1) pour obtenir la vitesse radiale $u(r, z, t)$. On admettra que la contrainte de cisaillement visqueux à l'interface liquide/air (de viscosité négligeable) est donnée par

$$\sigma_{rz} = \rho\nu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h}.$$

Que vaut σ_{rz} ? Tracer l'allure du profil vertical de la vitesse radiale.

8) En déduire l'équation non linéaire d'évolution vérifiée par h :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{g}{3\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[rh^3 \frac{\partial h}{\partial r} \right]. \quad (2)$$

9) Pour un profil solution de l'équation (2), que l'on cherche autosimilaire de la forme $h(r, t) = H(t)f(X)$ (où $X = r/R(t)$, H et f sont des fonctions inconnues), on souhaite établir la loi de variation de R avec le temps.

a) Quelle est la relation entre $R(t)$, $H(t)$ et le volume V ? En déduire la relation entre $\frac{dR}{dt}$ et $\frac{dH}{dt}$.

b) En évaluant (2) pour $r \rightarrow 0$ et en s'aidant de la condition aux limites $\frac{\partial h}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$, établir finalement que R croît comme t^α . Déterminer l'exposant α .

10) Justification des hypothèses faites :

a) Discuter la validité de l'approximation hydrostatique pour la pression.

b) Le modèle proposé pour décrire l'étalement est-il valable aux temps "longs" ou "courts" de l'évolution ? Pourquoi ? Que se passe-t-il aux temps très longs ?

c) Que se passe-t-il au niveau de la ligne triple ?

Formulaire :

Pour le champ de vitesse $\vec{v} = u(r, z, t) \hat{r} + w(r, z, t) \hat{z}$, on a

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

et la composante radiale du laplacien s'écrit

$$\hat{r} \cdot \Delta \vec{v} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

12 Instabilité de l'imprimeur

D'après l'examen de Novembre 2000

Dans certains procédés industriels, intervenant notamment dans la fabrication du papier, des suspensions de particules sont appliquées sur un substrat. Cette méthode d'enduction peut être étudiée dans la situation où un fluide est confiné entre deux cylindres d'axes parallèles légèrement excentrés. Nous considérerons la géométrie représentée sur la figure 1-a) dans laquelle le cylindre extérieur de rayon R_e est immobile tandis que le cylindre intérieur de rayon R_i est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe fixe : sa périphérie se déplace à la vitesse U et entraîne de ce fait le liquide (ici, un fluide newtonien incompressible) situé dans l'espace intersticiel.

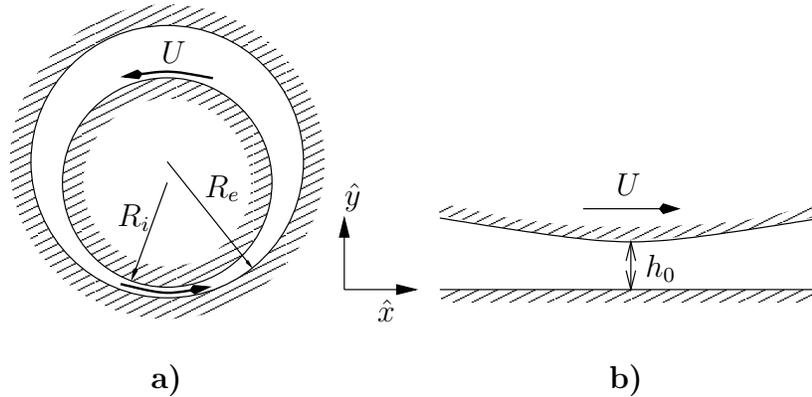


Figure 1: **a)** Représentation des deux cylindres excentrés. Le cylindre intérieur de rayon R_i est en rotation autour de son axe tandis que le cylindre extérieur (rayon R_e) est immobile. **b)** Vue du système au voisinage du point de séparation minimale entre les rouleaux.

Nous nous limiterons à l'étude de l'écoulement induit au voisinage de la zone de séparation minimale entre les deux rouleaux dont les rayons sont tous deux supposés grands devant l'épaisseur de la couche de liquide (*i.e.* $h(x) \ll R_i$ et R_e). La force de pesanteur sera négligée ; on note ρ la masse volumique du fluide et ν sa viscosité cinématique.

1) Géométrie du système

On introduit un système de coordonnées cartésiennes comme indiqué sur la figure 1-b). Les hypothèses précédentes autorisent à raisonner comme si l'écoulement avait lieu entre un plan immobile situé en $y = 0$ et une parabole $y = h(x)$ dont la surface se déplace tangentiellement à la vitesse $U\hat{x}$ [voir la figure 1-b)]. En plaçant l'origine des coordonnées x au point de séparation minimale où $h(x) = h_0$, montrer que l'épaisseur de la couche de liquide se met sous la forme

$$h(x) = h_0 + \frac{x^2}{2R}. \quad (1)$$

On explicitera la valeur de R .

2) Approximation de lubrification

L'approximation (1) n'est valable que lorsque l'étendue du film liquide dans la direction x , notée L , est faible devant le rayon des cylindres. On suppose également que dans la zone d'étude, le film reste mince, c'est-à-dire que $h(x) \ll L$.

- a) Estimer grossièrement le nombre de Reynolds associé à une expérience de laboratoire pour laquelle $R_i = 5$ cm, $R_e = 6$ cm, $h_0 = 0.1$ mm avec un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-4}$ m²/s et une vitesse tangentielle d'entraînement $U = 10$ cm/s.
- b) Montrer que la composante verticale u_y du champ de vitesse \vec{u} du fluide est négligeable devant la composante horizontale u_x .
- c) Estimer l'ordre de grandeur des différents termes apparaissant dans l'équation du mouvement (excepté le gradient de pression). Quelles sont en conséquence les approximations que l'on peut faire pour simplifier cette équation ?
- d) Montrer que le champ de pression P dépend, en première approximation, d'une *unique* variable d'espace que l'on précisera.

3) Champ de vitesse

Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par la vitesse u_x ? En déduire la relation

$$u_x = \alpha y(y - h) + \beta y$$

où l'on précisera le sens des fonctions α et β , qui dépendent de x .

4) Caractéristiques de l'écoulement

- a) Donner l'expression du débit de fluide Q entre les deux rouleaux (débit par unité de longueur dans la direction z).
- b) En déduire que le gradient de pression se met sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{6\rho\nu U}{h^2} \left(1 - \frac{\bar{h}}{h}\right), \quad (2)$$

où \bar{h} est l'épaisseur du film pour laquelle $\partial P/\partial x$ s'annule.

- c) La résolution complète de (2), non demandée, donnerait $\bar{h} \simeq 1.3 h_0$. Tracer qualitativement les profils de pression et de vitesse. Quels en sont les points remarquables ?

5) Phénomène de lubrification

- a) Quel est l'ordre de grandeur des variations de la pression à l'intérieur du film liquide ? En déduire l'ordre de grandeur de la force verticale F_\perp subie par le cylindre tournant pour les $x < 0$ (à exprimer en fonction de ν , ρ , U , h_0 , R et par unité de longueur dans la direction z).
- b) Estimer de même l'ordre de grandeur de la force visqueuse F_\parallel exercée sur le cylindre intérieur. Justifier le rôle de lubrifiant joué par le film liquide.
- c) Comparer les résultats précédents (en particulier le rapport F_\parallel/F_\perp) à la situation de friction "sèche" où deux corps solides ont un mouvement de glissement relatif.

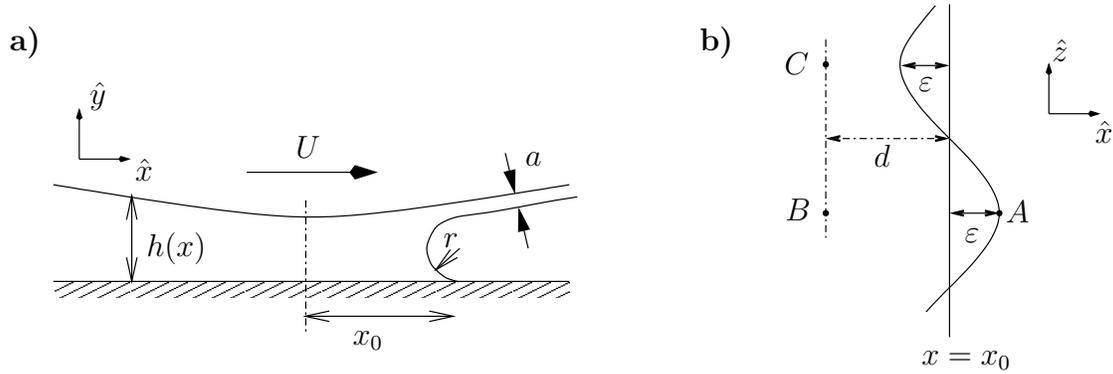


Figure 2: **a)** Vue schématique du ménisque non perturbé, dans un plan perpendiculaire à l'axe des rouleaux. **b)** Perturbation sinusoïdale du ménisque, dans le plan xOz , par rapport à la position $x = x_0$ (avec $\varepsilon \ll x_0$). L'axe z est parallèle à l'axe des cylindres.

6) Stabilité de l'écoulement

La position du ménisque est définie par $x = x_0$. On admet que son rayon de courbure $r(x_0)$ est tel que $r = h(x_0) - a$ où a est l'épaisseur supposée constante de la pellicule de liquide entraînée par le rouleau tournant [voir la figure 2-a)]. On s'intéresse désormais à la stabilité du ménisque qu'une perturbation, représentée sur la figure 2-b), amène à la position $x = x_0 + \varepsilon \sin(z/\lambda)$

- a)** Si A désigne un point où le ménisque s'est avancé de ε , montrer que la pression en B placé à une distance d derrière la ligne non perturbée s'écrit (on note P_0 la pression atmosphérique ambiante et γ la tension superficielle du liquide) :

$$P_B = P_0 - \frac{\gamma}{r(x_0)} + \frac{\varepsilon\gamma}{r^2(x_0)} \frac{dh}{dx} - (d + \varepsilon) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\varepsilon\gamma}{\lambda^2}.$$

- b)** Quelle est la pression au point C situé à une distance $d - \varepsilon$ derrière le ménisque ?
c) En déduire la condition de stabilité du ménisque, dans la limite où la longueur d'onde $2\pi\lambda$ de la perturbation est arbitrairement grande. Quelle est l'équation qui régit la position critique x_c à partir de laquelle le ménisque devient instable ? On pourra faire intervenir le nombre capillaire $Ca = \rho\nu U/\gamma$.

- 7)** A quel moment aurait-on pu évoquer l'apparition possible d'un phénomène de cavitation ?

◇

L'instabilité que nous avons mise en évidence, dite "instabilité de l'imprimeur", apparaît pour les vitesses d'entraînement élevées ; elle se traduit par une modulation de l'épaisseur du film entraîné avec le rouleau tournant. Cet effet, qui peut être indésirable pour les applications industrielles, est d'autant plus marqué que la viscosité du liquide est élevée et sa tension de surface faible. La viscosité n'a donc pas toujours pour effet d'atténuer les perturbations puisqu'elle constitue ici le moteur de l'instabilité.

13 Pour une cuiller de miel...

D'après l'examen de Novembre 2001

... ou quelle masse maximale de liquide visqueux peut-on entraîner en régime permanent sur une petite cuiller tenue horizontale et en rotation autour de son manche à une fréquence donnée ? Le but de ce problème est de répondre à cette question, et par souci de simplicité, nous modéliserons la cuiller par un cylindre horizontal de rayon a , en rotation autour de son axe noté Oz , à une vitesse angulaire Ω . On suppose le système invariant par translation dans la direction z . Une mince couche de liquide newtonien incompressible de masse volumique ρ et de viscosité cinématique constante ν enrobe le cylindre (voir la figure 3). L'accélération de la pesanteur est notée g , et on travaille dans le système (r, θ, z) des coordonnées cylindriques (un formulaire est joint en annexe). La surface libre du liquide a pour équation $r = a + h(\theta, t)$ et la condition $|h(\theta, t)| \ll a$ est supposée toujours vraie. En particulier l'épaisseur moyenne h_0 du film liquide, définie par

$$h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta, t) d\theta$$

est négligeable devant a . On s'intéresse dans un premier temps et jusqu'à mention explicite du contraire, aux écoulements stationnaires possibles.

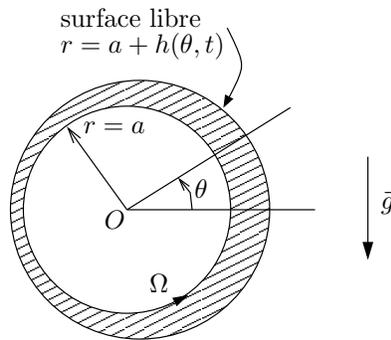


Figure 3: Coupe du système dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz du cylindre. L'angle θ des coordonnées cylindriques est mesuré par rapport à l'horizontale et r désigne la distance à l'axe Oz . Le liquide enrobant le cylindre est représenté par la partie hachurée du dessin. Le cylindre d'équation $r = a$ tourne autour de Oz à la vitesse angulaire Ω , dans le sens indiqué (sens trigonométrique).

- 1) Rappeler l'équation de Navier-Stokes gouvernant le comportement du champ de vitesse \vec{u} du fluide.
- 2) On note \hat{r} et $\hat{\theta}$ les vecteurs unitaires respectivement radiaux et orthoradiaux des coordonnées cylindriques, et l'on écrit le champ de vitesse sous la forme

$$\vec{u} = w \hat{r} + v \hat{\theta}. \quad (1)$$

A l'aide du formulaire, montrer que l'ordre de grandeur W des variations de la composante radiale w au sein du fluide est négligeable devant l'ordre de grandeur des variations de v , noté V . On supposera "douces" les variations de h , c'est-à-dire que l'ordre de grandeur de $h(\theta, t)$ ainsi que de $\partial h / \partial \theta$ est donné par h_0 , pour toutes les valeurs de θ .

- 3) L'ordre de grandeur de v est donné par la vitesse de rotation $U = a\Omega$ de la périphérie du cylindre. L'ordre de grandeur V est-il relié *a priori* à U ? De même, l'ordre de grandeur W des variations de w est-il relié à l'ordre de grandeur de w lui-même ? On demande une réponse *succincte*. Par la suite, on supposera que U et V sont du même ordre de grandeur.
- 4) Estimer, en fonction de V , W , h_0 et a , l'ordre de grandeur de chacun des termes apparaissant après projection de $\nabla^2 \vec{u}$ sur la direction $\hat{\theta}$. Dans toute la suite, on ne gardera que le terme dominant dans l'expression de $\hat{\theta} \cdot \nabla^2 \vec{u}$.
- 5) A quelle condition (portant sur V , h_0 , ν et a) peut-on négliger le terme inertiel ($\vec{u} \cdot \text{grad}$) \vec{u} devant la force de viscosité ? On supposera ce critère réalisé pour poursuivre.
- 6) On néglige en outre les forces de tension superficielle et les forces de pression. Montrer que dans ces conditions, l'équation de Navier-Stokes se simplifie en

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = g \cos \theta. \quad (2)$$

- 7) Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par \vec{u} en $r = a$ et $r = a + h(\theta)$? On notera $\sigma'_{r\theta}$ la composante $r\theta$ du tenseur des contraintes visqueuses, et on négligera la viscosité de l'air ambiant.
- 8) On donne $\sigma'_{r\theta} = \rho\nu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$.
- a) Quel est le terme dominant dans l'expression précédente ?
- b) Montrer que la solution de l'équation (2) s'écrit

$$v(r, \theta) = a\Omega + \beta \frac{g \cos \theta}{2\nu} \left[(r - a)^2 - 2\gamma (r - a) h \right]. \quad (3)$$

On précisera l'expression des coefficients β et γ .

- c) Tracer l'allure du profil de vitesse $v - a\Omega$ pour différentes valeurs de θ .
- 9) Donner l'expression du débit $Q(\theta)$ à travers une section θ , où $Q(\theta) = \int_a^{a+h(\theta)} v dr$.
- 10) Pourquoi Q ne dépend-t-il pas de θ ? Préciser laquelle des quatre situations représentées sur la figure 4 est la plus susceptible de correspondre à la réalité expérimentale ?

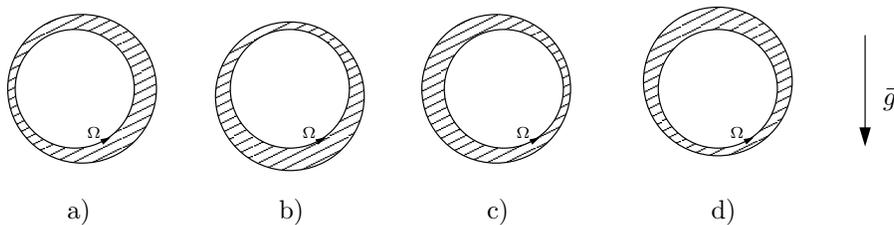
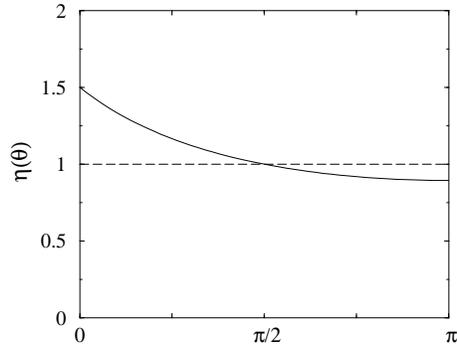


Figure 4: Différentes possibilités pour la position du “bourelet” de fluide enrobant le cylindre.

- 11) Calculer la vitesse $v_s(\theta)$ au niveau de la surface libre $r = a + h(\theta)$.
- 12) On introduit la vitesse réduite $\tilde{v} = v_s/U = v_s/(a\Omega)$.

- a) Montrer que \tilde{v} est solution de $(\tilde{v} - 1)(2\tilde{v} + 1)^2 = -2\alpha \cos \theta$. Donner l'expression de α en fonction de Q, U, g et ν .
- b) Quels sont les extrema de $f(\tilde{v}) = (\tilde{v} - 1)(2\tilde{v} + 1)^2$? Représenter graphiquement f .
- c) Montrer graphiquement que l'on ne peut trouver des solutions continues $\tilde{v}(\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ que pour $\alpha \leq \alpha^*$. On précisera la valeur de α^* . En déduire une borne supérieure pour le débit Q .
- 13) On considère dans cette question le cas critique $\alpha = \alpha^*$, et l'on introduit la hauteur adimensionnée $\eta(\theta) = U h(\theta)/Q$.

- a) Montrer que l'équation suivante est satisfaite : $(4/27) \cos \theta \eta^3 - \eta + 1 = 0$. La solution $\eta(\theta)$ correspondante est représentée ci-dessous. Retrouve-t-on ainsi le résultat de la question 10? Calculer de manière approchée η en $\theta = \pi$, à l'aide d'un développement perturbatif. Comparer à la valeur que l'on peut estimer sur le graphique.



- b) Une évaluation numérique de $\int_0^{2\pi} \eta(\theta) d\theta$ donne le résultat approché 6,641. En déduire la masse M du film liquide, par unité de longueur dans la direction z .
- 14) On s'intéresse ici à la situation $\alpha < \alpha^*$ pour laquelle on développe $\eta(\theta)$ en série entière :
- $$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{4}{27} \alpha \cos \theta \right)^n \quad (4)$$
- a) Calculer les coefficients a_n jusqu'à l'ordre $n = 2$ inclus.
- b) En déduire la relation entre U et la masse M du film liquide. Pour U fixé, quelles sont les valeurs possibles de M ?
- 15) A quelle(s) condition(s) était-il légitime de négliger le gradient de pression et les forces de tension superficielle dans la question 6?
- 16) Question subsidiaire, plus difficile : proposer une analyse du cas instationnaire pour étudier la stabilité des solutions précédentes.

Formulaire : pour le champ de vitesse $\vec{u} = w(r, \theta, t) \hat{r} + v(r, \theta, t) \hat{\theta}$, on a

$$\left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) = w \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rw)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Enfin, la projection orthoradiale du laplacien s'écrit

$$\hat{\theta} \cdot \nabla^2 \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

14 Enoncés divers