Probabilités et statistique

Corrigé succinct de l'examen de février 2005

Exercice I

Le nombre d'apparitions de pile suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ proche de $\mathcal{G}(np, \sqrt{np(1-p)})$ (ici $p = 1/2$ et $n = 100$). On en déduit l'intervalle de confiance $[np - \beta\sqrt{np(1-p)}, np + \beta\sqrt{np(1-p)}]$, avec $\beta = 1.96$, que l'on lit sur la table de la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{G}(0,1)$.

Application numérique : $P(X \in [40.2, 59.8]) = 0.95$, et dans le cas où $p = 0.6$, il vient $P(X \in [50.4, 69.6]) = 0.95$

Exercice II

X_n suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$, proche de la binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque $n \ll N$, et qui devient proche de la loi gaussienne lorsque $np > 5$ et $n(1-p) > 5$ (ici, cela se traduit par $n > 10$). Dans ces conditions, la valeur moyenne est proche de $n/2$ et l'écart-type proche de $\sqrt{n}/2$.

La valeur de β associée à un intervalle de confiance de 98% est 2.33 (cf table). Un intervalle de confiance à 98% pour p est donc $[0.513, 0.587]$. Pour un intervalle de confiance à 99.9%, on a $\beta = 3.27$. On souhaite donc ici avoir

$$\beta \frac{1}{2\sqrt{n}} < 10^{-2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 26700.$$

Exercice III

Si l'on ne modifie pas le choix initial, la probabilité de gain est 1/3. En revanche, avec la stratégie "on change de porte et on choisit celle non ouverte par le présentateur", on ne perd que lorsque le premier choix était le bon (probabilité 1/3), et on gagne à coup sûr si le premier choix était mauvais. La probabilité de gain est alors 2/3. Avec 4 portes, la situation serait légèrement différente, mais de nouveau, il serait conseillé de modifier son choix initial (ce qui est une manière de tenir compte de l'information fournie par le présentateur, information précieuse puisqu'elle indique une porte "mauvais choix").

Exercice IV

Un feu a une probabilité $45/105 = 3/7$ d'être vert. On note $X_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ feu est vert, $X_i = 0$ sinon. Tous les X_i sont des variables de Bernoulli, ou encore, des $\mathcal{B}(1, 3/7)$. La somme $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ suit donc une loi $\mathcal{B}(4, 3/7)$, dont l'espérance est $12/7 \simeq 1.7$ et la variance $4 * (3/7) * (1 - 3/7) = 48/49$.

Exercice V

cf examen de janvier 2005