Probabilités et statistiques

Exercice 1
Un couple a deux enfants (on suppose équiprobable d'avoir un garçon ou une fille). **a)** Quelle est la probabilité que le couple ait un garçon (au moins) ? **b)** On sait qu'il a une fille. Même question. **c)** Si l'ainée est une fille, même question.

Exercice 2
Une machine à écrire comporte 42 touches dont 26 lettres et 10 chiffres. Un singe tape au hasard (on admet que la probabilité de taper sur une touche ne dépend pas de la touche en question). Après 6 frappes, quelle est la probabilité d'ecrire le mot "espoir" ?

Exercice 3 : l'aiguille de Buffon
On trace sur un plan horizontal des droites parallèles et équidistantes de $2a$. On laisse tomber au hasard une aiguille de longueur $2l$ (avec $l \leqslant a$) sur ce plan. Quelle est la probabilité pour l'aiguille coupe l'une des parallèles ?

Exercice 4
Sur un trajet donné, on estime qu'un conducteur "sobre" a un risque sur 1000 d'avoir un accident de voiture. S'il est "ivre", on estime que le risque est de l'ordre de 1/50. On admet par ailleurs qu'un conducteur sur 100 conduit ivre.

1) Un véhicule s'engage sur le trajet en question. Quelle est la probabilité pour qu'à la fois le conducteur soit ivre et qu'il se produise un accident ?

2) S'il se produit un accident, quelle est la probabilité pour que le conducteur soit ivre ?

Exercice 5
Lors d'un interrogatoire, on note C l'événement "le suspect est coupable" et A l'événement –différent !– "le suspect a avoué". Soit $r = P(A|\overline{C})/P(A|C)$. Exprimer $P(C|A)$ en fonction de $P(C)$ et r. A quelle condition a t-on $P(C|A) > P(C)$? Interprétation et formulation en termes intelligibles.

Exercice 6
Soit $\Omega = [-1, 1]$ muni de la densité de probabilité uniforme. Soit la variable aléatoire

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & x \to x^2. \end{aligned}$$

Quelle est la probabilité $P(X \geqslant 1/4)$?

Exercice 7
Deux personnes se sont donné rendez-vous en un lieu précis, mais entre 18^{h} et 19^{h}, sans plus de précisions. Si aucune n'attend l'autre plus de 15 minutes, quelle est la probabilité qu'elles se rencontrent ?

Exercice 8

Les grains (supposés sphériques) constituant une poudre sont caractérisés par une distribution de volume
$$f(v) = \frac{1}{v_0} \exp(-v/v_0).$$
Suivant quelle loi leur diamètre est-il distribué ? Le diamètre moyen est-il égal au diamètre le plus probable ? Même question en ce qui concerne le volume.

Exercice 9

Soient x_1 et x_2 deux variables aléatoires de densité de probabilité jointe $f(x_1, x_2)$. On effectue le changement de variables $y_1 = x_1 + x_2$ et $y_2 = x_1 - x_2$. Quelle est la densité jointe du couple (y_1, y_2) ?

Exercice 10 : variables aléatoires gaussiennes

Voir l'énoncé de l'exercice V de l'examen d'Octobre 2000.

Exercice 11

Une tombola distribue des lots de 250 roupies avec probabilité 0.02, des lots de 1250 roupies avec probabilité 2.10^{-3} et des lots de 5000 roupies avec probabilité 2.10^{-4}. Quel est le prix minimum du billet pour que l'opération soit financièrement équilibrée **a)** en moyenne ? **b)** avec une confiance de un écart type ?

Exercice 12 : le paradoxe de Saint-Petersbourg

Un jeu consiste à lancer une pièce jusqu'à l'apparition de face. Si le résultat est obtenu au $n^{\text{ième}}$ lancer, le joueur empoche 2^n roubles. Evaluer l'espérance du gain, en notant p la probabilité d'apparition de face lors d'un lancer ($p \neq 1/2$ *a priori*).

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire continue de densité uniforme sur [-1,2]. Déterminer de deux manières différentes l'espérance de $Y = X^2$.

Exercice 14

A l'aide de la fonction génératrice $F(x) = (px + 1 - p)^n$, retrouver les expressions de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 15

Un entrepreneur possède trois autocars qu'il peut louer chaque jour pour la journée. Le nombre (noté X) de demandes de location d'un car pour une journée suit une loi de Poisson de paramètre 2.

1) Montrer qu'un jour sur 7 (à peu près !), toutes les demandes ne sont pas satisfaites.

2) Un mécanicien travaille seulement si un car au moins reste au garage. Quelle est la probabilité pour qu'il travaille un jour donné ?

3) Quel est le nombre moyen de demandes non satisfaites par jour ? Quel est le pourcentage moyen de cars utilisés chaque jour ?

4) Combien faudrait-il de véhicules pour que 98% des demandes au moins soient satisfaites ?

Exercice 16

Une entreprise achète des composants par paquets de 10. Sa technique de contrôle est de n'examiner que 3 des composants tirés au hasard, et de n'accepter le paquet que si aucun des composants testés n'est défectueux. Dans le cas d'école où 30% des paquets contiennent 4 composants à malfaçon, et les 70% restant n'en contiennent qu'un, quelle est la proportion de paquets rejetés ?

Exercice 17

Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée d'une grossesse suit une loi gaussienne de moyenne 270 jours et d'écart-type 10 jours. Un père supposé peut prouver son absence du pays entre le $290^{\text{ième}}$ et le $240^{\text{ième}}$ jour précédant l'accouchement. Quelle est la "probabilité qu'il soit le père" ?

Exercice 18

Soit X une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{G}(m, \sigma)$. Quelle est la valeur de a qui maximise $P(a \leqslant X \leqslant a+b)$? On suppose $b > 0$.

Exercice 19

Un examen se déroule sous la forme d'un questionnaire à choix multiple, où l'on pose 20 questions. Chaque question comporte quatre réponses possibles. Une réponse juste rapporte 1 point, une mauvaise 0. Le programme de l'examen comporte 100 questions parmi lesquelles on tire au hasard les 20 de l'examen. Un candidat a révisé une fraction p du programme. Il répond aléatoirement aux questions non révisées. On veut étudier la distribution de sa note N, de manière à déterminer la valeur minimale de p assurant la moyenne avec une probabilité "raisonnable". On introduit pour ce faire les variables aléatoires suivantes :

X, le nombre de questions révisées parmi les 20 de l'examen

Y, le nombre de bonnes réponses parmi les questions non révisées.

On peut remarquer que $N = X + Y$.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Quelle est la loi de Y sachant $X = x$?

3) En déduire la loi de N. Cette expression est trop compliquée pour que l'on puisse en déduire l'espérance $E[N]$ et la variance $V[N]$.

4) Calculer $E[N]$ et $V[N]$ à l'aide des théorèmes de l'espérance et de la variance totales. En déduire une valeur minimale de p assurant avec une forte probabilité la réussite à l'examen (on pourra se donner une confiance de $\pm$ deux écarts-type).

Exercice 20

Soit (X, Y) un couple de densité de probabilité jointe

$$\begin{aligned} h(x,y) &= 2 \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 1 \end{array} \right. \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

1) Établir les lois marginales de X et Y. Donner l'espérance et la variance de ces lois.

2) Établir les lois conditionnelles de Y à X fixé. Calculer l'espérance conditionnelle $E[Y|X]$ et la variance conditionnelle $V[Y|X]$. Vérifier les théorèmes de l'espérance totale et de la variance totale.

3) Calculer le rapport de corrélation $\eta^2_{Y|X}$ puis le coefficient de corrélation linéaire ρ.

Exercice 21

Soient X et Y deux variables aléatoires de POISSON indépendantes, de paramètres respectifs λ et μ. Quelle est la loi de probabilité de $Z = X + Y$?

Exercice 22

Des éléments optiques sont fabriqués avec un taux d'impuretés X. On prélève un échantillon de 100 éléments, sur lequel la moyenne empirique mesurée est $\overline{x} = 8.10^{-4}$, dans un système d'unités quelconque.

1) Donner un intervalle de confiance à 90% pour la valeur moyenne m de X, sachant[1] que l'écart-type de cette variable est $\sigma_X = 2.10^{-4}$.

2) Quelle est la taille minimale de l'échantillon à considérer pour connaître m à 90% de confiance avec une précision 5.10^{-5} ?

Exercice 23

On prélève 25 pièces dans une production industrielle de boulons. Une étude a montré au préalable que le diamètre des pièces suivait une loi gaussienne de moyenne $m = 10$ et d'écart-type $\sigma = 2$. Entre quelles bornes a t-on 90% de chances de trouver **a)** le diamètre moyen de l'échantillon **b)** l'écart-type empirique ?

Exercices 24

Un sondage effectué auprès de 400 habitants d'une ville indique qu'une personne sur deux est favorable au maire sortant. Ceci est-il compatible avec l'hypothèse suivant laquelle 46% des habitants lui sont favorables ?

[1]hypothèse peu réaliste ; la suite du cours montrera comment s'en passer en estimant empiriquement la variance...