

Modèles de théories de jeux en champs moyens appliqués à la réduction de propagation d'épidémie

Géraud Dupuy

– Laboratoire de physique théorique et modèles statistiques –
– Bâtiment Pascal 530 Université Paris-Saclay 91405 Orsay –

– Encadré par Denis Ullmo –

– Stage de recherche - Master Irène Joliot Curie première année –

– Effectué du 15 mai au 10 juillet –

Résumé

La pandémie du COVID-19 montre l'impact que les comportements individuels ont sur la propagation d'une maladie dans notre société. Dans le but de ralentir cette propagation, de nombreux gouvernements ont appliqué des politiques qui restreignent les contacts entre individus comme le confinement. Avec un modèle simple de type (Susceptibles, Infectés, Rétablis) et une approche inspirée de la théorie des jeux en champ moyen, il est possible de trouver un équilibre de Nash pour le taux de contact dans une population dans le but de limiter la pandémie. Ensuite le modèle sera affiné en rajoutant un seuil qui décrira les phénomènes de saturation des milieux médicaux. Finalement, on trouve un nouvel équilibre de Nash et on compare les résultats dans les deux cas.



école —————
normale —————
supérieure —————
paris — saclay ———

Table des matières

1	Introduction	1
2	La théorie des jeux en champs moyens	1
2.1	Quelques définitions et outils	1
2.2	L'équation d'Hamilton Jacobi discrète d'un MFG	3
2.3	Équilibre de Nash	4
3	Application à l'épidémiologie : réduction du taux de contact	4
3.1	Modèle SIR et point de vue sociétal	5
3.2	Point de vue individuel	5
3.3	Recherche d'un équilibre de Nash	6
3.4	Ajout d'un phénomène de saturation	6
3.5	Approche numérique	8
4	Conclusion, développements possibles et remerciement	13

1 Introduction

Au début du xx^e siècle, une nouvelle branche des mathématiques nommée théorie des jeux s'est développée. Celle-ci avait pour but d'étudier le comportement d'agents (ou joueurs) qui interagissent ensemble dans le cadre d'un jeu. L'un des buts récurrents de la théorie des jeux est notamment de trouver la stratégie optimale que doit appliquer un agent pour satisfaire ses objectifs et optimiser ses gains.

Dans de nombreuses disciplines, on a cherché à appliquer des modèles de cette théorie, notamment en économie. Seulement l'une des faiblesses de la théorie des jeux est sa difficulté à traiter un trop grand nombre d'agents, car il n'est plus alors possible de prendre en compte les interactions de chaque agent entre eux et d'en déduire la stratégie optimale. Puis dans les années 2000, des mathématiciens ont créé une méthode inspirée des approximations de type champs moyens de la physique statistique pour simplifier ce problème et décrire des jeux à très grand nombre de joueurs [7] [8]. Ce type d'approche sera nommée théorie des jeux à champs moyens, ou bien Mean Field Game (abrégé MFG par la suite).

Dans le même temps, on étudie depuis longtemps en épidémiologie la propagation d'une épidémie au sein de populations. L'épidémiologie étant naturellement un domaine où les comportements individuels peuvent faire émerger des comportements à grandes échelles, de nombreux modèles de MFG y seront appliqués, notamment sur le sujet de la vaccination. [4] [5] [6]

L'épidémie de COVID-19 ayant particulièrement bien illustré l'importance des comportements individuels pour contenir une épidémie, j'ai décidé d'orienter mon stage vers l'étude des stratégies de réductions des contacts dans la population selon plusieurs modèles, et leur impact sur la propagation de l'épidémie.

2 La théorie des jeux en champs moyens

Dans toute cette partie, l'étude présentée est largement inspirée de l'article [3] et va nous servir d'introduction au domaine que forme l'étude des MFG. Dans la sous-partie (2.1) on définit la base de ce qu'est un MFG et les objets centraux de cette théorie. Ensuite dans la sous-partie (2.2) on expose quelques résultats centraux pour finalement définir la notion clé d'équilibre de Nash dans la sous-partie (2.3)

2.1 Quelques définitions et outils

Soit un problème avec un très grand nombre N d'agents qui interagissent ensemble. Posons un ensemble des états possibles pour nos joueurs. Notons ici que les problèmes peuvent être très différents si l'ensemble des états possibles est continu (si par exemple l'état de l'agent est sa position) [11], ou si cet ensemble est discret (si par exemple l'état est l'appartenance ou non de l'agent à un ensemble)[3]. Dans les cas que nous détaillerons plus tard d'épidémiologie, le cas discret sera plus pertinent. C'est donc celui là que nous expliciterons dans cette partie.

On nomme donc $I_d = \{1, \dots, d\}$ l'ensemble des états possibles avec d le nombre d'états possibles. De même on va définir $\theta \in \mathcal{S}^d$ le vecteur densité d'agents. Ici \mathcal{S}^d est l'ensemble $[0, 1]^d$, et θ est le

vecteur dont la i -ème coordonnée θ^i donne la proportion de la population dans l'état $i \in I_d$. On fait l'hypothèse que le nombre N d'agents est suffisamment grand pour que θ puisse varier continuellement.

On déduit naturellement de cette définition les résultats suivants :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^d \theta^i = 1 \\ \theta^i \geq 0 \quad \forall i \in I_d \end{cases} . \quad (1)$$

Maintenant on peut définir la matrice des taux de transitions $\bar{\beta} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ où la coordonnée (i,j) donne le taux de transition de l'état i à l'état j . On obtiens donc l'équation de Kolmogorov dans le cas discret :

$$\frac{d\theta^i}{dt} = \sum_{j=1}^d \bar{\beta}_{ji} \theta^j . \quad (2)$$

À ce point là, si on connaît $\bar{\beta}(t)$ et qu'on connaît l'état initial θ_0 , on peut trouver l'évolution du système à tout instant. Maintenant, par analogie avec la physique statistique où l'on désigne une particule référence, on va définir un agent référence. On notera \mathbf{i}_t l'état dans lequel l'agent se trouve au temps t , et $\beta(t)$ ses taux de transitions qui peuvent être différents des taux de transitions $\bar{\beta}(t)$ du reste de la population. Ce $\beta(t)$ représentera la stratégie de cet agent. On notera la taux de transition vers l'état j pour notre agent de référence dans l'état i de la façon suivante : $\beta_j(i)$. L'idée est ici de dire qu'au cours de son évolution, il peut essayer d'influer sur ses changements d'états afin de profiter d'une situation optimale.

Et pour définir cette situation optimale, on va également définir une fonction coût qui va nous permettre par la suite de définir ce que coûte la stratégie à l'agent. L'objectif de ce joueur étant de minimiser ce coût (Certains MFG définissent plutôt un gain qu'il faut maximiser). Pour cela, on va séparer le coût en deux fonction.

D'un coté le coût *final* qui sera le coût que payera l'agent en fonction de son état à la fin de l'expérience. On nomme cette fonction $\psi : I_d \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et elle dépendra donc de \mathbf{i}_T et de $\theta(T)$ avec T le temps de fin de l'expérience. On supposera que le cout final est connu et servira de condition aux limites ultérieurement.

De l'autre côté on définit un coût *courant* qui va symboliser ce que devra payer l'agent en appliquant sa stratégie tout au long de l'expérience. on nomme cette fonction $c : I_d \times \mathcal{S}^d \times (\mathbb{R}_0^+)^d \rightarrow \mathbb{R}$ et on obtiendras donc $c(\mathbf{i}_t, \theta(t), \beta(t))$

On est maintenant prêt pour définir le coût total de l'expérience :

$$u_{\theta}^i(t, \beta) = \mathbb{E}_{\mathbf{i}_t=i}^{\beta} \left[\int_t^T c(\mathbf{i}_s, \theta(s), \beta(s)) ds + \psi^{i^T}(\theta(T)) \right] . \quad (3)$$

Et on définit donc la fonction valeur optimale comme suit :

$$u_{\theta}^i(t) = \min_{\beta} u_{\theta}^i(t, \beta) . \quad (4)$$

Notons la nécessité de l'espérance dans ce calcul. En effet, $c(\mathbf{i}_t)$ est un processus stochastique qui suit une chaine de Markov continue dans le temps tel que : $\mathbb{P}[\mathbf{i}_{t+dt} = j | \mathbf{i}_t = i] = \beta_j(i) dt + o(dt)$.

Ici on calcule l'espérance sur toutes les réalisations à stratégie donnée et en supposant l'état de départ i_t connu.

On a défini toutes les notions nécessaires à la théorie des jeux, maintenant on va exposer quelques idées et résultats centraux.

2.2 L'équation d'Hamilton Jacobi discrète d'un MFG

On peut montrer que le système suit un ensemble d'équation de type Hamilton Jacobi discrète. Pour cela, posons deux définitions.

Tout d'abord on définit l'opérateur de différence. Soit $\Delta_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ défini comme suit :

$$\Delta_i z = (z^1 - z^i, z^2 - z^i, \dots, z^d - z^i). \quad (5)$$

Puis on définit la transformée de Legendre généralisée de la fonction coût courant :

$$h(z, \theta, i) = \min_{\mu \in (\mathbb{R}_0^+)^d} [c(i, \theta, \mu) + \mu \cdot \Delta_i z]. \quad (6)$$

Ici le \cdot désigne le produit scalaire canonique entre deux vecteurs de $(\mathbb{R}_0^+)^d$. On notera par abus de notation $h(\Delta_i z, \theta, i)$ au lieu de $h(z, \theta, i)$, pour bien marquer que la différence se fait sur la i -ème coordonnée.

On peut montrer sous certaines hypothèses légères notamment sur la forme du coût courant (voir [3] pour plus de détail) que la fonction valeur optimale suit les d équations d'Hamilton Jacobi dans le cas discret :

$$-\frac{du^i}{dt} = h(\Delta_i u, \theta, i). \quad (7)$$

Notons que la seule condition aux limites que l'on connaisse pour résoudre ce problème n'est pas une condition initiale mais une condition finale. Donc les résolutions numériques devront se faire en parcourant le temps en sens inverse. La condition est la suivante :

$$u^i(T) = \psi^i(\theta(T)). \quad (8)$$

Notons qu'on peut également montrer que la stratégie optimale β^* qui donne la fonction valeur optimale est donnée par :

$$\beta^*(i, t) = \underset{\mu \in (\mathbb{R}_0^+)^d}{\text{Argmin}} [c(i, \theta(t), \mu) + \mu \cdot \Delta_i u(t)]. \quad (9)$$

Ces résultats donnent théoriquement une méthode pour trouver la stratégie optimale et son coût total. Même si cette méthode ne sera pas appliquée dans le reste des travaux de ce stage, elle est assez centrale pour comprendre certains aspects des MFG. Notons que pour l'instant on a complètement différencié la stratégie β du joueur de référence et la stratégie $\bar{\beta}$ du reste des joueurs. Mais si tout les joueurs sont considérés comme identiques, on ne peut plus considérer cela comme vrai.

2.3 Équilibre de Nash

Pour comprendre la nécessité de la notion d'équilibre de Nash, adoptons une vue de l'esprit avec une succession d'étapes $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas où tous les joueurs sont identiques, alors si à l'étape n notre joueur référence trouve une stratégie optimale β_n face à une stratégie de groupe $\bar{\beta}_n$, et bien on peut supposer que tous les joueurs voudront adopter β_n à l'étape $n+1$, on aura donc $\bar{\beta}_{n+1} = \beta_n$. Seulement β_n n'est pas forcément la stratégie optimale face à elle-même, donc on va chercher un β_{n+1} optimal. On a donc un processus itératif auquel il serait souhaitable de trouver un point fixe afin d'obtenir une solution durable. On nommera un tel point fixe un équilibre de Nash.

Formellement, un équilibre de Nash est une stratégie de groupe $\bar{\beta}$ telle que la stratégie individuelle optimale en réponse est $\bar{\beta}$. Plus précisément le taux de transition de l'état i à j au temps t est donné par :

$$\bar{\beta}_{ji}(t) = \beta_i^*(\Delta_j u(t), \theta(t), j). \quad (10)$$

Donc aux équations d'Hamilton Jacobi discrètes s'ajoute l'équation de Kolmogorov discrète pour obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\theta^i}{dt} = \sum_{j=1}^d \theta^j \beta_i^*(\Delta_j u, \theta, j) \\ -\frac{du^i}{dt} = h(\Delta_i u, \theta, i) \end{cases} \quad (11)$$

À ces équations s'ajoutent également les deux conditions aux limites :

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ u^i(T) = \psi^i(\theta(T)) \end{cases} \quad (12)$$

Notons que la particularité de ce problème, c'est qu'on a des conditions aux limites initiales et finales. De fait la résolution doit incorporer un parcours du temps en sens direct et en sens inverse. Ce problème est nommé problème à valeur initiale-finale, ou initial-terminal value problem (ITVP). Une solution à un tel problème est nommée solution du MFG pour T , θ_0 , c et ψ donnés.

Il est généralement possible de démontrer que des équilibres de Nash existent sans faire d'hypothèses extrêmement lourdes, en revanche l'unicité de tels équilibres est souvent difficile à montrer voire fausse et demande des hypothèses assez fortes, notamment sur la forme du coût courant. De plus, étant donné la nature de l'ITVP, la résolution numérique peut être assez complexe à mettre en place pour trouver un équilibre de Nash.

3 Application à l'épidémiologie : réduction du taux de contact

Dans cette partie, toute l'étude théorique présentée de la sous-partie (3.1) à la sous-partie (3.3) s'inspire largement de l'article [2] et définit le problème épidémiologique avant d'essayer de voir si il est possible d'optimiser une stratégie de réduction de contact sociaux pour lutter contre une épidémie et de trouver un équilibre de Nash. Dans la sous-partie (3.4), on affinera le modèle en prenant en compte un phénomène de saturation des moyens médicaux qu'un agent a tout intérêt à éviter, et on tentera d'en dériver des résultats théoriques. Puis finalement dans la sous-partie (3.5), on présentera les résultats de simulations numériques effectuées dans les deux modèles.

3.1 Modèle SIR et point de vue sociétal

On propose en première approche un modèle SIR classique de l'épidémiologie. On suppose que la population est répartie dans trois états. Le premier état $S(t)$ est celui des personnes susceptibles de contracter la maladie, le second $I(t)$ est celui de celles qui sont actuellement infectées par la maladie, et le dernier $R(t)$ est celui de celles qui se sont rétablies. On suppose que l'évolution du modèle suit les équations suivantes :

$$\begin{cases} dS &= -\bar{\beta}(t).S(t).I(t) \\ dI &= \bar{\beta}(t).S(t).I(t) - \gamma.I(t) \\ dR &= \gamma I(t) \end{cases} . \quad (13)$$

Notons qu'on définit ici $(S, I, R) \in [0, 1]^3$ comme les populations normalisées. Ce modèle est très facile à résoudre si on connaît la population initiale (S_0, I_0, R_0) et si on connaît $\bar{\beta}$ et γ en fonction du temps. Pour l'étude qui suit, on supposera que notre maladie a un taux de rétablissement γ constant et sur lequel on ne peut pas influencer. Maintenant on suppose que $\bar{\beta}$ traduit à la fois des propriétés intrinsèques de la maladie, mais aussi quantifie les contacts entre individus. On se place donc dans le cas où un agent peut modifier son taux de contact individuel β . On définit $\bar{\beta}$ comme le taux de contact à l'échelle de la société et β comme le taux individuel.

3.2 Point de vue individuel

Traisons l'approche individuelle avec une approche probabiliste. Notons P_t^β la probabilité de l'individu d'avoir été infecté avant le temps t . On a :

$$dP_t^\beta = (1 - P_t^\beta)\beta_t I_t dt . \quad (14)$$

Notons que cette équation permet de retrouver simplement la dynamique donnant les termes en $\pm\bar{\beta}(t).S(t).I(t).dt$ dans le système (13) en supposant que les comportements globaux résultent de l'addition des comportements individuels.

Pour réduire l'étude, on suppose que $\beta_t \in [\beta_{min}, \beta_0]$. Ici β_0 représente le taux de contact naturel sans effort de réduction, et β_{min} représente le taux de contact minimal au delà duquel on ne peut pas descendre. On modélise maintenant les efforts de l'agent pour réduire ses interactions sociales par un coût courant $c : [\beta_{min}, \beta_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$. On définit également r_I le coût que représente le fait d'être infecté.

Notons que ces coûts ne sont pas forcément exprimés monétairement, mais par exemple grace aux échelles QALY (quality-adjusted life year) ou DALY (Disability Adjusted Life Years) [10]. Ces échelles servent à quantifier l'impact d'une maladie ou d'un acte médical sur la vie d'un patient, en calculant la perte en espérance de vie en bonne santé.

On peut finalement obtenir le coût total en notant τ le moment où l'agent devient infecté et T la durée de l'épidémie :

$$C(\beta, \tau) = \int_0^{\min(\tau, T)} c(\beta_s) ds + r_I \mathbb{1}_{\tau \leq T} . \quad (15)$$

Ici, le premier terme correspond au coût de l'effort de l'agent tant qu'il limite ses contacts, donc soit jusqu'à la fin de l'épidémie, soit jusqu'à être infecté. En effet quand il est infecté, d'un point de vue égoïste, il n'a aucun intérêt à baisser son taux de contact. Le deuxième terme traduit le coût engendré par le fait de se faire infecter avant la fin de l'épidémie.

τ étant donné par un processus stochastique et dépendant à priori de β et $\bar{\beta}$ (par l'intermédiaire de I_t), la fonction valeur qui va nous intéresser est :

$$\mathfrak{C}(\beta, \bar{\beta}) = \mathbb{E}[C(\beta, \tau)] = \mathbb{E} \left[\int_0^{\min(\tau, T)} c(\beta_s) ds + r_I \mathbb{1}_{\tau \leq T} \right]. \quad (16)$$

Et donc à stratégie $\bar{\beta}$ donnée on cherche la stratégie β^* qui vérifie $\beta^* = \underset{\beta \in \mathcal{B}}{\text{Argmin}} \mathfrak{C}(\beta, \bar{\beta})$. Ici \mathcal{B} est l'ensemble des stratégies admissibles : $\mathcal{B} = \{\beta : [0, T] \rightarrow [\beta_{\min}, \beta_0], \beta \text{ mesurable}\}$

3.3 Recherche d'un équilibre de Nash

En adaptant la définition de l'équilibre de Nash donnée précédemment, on peut dire qu'un taux de contact β^* et la dynamique épidémique associée (S^*, I^*, R^*) forment un équilibre de Nash si :

- 1) Il est optimal pour chaque individu de choisir la stratégie β^* face à une dynamique épidémique décrite par (S^*, I^*, R^*) . On appelle cette condition "la rationalité individuelle"
- 2) Quand la population a un taux de contact $\beta = \beta^*$, alors la dynamique épidémique est (S^*, I^*, R^*) . On appelle cette condition "la cohérence sociétale"

On peut noter que chercher un équilibre de Nash revient à chercher un point fixe à l'application suivante :

$$\mathcal{T} : \bar{\beta} \in \mathcal{B} \rightarrow \beta^* \in \left\{ \underset{\beta \in \mathcal{B}}{\text{Argmin}} \mathfrak{C}(\beta, \bar{\beta}) \right\}. \quad (17)$$

En vue de savoir si cet équilibre de Nash existe, décrivons un peu plus la forme de notre fonction coût $c(\beta)$. On la suppose de classe \mathcal{C}^2 , décroissante et de dérivée seconde strictement positive sur \mathcal{B} . L'idée derrière cette hypothèse est qu'il coûte évidemment à l'individu de réduire ses contacts, mais aussi que plus il les réduit, plus cela lui coûte de les réduire encore jusqu'à β_{\min} .

Avec ces hypothèses relativement naturelles il est possible de prouver l'existence d'un tel équilibre de Nash et il est possible de lancer des simulations numériques de types Euler explicite en suivant le schéma suivant :

$$\beta^{n+1} = \beta^n - h \nabla_1 \mathfrak{C}(\beta^n, \beta^n). \quad (18)$$

Ici ∇_1 désigne le gradient par rapport à la première coordonnée. On s'attend à trouver que le processus converge vers l'équilibre de Nash $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n = \beta_{\text{nash}}$

3.4 Ajout d'un phénomène de saturation

Jusqu'à maintenant, l'étude qui est présentée ici avait déjà été faite dans de précédents travaux comme [1] et [2], et le modèle SIR a pour avantage d'être facilement complété par l'ajout de nouveaux compartiments de population, ce qui est notamment fait avec un modèle SEIR [2] qui introduit un état intermédiaire E(t) de gestation du virus. Une autre amélioration étudiée est d'ajouter au modèle une division des compartiments entre symptomatiques et asymptomatiques [1]. Pour autant l'axe d'évolution que j'ai choisi de développer est de rajouter un phénomène de saturation des soins. L'idée est ici de ne plus considérer le coût de l'infection r_I comme étant constant, mais bien comme dépendant du temps de la façon suivante :

$$\begin{cases} r_I = r_I^0 \text{ si } I(t) \leq I^{sat} \\ r_I = r_I^{sat} \text{ si } I(t) > I^{sat} \end{cases} . \quad (19)$$

On espère induire l'idée que sur les périodes de temps où le nombre d'infectés dépasse le seuil I^{sat} , si r_I^{sat} est suffisamment grand devant r_I^0 , les individus adoptent une diminution brusque de leurs contacts sociaux qui pourrait se retranscrire sur le profil de $I(t)$ même dans d'autres périodes de temps.

L'une des premières idées fut d'essayer de réadapter la preuve de l'existence de cet équilibre de Nash présentée dans [2]. Cette preuve s'appuie sur le théorème de Schauder appliqué à \mathcal{T} , définie par (17), pour montrer que l'application possède un point fixe. Cette preuve n'a cependant pas pu être finalisée car il manquait un argument clé.

En préambule de la preuve on définit deux objets, la fonction valeur Π_t et la stratégie optimale β_{opt} . On pourrait dériver ses expressions des équations précédentes, mais on se contentera ici de les poser. Pour comprendre leur dérivation, on pourra se reporter à [2]

$$\Pi_t = \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \int_t^T \left(c(\beta_s) + r_I \beta_s I_s^{\bar{\beta}} \right) e^{-\int_t^s \beta_u I_u^{\bar{\beta}} du} ds . \quad (20)$$

$$\beta_{opt}(\Pi_t, I_t^{\bar{\beta}}) = \underset{\beta \in \mathcal{B}}{\text{Argmin}} \left[c(\beta) + (r_I(I_t^{\bar{\beta}}) - \Pi_t) \cdot \beta \cdot I_t^{\bar{\beta}} \right] . \quad (21)$$

Pour utiliser le théorème de Schauder, on a besoin que $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ soit relativement compact, ie $\mathcal{T}(\bar{\beta}^n) \xrightarrow{\bar{\beta}^n \rightarrow \bar{\beta}^\infty} \mathcal{T}(\bar{\beta}^\infty)$. Ce résultat s'obtient assez facilement par croissance dominée dès lors qu'on a : $\beta_{opt}(\Pi_t^n, I_t^{\bar{\beta}^n}) \xrightarrow{\bar{\beta}^n \rightarrow \bar{\beta}^\infty} \beta_{opt}(\Pi_t^\infty, I_t^{\bar{\beta}^\infty})$.

Une façon de montrer cela est de montrer que β_{opt} est continu selon Π_t et selon $I_t^{\bar{\beta}}$ et que ces fonctions soient elle même continues en fonction de $\bar{\beta}$. Voyons chacune de ces quatre conditions au cas par cas :

- La continuité de β_{opt} en fonction de Π_t est immédiate au vu de sa définition dans l'équation(21).
- Pour la continuité de Π_t en fonction de $\bar{\beta}$, il suffit de découper l'intégrale définissant Π_t sur les segments de temps où il y a saturation ou non, puis d'appliquer le théorème de convergence dominée en constatant que la durée de ces intervalles est continue en fonction de $\bar{\beta}$.
- La continuité de $I_t^{\bar{\beta}}$ en fonction de $\bar{\beta}$ est immédiate au vu de l'équation (13) qui donne son évolution.
- Pour autant, je n'ai pas réussi à démontrer que β_{opt} est continu vis à vis de $I_t^{\bar{\beta}}$. Et les résultats numériques présentés plus tard prouveront que si un équilibre de Nash existe en tout cas avec les valeurs de paramètres utilisés, β_{opt} , il semble en effet que β_{opt} ne soit pas continu en fonction de $I_t^{\bar{\beta}}$.

Rétroactivement, on aurait en effet pu se dire que cela n'allait pas marcher, car la preuve par le Théorème de Schauder nécessite que presque toutes les fonctions soient continues en fonction de leur paramètres. Il semblerait donc qu'il faille utiliser une autre méthode. Pour autant passer par une recherche de point fixe est intéressante et il peut être une bonne idée d'essayer de prouver l'existence d'un équilibre de Nash par l'utilisation d'autres théorèmes comme par exemple celui de Kakutani.

Par manque de temps, cette voie ne sera pas explorée dans ce stage, mais nous chercherons plutôt à trouver cet équilibre numériquement.

3.5 Approche numérique

L'idée générale de la méthode employée pour la résolution numérique est présentée dans l'équation (18). Les simulations ont d'abord été effectuées sur le modèle sans saturation, pour vérifier que l'algorithme fonctionne et que l'on peut retrouver les mêmes résultats.

Pour ce qui est des paramètres, il a été choisi de s'appuyer sur les données du début de l'épidémie de COVID-19 de [9] et notamment utilisées dans [2]. Ces données évoluant vite avec le temps et présentant une grande variance selon les études, il nous faut signaler que nos résultats numériques doivent être considérés comme des ordres de grandeur et non des valeurs exactes. Avec l'aspect simpliste du modèle, il faut garder à l'esprit qu'il n'est pas ici question d'apporter des résultats quantifiés et précis mais plutôt de souligner des phénomènes.

(S_0, I_0, R_0)	β_{min}	β_0	γ	T	r_I
(0.99,0.01,0.00)	0.05	0.20	0.1	360 jours	300

TABLEAU 1 – Ensemble des valeurs numériques pour les paramètres utilisés dans les simulations numériques suivantes.

Pour modéliser le coût, on propose d'étudier la forme suivante comme dans [2] :

$$c(\beta) = \frac{\beta_0}{\beta} - 1. \quad (22)$$

On peut aisément vérifier que ce coût est \mathcal{C}^2 , décroissant, et de dérivée seconde positive. Il traduit l'écart entre la stratégie individuelle appliquée et la stratégie "sans effort". Notons que si d'un point de vue mathématique cette solution ne pose aucun problème quand elle est étudiée sur \mathcal{B} , numériquement cela peut poser des problèmes car avec un tel coût on peut imaginer un agent qui augmente β au delà de β_0 quand il n'y a plus de risque, et cela peut fausser les résultats.

Pour corriger cet effet, il a été envisagé de changer le coût pour le mettre en valeur absolue, mais cela rend le coût non dérivable en β_0 , or les résultats numériques montrent que la majeure partie du temps $\beta = \beta_0$. De fait cela aurait pu gêner le processus d'Euler explicite (18) car le gradient n'aurait pas été défini en ce point.

Une autre solution envisagée a été de rajouter dans la formule du coût (22) un terme du type $\tanh\left(\frac{\beta-\beta_0}{\sigma_\beta}\right)$. L'idée est de rajouter un gros coût dès que l'on dépasse β_0 . Seulement on se retrouve avec un problème important. Pour σ_β trop grand, le coût est modifié même pour un β qui ne soit pas dans le voisinage direct de β_0 , et on introduit un biais dans notre simulation. Et pour σ_β trop petit, on arrive à la limite de la fonction marche et finalement on revient à un problème où le coût est non dérivable en β_0 . D'un point de vue numérique cela se constate par le fait que l'algorithme ne converge pas.

Finalement, la solution utilisée est de reborner manuellement à chaque β^n . Il n'est pas évident que cela ne modifie pas les résultats. Cependant si on borne β_{n+1} juste après son calcul à partir de β_n et grâce à l'équation (18) on peut se dire intuitivement que localement, pour tout t, si la solution optimale est $\beta > \beta_0$, alors c'est que le coût engendré par le fait de se faire infecter est minime devant celui engendré par une réduction des contacts, et donc que l'option la moins couteuse est

celle qui maximise β jusqu'à sa borne. Pour autant on n'a pas de preuve rigoureuse que cela ne modifie pas le résultat, et d'ailleurs nos résultats numériques dans le cas sans saturation présentent de très légères différences avec ceux de [2]. On suppose que ces différences sont dues à l'usage de cette méthode pour borner les résultats.

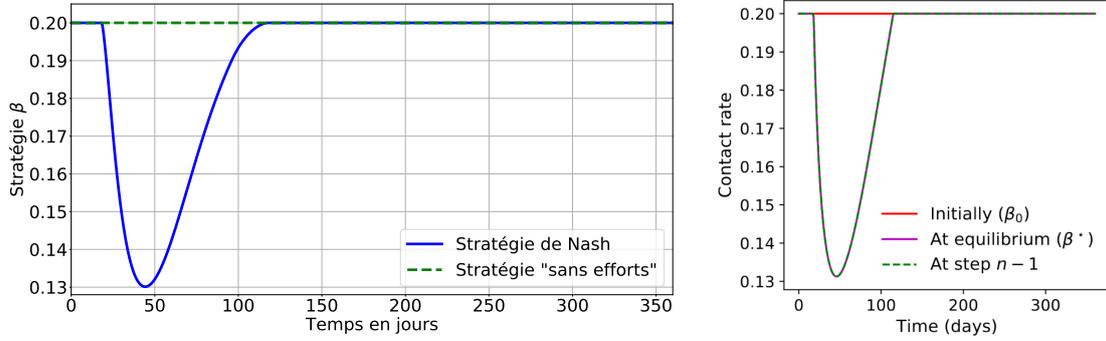


FIGURE 1 – À gauche : La stratégie de Nash $\beta(t)$ calculée est en bleu et trait plein et la stratégie dite "sans efforts" est représentée en vert et ligne pointillée. À droite : La stratégie de Nash $\beta(t)$ trouvée dans [2]. Ici aussi on retrouve la stratégie "sans efforts" en référence (en rouge), la stratégie de l'équilibre de Nash (en violet), et la stratégie calculée juste avant cet équilibre grâce à l'équation (18) (en pointillé vert), cette dernière sert à montrer que le processus β converge bien vers un équilibre.

Comparés aux résultats de [2], on remarque que nos résultats de la figure (1) sont légèrement différents autour de la fin de l'épidémie vers le jour 100. En effet on constate que dans nos simulations, on a un retour à β_0 qui est moins anguleux que dans cet article. Si on calcule les coûts engendrés par la stratégie "sans efforts", on trouve $\mathfrak{C}_{\beta_0} = 240$, et on trouve $\mathfrak{C}_{\beta_{nash}} = 213$. On remarque que pour $\mathfrak{C}_{\beta_{nash}}$ on a un écart avec [2] qui nécessite d'aller au quatrième chiffre significatif pour trouver une différence de 0.3. On considèrera donc que nos simulations donnent les résultats attendus. Par ailleurs on retrouve bien que l'équilibre de Nash est environ 12% moins coûteux que la stratégie "sans efforts". On peut en conclure qu'on a bel et bien isolé une stratégie permettant un gain léger mais non négligeable par rapport à une attitude passive contre l'épidémie. Si on interprète cette courbe un peu plus dans le détail et en la comparant notamment au pic d'infectés de la figure (3), on se rend compte que l'instant de plus bas contact coïncide à peu près avec le maximum d'infectés. On remarque également que globalement la forme de ces deux pics est assez semblable. On peut noter que les débuts et fins des deux courbes sont assez différents, en effet le pic de la stratégie est anguleux à sa base là où celui des infectés tend vers les valeurs aux limites lentement. Cependant on retrouve le profil de deux pics qui croissent très vite (ou décroît pour la stratégie) et décroît plus lentement (ou croît pour la stratégie) pour le retour à la normale. Finalement on remarque déjà des effets de seuils puisque la courbe $\beta(t)$ admet deux points anguleux aux bases de son pic, qui traduisent qu'il faut un certain nombre d'infectés au moins pour que la stratégie diminue. Sous ce seuil, la probabilité d'être infecté est apparemment trop basse.

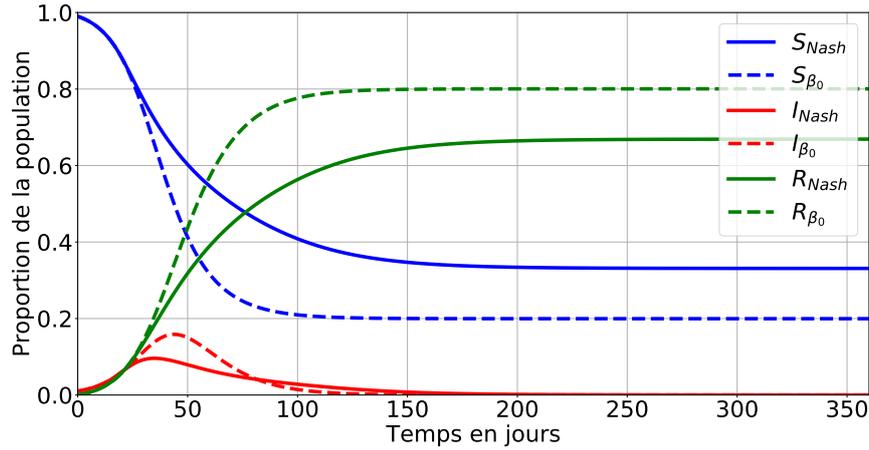


FIGURE 2 – Courbe des populations SIR en fonction du temps.

Les susceptibles sont en bleu, les infectés en rouge et les rétablis en vert. Les courbes en trait plein sont celle de l'équilibre de Nash, celles en traits pointillés sont dans la stratégie "sans efforts". On remarque que la stratégie de Nash montre tout de même une baisse du nombre de rétablis (et donc d'infectés totaux) substantielle

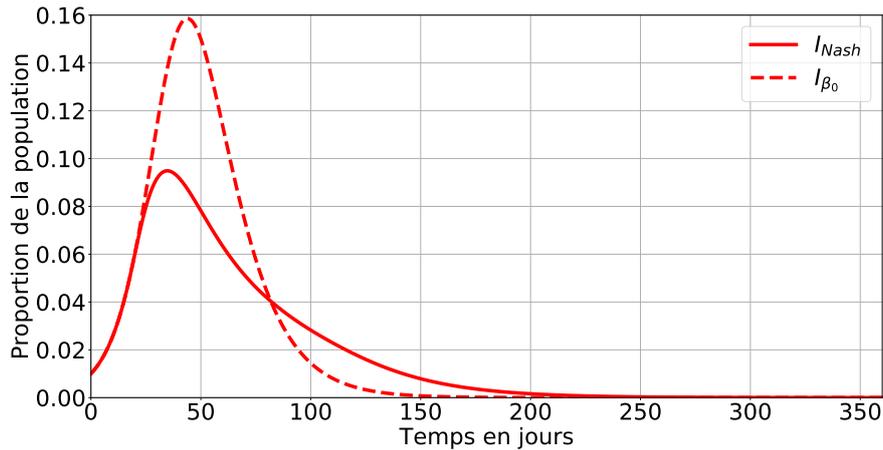


FIGURE 3 – Zoom sur la courbe des infectés.

On remarque que le pic est réduit dans l'équilibre de Nash, mais dure plus longtemps.

En s'intéressant un peu plus à l'évolution des populations, on remarque également que le nombre de personnes qui auront été infectés dans le cas de l'équilibre est de 67% contre 80% dans le cas "sans efforts". On peut également voir que le pic du nombre d'infectés atteint 9.60% contre 15.8% "sans efforts". On peut cependant remarquer que ce pic d'infectés s'étend alors plus dans le temps, puisqu'on tombe en dessous des 1% d'infectés au 140^{eme} jour contre le 106^{eme} dans le cas "sans efforts". On voit donc que même sans saturation, le modèle tend vers une stratégie qui cherche à aplatir la courbe pour limiter la probabilité d'être infecté au maximum de l'épidémie. Les résultat d'une telle stratégie sont d'ailleurs très encourageant, car on constate que le nombre de personnes infectés à la fin est environ 17% plus bas qu'avec la stratégie "sans efforts". Dans un modèle simpliste où on prends en compte qu'un certain pourcentage des malades peuvent mourir plutôt qu'être rétablis, ça veut dire qu'on aura à la fin environ 17% moins de morts. Ramené à l'échelle du nombre caractéristiques de mort du COVID, cela fait plusieurs milliers de vies sauvés.

Maintenant comparons avec le modèle où l'on prends en compte la saturation. Dans l'approche numérique, plutôt que d'utiliser une marche qui empêchait à l'algorithme de converger à cause de discontinuité, on a choisi de modéliser r_I comme suit :

$$r_I = r_I^0 + \frac{(r_I^{sat} - r_I^0)}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{I_t^{\bar{\beta}} - I^{sat}}{\sigma_I} \right) \right]. \quad (23)$$

On fixe arbitrairement les paramètres suivants :

r_I^0	r_I^{sat}	I^{sat}	σ_I
300	1800	0.05	0.01

TABLEAU 2 – Valeurs numériques des paramètres supplémentaires nécessaires pour la prise en compte de la saturation des moyens médicaux

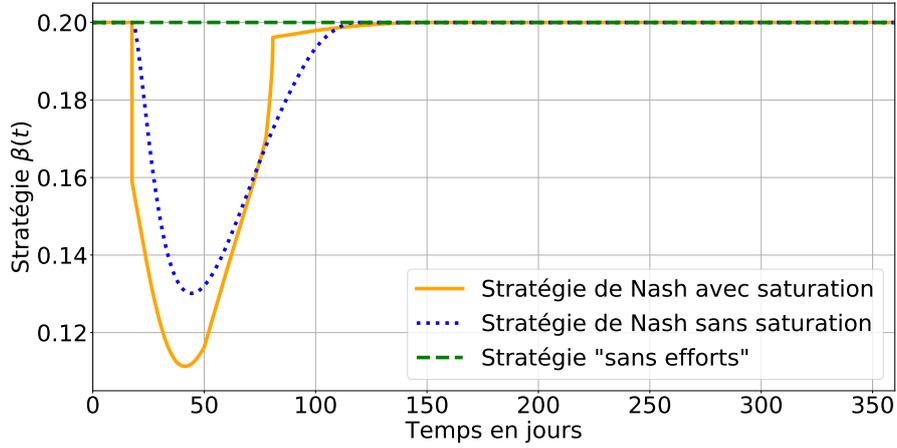


FIGURE 4 – Stratégies $\beta(t)$ dans différentes situations. La courbe en ligne pointillée verte symbolise la stratégie de référence "sans efforts".

Les pointillés bleus représente la stratégie de Nash dans le modèle précédant sans saturation.

La ligne pleine orange est la stratégie de Nash dans le modèle avec saturation.

On remarque qu'en raison du coup plus important en cas d'infection, la réduction des contacts est plus importante dans ce modèle. Par ailleurs, on note les discontinuités causées par les effets de seuils dans le coût

La première chose que l'on peut remarquer dans la stratégie dans le cas avec saturation, c'est que l'on voit apparaître une discontinuité marquée de β au 17ème jour passant directement de 0.200 à 0.158, et qui correspond avec le moment précis où on dépasse le seuil de saturation. On remarque également une discontinuité accompagnée d'un point rugueux au 80^{ème} jour qui correspond à la fin de la première vague. On voit aussi que comparé au précédent équilibre de Nash, le taux de contact descend jusqu'à 0.111 contre 0.131 dans le cas sans saturation, mais en fin d'épidémie, le taux remonte plus vite. On ne peut pas comparer les coût entre les deux équilibres de Nash puisque le coût courant était différent, mais on peut comparer le coût de la stratégie de Nash avec le coût de la stratégie "sans efforts" dans le nouveau modèle. On a $\mathfrak{C}_{\beta_{nash}^{sat}}^{sat} = 697$ contre $\mathfrak{C}_{\beta_0^{sat}}^{sat} = 1250$. La différence est dans ce modèle beaucoup plus flagrante que dans le modèle sans saturation, en effet on a une augmentation du coût de 80% si on passe de la stratégie de Nash à celle "sans efforts". Ici on montre tout l'intérêt d'une démarche de limitation des contacts, en effet on voit un écart très

significatif entre les deux stratégies. On remarque par ailleurs, quand on compare avec la figure (6), que la baisse de contact ne se fait que pour le premier pic, sans doute qu'entre le fait que le second soit plus petit et que la probabilité d'avoir déjà été infecté est relativement grande, la probabilité d'être infecté sur ce second pic est relativement faible.

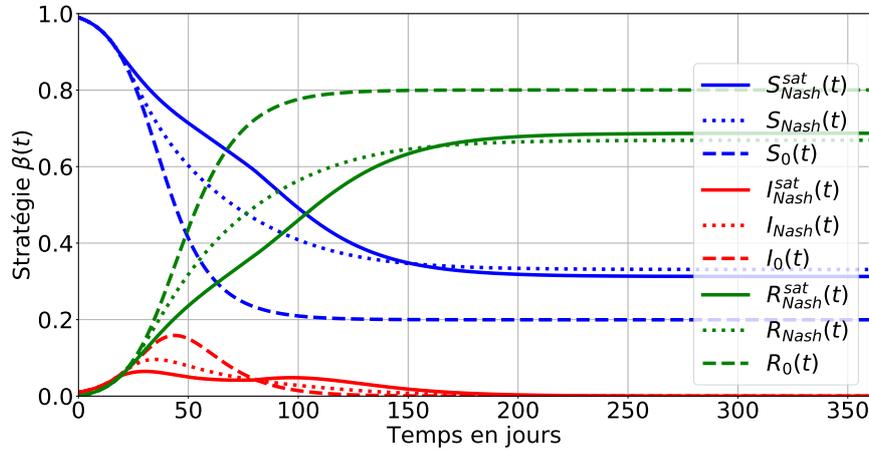


FIGURE 5 – Courbe des populations SIR en fonction du temps. Les susceptibles sont en bleu, les infectés en rouge et les rétablis en vert. Les courbes en trait plein sont celle de l'équilibre de Nash dans le cas avec saturation. Celles en pointillées sont les résultats de la stratégie de Nash dans le modèle sans saturation. Finalement les courbes en trait pointillés sont le résultat de la stratégie "sans efforts"

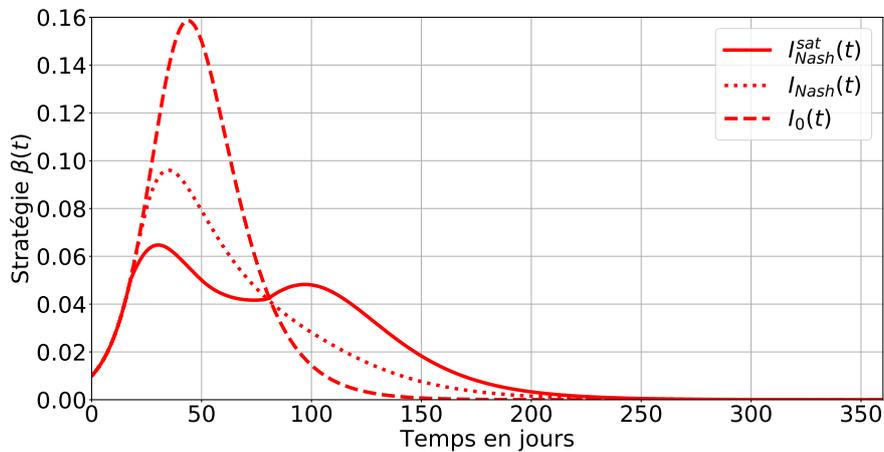


FIGURE 6 – Zoom sur la courbe des infectés. On remarque que la courbe avec saturation présente deux pics. Cela veut dire que quand la stratégie se relâche, il y a encore suffisamment de susceptibles pour faire repartir à la hausse l'épidémie. C'est ce qu'on nomme une deuxième vague. On remarque également qu'encore une fois des pics plus petits se traduisent par une épidémie plus longue jusqu'à l'immunité collective. Notons que si le premier pic dépasse le seuil de saturation de $I^{sat} = 0.05$, ce n'est pas le cas du second

On remarque ici un phénomène très intéressant, on voit que si l'infection monte nettement moins haut que précédemment, on a l'apparition d'une seconde vague d'infection. les deux pics atteignent 6.5% et 4.8% de la population, donc la deuxième vague n'atteint pas la saturation. On

remarque cependant que l'épidémie se finit nettement moins vite puisqu'on revient à 1% d'infectés au 168^{ème} jour contre le 140^{ème} dans le cas sans saturation. Finalement on peut se rendre compte que le nombre d'infectés total est assez légèrement différents entre les deux stratégies de Nash, avec 69% d'infectés dans le cas avec saturation, et 67% dans le cas sans saturation. Si on reprends un analyse assez simpliste en supposant qu'un pourcentage des rétablis mourront en fait, on pourrait naïvement se dire qu'il vaut mieux la stratégie précédente si on veut baisser le nombre de mort. Seulement il faut prendre en compte que les morts sont fortement favorisés par la saturation des moyens médicaux, donc un modèle qui aplatit la courbe fera sans doute nettement moins de morts. Finalement, l'information à retenir de cette courbe est la possibilité de deuxième vague qui peut même possiblement faire redémarrer la diminution de contact si par exemple elle dépasse le seuil d'infectés. On peut toutefois noter que l'on aurait pu s'attendre à avoir, plutôt qu'un creux entre 2 bosses, une stagnation de la courbe juste en dessous du seuil de saturation. Soit ce comportement cache une vraie propriété qualitative intéressante, soit elle peut être due au fait que l'on est implémenté la marche dans r_I par une tangente hyperbolique qui a tendance à ramener ce seuil cette stagnation en dessous.

4 Conclusion, développements possibles et remerciement

Le modèle employé étant très simpliste, il vaut mieux ne pas prendre les résultats comme étant une vérité quantifiable mais plutôt comme une manière d'illustrer des phénomènes. Parmi ces phénomènes, l'analyse du modèle avec saturation a permis de prendre conscience de l'intérêt flagrant d'une politique de réduction des contacts dans le cas d'une épidémie. Outre la réduction du nombre de personnes qui ont été infectés au total, et donc du nombre de morts potentiels, on constate que cela peut se révéler particulièrement utile pour éviter ou limiter une saturation des moyens médicaux, car ce genre d'évènements peuvent faire exploser les coûts. En revanche il faut noter qu'à trop limiter les contacts, la durée de l'épidémie peut considérablement s'allonger.

Cette étude laisse place à de nombreuses améliorations. Tout d'abord les données étant celle de l'épidémie de COVID-19, elles évoluent continuellement et les résultats numériques peuvent s'en trouver changés. Une bonne façon de s'en rendre compte est qu'on a considéré que la partie de β qui dépendait de la maladie était constante, ie que β_0 était constant, mais l'évolution de la maladie semble faire penser le contraire.

Une autre idée très intéressante est de compléter l'étude d'un équilibre de Nash par un modèle de β sous forme d'impulsion de valeur donnée et dont on cherche les temps de début et fin optimaux. C'est notamment le modèle qui semble le plus adapté à l'étude d'une politique de confinement.

On peut aussi prendre en compte que les équilibres de Nash sont rarement les stratégies qui donne le coût minimal. Il peut exister des stratégies avec des coûts inférieurs mais où les individus ne jouent alors pas la stratégie β optimale pour eux face à la stratégie $\bar{\beta}$. Ces stratégies nommées stratégies optimales sociétales sont souvent instables et donc sans pression de la société, elle sont rarement réalisables, mais en faisant la différence entre leur coût et le coût d'un équilibre de Nash, on peut définir ce qu'on appelle le coût de l'anarchie.

Enfin, une dernière évolution intéressante serait de rajouter des compartiments dans le modèle SIR. Dans le cas sans saturation, cela a déjà été fait avec des modèles SEIR qui ajoute un stade intermédiaire d'incubation du virus [2], voire avec des modèles SEIR par blocs avec des blocs symptomatiques et asymptomatiques qui ont des taux différents [1]. On peut finalement imaginer un modèle avec plusieurs régions qui ne communiquent pas jusqu'à ce que l'une d'entre elle arrive à saturation et délègue ses patients à une région avec moins de cas.

En conclusion, je souhaiterais remercier Denis Ullmo pour m’avoir encadré durant ce stage. J’ai pu découvrir beaucoup de choses sur les MFG, un domaine que je trouve très intéressant par sa capacité à être à l’interface entre les mathématiques, la physique, et les sciences sociales notamment. De plus, j’ai pu durant ce stage me former à des applications très intéressantes de la théorie de la mesure mais aussi à des bases de l’épidémiologie.

Références

- [1] R. Djidjou-Demasse, Y. Michalakis, M. Choisy, M. Sofonea, and S. Alizon. Optimal COVID-19 epidemic control until vaccine deployment. *MedRxiv*, 2020.
- [2] R. Elie, E. Hubert, and G. Turinici. Contact rate epidemic control of COVID-19 : an equilibrium view. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 15(35), 2020.
- [3] D. Gomes, J. Mohr, and R. R. Souza. Continuous Time Finite State Mean Field Games. *Appl Math Optim*, 68 :99–143, 2013.
- [4] L. Laguzet and G. Turinici. Global optimal vaccination in the SIR model : properties of the value function and application to cost-effectiveness analysis. *Mathematical Biosciences*, 263 :180–197, 2015.
- [5] L. Laguzet and G. Turinici. Individual Vaccination as Nash Equilibrium in a SIR Model with Application to the 2009–2010 Influenza A (H1N1) Epidemic in France. *Bull Math Biol*, 77 :1955–1984, 2015.
- [6] L. Laguzet, G. Turinici, and G. Yahiaoui. Equilibrium in an individual-societal SIR vaccination model in presence of discounting and finite vaccination capacity. *New Trends in Differential Equations, Control Theory and Optimization*.
- [7] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Mean field games. I – The stationary case. *Comptes rendus mathématiques*, 343(9) :619–625, 2006.
- [8] J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Mean field games. II – Finite horizon and optimal control. *Comptes rendus mathématiques*, 343(10) :679–684, 2006.
- [9] Q. Li, X. Guan, P. Wu, X. Wang, L. Zhou, Y. Tong, R. Ren, K. S. M. Leung, E. H. Y. Lau, J. Y. Wong, X. Xing, N. Xiang, Y. Wu, C. Li, Q. Chen, D. Li, T. Liu, J. Zhao, M. Liu, W. Tu, C. Chen, L. Jin, R. Yang, Q. Wang, R. Zhou, S. and Wang, H. Liu, Y. Luo, Y. Liu, G. Shao, H. Li, Z. Tao, Y. Yang, Z. Deng, B. Liu, Z. Ma, Y. Zhang, G. Shi, T. T. Y. Lam, J. T. Wu, G. F. Gao, B. J. Cowling, B. G. Yang, M. Leung, and Z. Feng. Early Transmission Dynamics in Wuhan, China, of Novel Coronavirus–Infected Pneumonia. *New England Journal of Medicine*.
- [10] F. Sassi. Calculating QALYs, comparing QALY and DALY calculations. *Health Policy and Planning*, 21(5) :402–408, 2006.
- [11] D. Ullmo, I. Swiecicki, and T. Gobron. Quadratic Mean Field Games. *arXiv :1708.07730*, 343(10) :679–684, 2018.