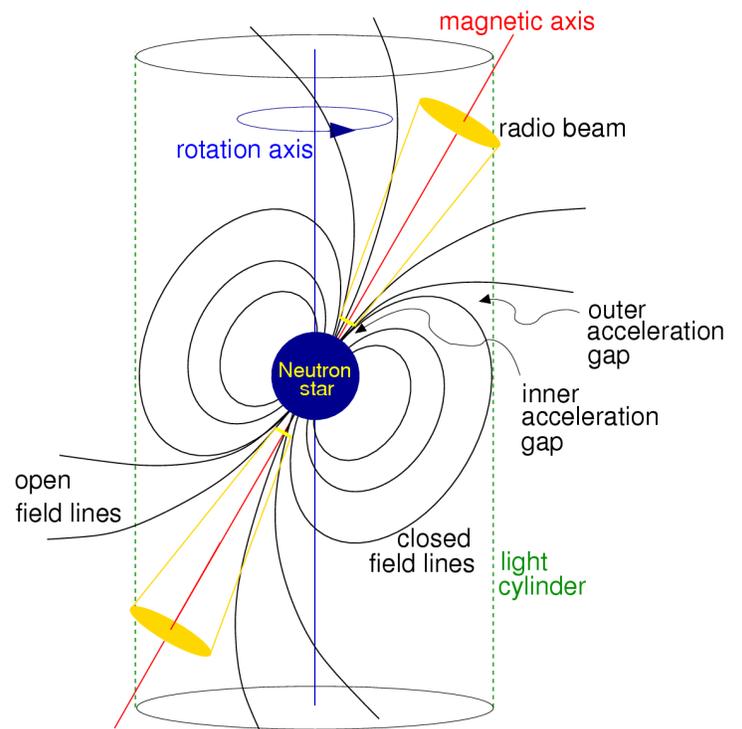
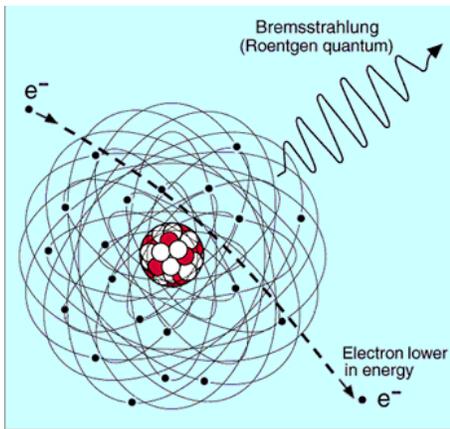


ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE ET QUANTIQUE



Bibliographie sommaire

Voici une courte liste de références bibliographiques (classées par ordre d'utilité décroissante pour le cours) :

- Rappels de relativité restreinte: n'importe quel cours de niveau L3, par exemple mes notes de cours disponibles à l'adresse http://lptms.u-psud.fr/nicolas_pavloff/enseignement/relativite-restreinte/
- Classical electrodynamics par J. D. Jackson (John Wiley, 1975).
- Théorie des champs par L. Landau et E. Lifchitz. Volume 2 du cours de physique théorique (Mir, 1989). Noter que les unités des grandeurs électromagnétiques ne sont pas les unités internationales utilisées en cours.
- Invariances en physique et théorie des groupes, par J.B. Zuber. Disponible à l'adresse http://www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/Z_Notes.html. Seulement le chapitre 0.
- Ondes multipolaires, lagrangien et hamiltonien du champ électromagnétique : cours de C. Cohen-Tannoudji au Collège de France, année universitaire 1973-1974 (surtout cours 11 et 12). Disponible à l'adresse <http://www.phys.ens.fr/~cct/college-de-france/1973-74/1973-74.htm>
- Photons et atomes. Introduction à l'électrodynamique quantique, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg (EDP Sciences, 2001).
- Quantum field theory par L. H. Ryder (Cambridge University Press, 1996).

Je suis joignable par e-mail: nicolas.pavloff@universite-paris-saclay.fr

Ce texte est disponible en ligne au format PDF à l'adresse :

http://lptms.u-psud.fr/nicolas_pavloff/enseignement/

Chapitre A : Relativité restreinte

A.1 Transformations de Lorentz

La vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels (ce sont les référentiels dans lesquels le mouvement libre s'effectue à vitesse constante). C'est le principe de relativité restreinte¹. On en déduit (cf. cours ou Landau vol. II) que les changements de référentiel inertiel doivent conserver l'intervalle ds^2 et s .

A.1.a Matrices de Lorentz

Supposons donc que les coordonnées X'^α et X^α utilisées par deux observateurs pour repérer le même évènement sont reliées par une transformation de Lorentz de la forme

$$X'^\alpha = X'^\alpha(X^0, X^1, X^2, X^3). \quad (\text{A.1})$$

Cette transformation doit conserver l'intervalle ds^2 entre deux évènements voisins. Cela s'écrit avec les conventions d'Einstein

$$g_{\alpha\beta} dX'^\alpha dX'^\beta = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu, \quad (\text{A.2})$$

où $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ est le "tenseur métrique". En écrivant $dX'^\alpha = (\partial X'^\alpha / \partial X^\mu) dX^\mu$ et en remarquant que l'égalité (A.2) doit être vérifiée pour tous les dX , on obtient

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\mu} \frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Une première conséquence de cette égalité est que le déterminant $\det(\partial X'^\alpha / \partial X^\mu)$ est non nul (on dit que la transformation est régulière) et vaut ± 1 . Ensuite, en dérivant les deux membres de cette égalité par rapport à X^δ on obtient

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 X'^\alpha}{\partial X^\delta \partial X^\mu} \frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\nu} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X'^\beta}{\partial X^\delta \partial X^\nu} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Avec quelques manipulations simples on déduit de (A.4) que la matrice des dérivées secondes est identiquement nulle et que la transformation de Lorentz est donc linéaire. Pour ce faire, on ajoute et on retranche (A.4) à elle-même en effectuant les changements de notation $\delta \leftrightarrow \mu$ et $\delta \leftrightarrow \nu$. Cela donne

$$\begin{aligned} & g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 X'^\alpha}{\partial X^\delta \partial X^\mu} \frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\nu} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X'^\beta}{\partial X^\delta \partial X^\nu} \\ & + g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 X'^\alpha}{\partial X^\delta \partial X^\mu} \frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\nu} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\delta} \frac{\partial^2 X'^\beta}{\partial X^\mu \partial X^\nu} \\ & - g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 X'^\alpha}{\partial X^\nu \partial X^\mu} \frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\delta} - g_{\alpha\beta} \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X'^\beta}{\partial X^\delta \partial X^\nu} = 0. \end{aligned}$$

Il est clair que le second et le sixième terme du membre de gauche de l'égalité ci-dessus s'éliminent. De même le premier et le troisième terme sont égaux. On peut également remarquer que le quatrième

¹ "restreinte" parce qu'elle ne concerne que les référentiels inertiels.

et le cinquième terme s'éliminent (cela se voit en échangeant le rôle des indices muets α et β et en utilisant $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}$). Il reste donc

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 X'^\alpha}{\partial X^\delta \partial X^\mu} \frac{\partial X'^\beta}{\partial X^\nu} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Comme on a déjà vu que la matrice $\partial X'^\beta / \partial X^\nu$ est régulière, il en découle immédiatement que $\partial^2 X'^\alpha / \partial X^\delta \partial X^\mu = 0$. La transformation (A.1) est donc linéaire², du type

$$X'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta X^\beta + A^\alpha. \quad (\text{A.6})$$

Λ est une matrice de Lorentz. Dans tout ce qui suit on va supposer que les origines des référentiels sont bien choisies de sorte que dans (A.6) on a $\underline{A} = 0$.

Il est facile de vérifier que la condition (A.3) de conservation de l'intervalle s'écrit en terme de la matrice de Lorentz sous la forme:

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

A.1.b Transformation spéciale de Lorentz

C'est le cas particulier de transformation de Lorentz où les deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre (en anglais on parle de "Lorentz boost"). On notera $\mathcal{R} = \{O, x, y, z\}$ le référentiel "immobile" et $\mathcal{R}' = \{O', x', y', z'\}$ le référentiel "en mouvement". On se place dans le cas où la vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est $V\hat{x}$ ($V > 0$). On a une transformation qui doit être de la forme

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{af - be} \begin{pmatrix} f & -b \\ -e & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

En posant $X' = -x'$ et $X = -x$ (c.a.d. en inversant l'orientation de l'axe x) et en réalisant que le mouvement de $\{O, X\}$ par rapport à $\{O', X'\}$ est le même que celui de $\{O', x'\}$ par rapport à $\{O, x\}$ on a:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ X \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

En comparant les deuxièmes des relations (A.8) et (A.9), on voit que $af - be = 1$ et que $a = f$. Si maintenant on impose $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$ on trouve immédiatement $b = e$ et $a^2 - b^2 = 1$.

Considérons le point particulier $x' = 0$ (l'origine de \mathcal{R}'). Il est clair que ses coordonnées dans \mathcal{R} vérifient $x/ct = V/c \equiv \beta$; et d'après (A.8) lorsque $x' = 0$ alors $x/ct = b/a$. On a donc $b/a = \beta$. Comme $a^2 - b^2 = 1$ cela impose $a = \pm\gamma$ et $b = \pm\beta\gamma$, où on a noté $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Si on veut retrouver la transformation de Galilée aux petites vitesses, il faut choisir le signe +, et donc :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

²J'ai repris ici la démonstration donnée dans le cours d'A. Laverne, cf. sa page web: <http://www.imnc.univ-paris7.fr/alain/>

A.1.c Quelques propriétés

On définit le quadri-vecteur covariant $X_\alpha = g_{\alpha\beta}X^\beta = (X_0, -\vec{X})$, alors on peut écrire $ds^2 = dX_\alpha dX^\alpha$. On peut également écrire $X^\alpha = g^{\alpha\beta}X_\beta$ et il est clair que $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$.

On définit le symbole de Kronecker δ_μ^ν par $\delta_\mu^\nu X^\mu = X^\nu$. Il est clair que la matrice définie par cette relation a la même forme dans tous les référentiels et que

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma . \quad (\text{A.11})$$

Il est intéressant de savoir comment se transforment les quadri-vecteurs covariants. On écrit pour l'instant de manière formelle

$$X'_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta X_\beta . \quad (\text{A.12})$$

Sans savoir *a priori* ce qu'est la quantité Λ_α^β (mais ne soyons pas naïf: elle est certainement reliée à Λ^μ_ν). On écrit $X'_\alpha = g_{\alpha\mu}X'^\mu = g_{\alpha\mu}\Lambda^\mu_\nu X^\nu = g_{\alpha\mu}\Lambda^\mu_\nu g^{\nu\beta}X_\beta$. En comparant avec (A.12) il vient

$$\Lambda_\alpha^\beta = g_{\alpha\mu}\Lambda^\mu_\nu g^{\nu\beta} . \quad (\text{A.13})$$

En comparant avec (A.7) il vient

$$\Lambda_\alpha^\beta \Lambda^\alpha_\sigma = g_{\nu\sigma}g^{\nu\beta} = \delta_\sigma^\beta , \quad (\text{A.14})$$

où l'on a utilisé (A.11) et l'invariance de g lors de l'échange de ses indices. Donc, en ce qui concerne les matrices on peut écrire $\Lambda_\alpha^\beta = (\Lambda^{-1})^\beta_\alpha$.

Remarquons également que la formule (A.7) nous indique que le déterminant de la matrice Λ vaut ± 1 [en effet, (A.7) peut s'écrire sous forme matricielle $(\Lambda^t)(g)(\Lambda) = (g)$]. On en déduit que l'élément de quadri-espace $d^4X = dX^0 dX^1 dX^2 dX^3$ est invariant de Lorentz puisque $d^4X' = |\det\Lambda| d^4X$ d'après (A.6). Et donc, plus généralement, les transformations de Lorentz conservent le quadri-volume dans l'hyper-espace.

On peut (facilement) démontrer que les matrices Λ qui obéissent à (A.7) forment un groupe: $O(3,1)$. Le sous-ensemble des matrices de déterminant $+1$ forme un sous-groupe: $SO(3,1)$. Le sous-ensemble des transformations avec $\Lambda_0^0 > 1$ forme le sous-groupe orthochrone³: $O_o(3,1)$. On peut se contenter de travailler avec le groupe de Lorentz restreint $SO_o(3,1)$.

A.2 Quadri-vecteur

C'est une quantité à 4 composantes qui, lors d'un changement de référentiel, se transforme selon la loi (A.6) (avec $\underline{A} = 0$) ou (A.12) selon si l'on choisit l'écriture contra ou co-variante.

Avec (A.14) c'est une simple exercice de montrer que pour tout quadri-vecteur \underline{B} , l'objet $B^\alpha B_\alpha$ est un invariant de Lorentz (on parle de "scalaire de Lorentz").

A.2.a Quelques quadri-vecteurs

- On utilise la conservation de l'intervalle de temps propre $d\tau = dt\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$ pour définir le quadri-vecteur vitesse

$$U^\alpha = dX^\alpha/d\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} (c, \vec{v}) . \quad (\text{A.15})$$

³Si on s'intéresse à la composante $\mu = \nu = 0$ de (A.7): $g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha_0\Lambda^\beta_0 = 1$, soit $(\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i_0)^2 = 1$, donc $|\Lambda^0_0| > 1$. Si $\Lambda^0_0 > 1$ on parle de transformation orthochrone (qui conserve le sens du temps).

Remarque: $U_\alpha U^\alpha = c^2$. Exercice: retrouver la loi de transformation des vitesses en utilisant les propriétés de \underline{U} .

- La phase d'une onde doit être un invariant de Lorentz (les maxima correspondent à une différence de phase de 2π dans tous les référentiels). Seule possibilité: $\underline{k} = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ est un quadri-vecteur (et donc $k_\mu X^\mu$ est bien un scalaire de Lorentz). Cette propriété est valable pour toutes les ondes, pas seulement pour les ondes électromagnétiques.

- Grâce à la conservation de l'élément de quadri-espace d^4X et de la charge électrique on peut construire un nouveau quadri-vecteur. On note $d^3q = \rho(\vec{r}, t)d^3v$ la charge élémentaire contenue dans le volume d^3v autour de \vec{r} à l'instant t . En multipliant les deux côtés de cette équation par dX^μ il vient

$$d^3q dX^\mu = d^3q dt \frac{dX^\mu}{dt} = \rho d^3v dt \frac{dX^\mu}{dt} .$$

d^3q étant un scalaire de Lorentz, le membre de gauche de cette égalité est un quadri-vecteur. Il en découle que le membre de droite également, et que donc (puisque $d^3v dt$ est un scalaire de Lorentz)

$$J^\mu = \rho \frac{dX^\mu}{dt} = (c\rho, \vec{J}) \quad (\text{A.16})$$

est un "bon" quadri-vecteur. C'est le quadri-vecteur courant. Pour une charge ponctuelle q qui se déplace selon la loi horaire $\vec{r} = \vec{\xi}(t)$ on a $\rho(\vec{r}, t) = q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}(t))$ et en posant $\xi^\mu = (ct, \vec{\xi}(t))$ on a $J^\mu(\vec{r}, t) = q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}(t)) \frac{d\xi^\mu}{dt}$ où $\frac{d\xi^\mu}{dt} = (c, \vec{v})$. Et donc pour n charges ponctuelles on a

$$J^\mu(\vec{r}, t) = \sum_{a=1}^n q_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}_a(t)) \frac{d\xi_a^\mu}{dt} . \quad (\text{A.17})$$

- Soit l'opérateur ∂_μ défini par

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla} \right) . \quad (\text{A.18})$$

∂_μ est un quadrivecteur covariant. En effet $\partial'_\mu = \partial/\partial X'^\mu = \partial/\partial X^\nu \partial X^\nu/\partial X'^\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu$, où, dans le dernier membre, on a utilisé l'égalité $\Lambda_\mu^\nu X'^\mu = \Lambda_\mu^\nu \Lambda^\mu_\alpha X^\alpha = X^\nu$ qui découle de (A.14). La conservation de la charge électrique s'écrit $\partial_\mu J^\mu = 0$.

La forme contravariante est $\partial^\mu = \partial/\partial X_\mu = (\frac{1}{c}\partial/\partial t, -\vec{\nabla})$ et le d'Alembertien $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial^2/\partial t^2 - \vec{\nabla}^2$ est donc un opérateur scalaire (invariant de Lorentz), souvent noté \square .

A.3 Notion de tenseur

Pour une introduction moins succincte que celle qui suit, on pourra se reporter à la section 6 du chapitre 1 du cours de Landau et Lifshitz cité dans la bibliographie⁴.

C'est un objet à n indices (on appelle n le "rang" du tenseur), dont certains sont covariants et d'autres contravariants, et qui se transforme comme suit lors d'un changement de référentiel (exemple pour 3 indices, dont 2 contravariants):

$$T'^{\alpha \gamma} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\gamma_\sigma T^\mu_\nu{}^\sigma . \quad (\text{A.19})$$

⁴Attention, les conventions de Landau sont exactement contraires aux nôtres: sa notation pour un indice générique 0, 1, 2, 3 est une lettre latine, il réserve les lettres grecques aux indices spatiaux 1, 2, 3.

Bien-sûr la quantité $T^{\mu\nu\sigma} = g^{\nu\tau} T^{\alpha\tau\gamma}$ est également un tenseur qui a les bonnes propriétés de transformation (on dit qu'il est 3 fois contravariant), idem pour $T^{\mu\nu\sigma}$ etc. On a les propriétés: $T_0^0 = T_0^0 = T^{00} = T_{00}$ alors que $T_0^1 = T^{01} = -T_1^0 = -T_{01}$ et que $T_3^1 = -T^{31} = T_1^3 = -T_{31}$. La règle est : changer un indice 0 d'altitude ne change pas le signe; changer un indice i ($i \in \{1, 2, 3\}$) d'altitude change le signe.

- Un tenseur est dit "symétrique" (resp. "antisymétrique") dans deux de ses indices si $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ (resp. $T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha}$). Il est clair que $T^{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ ont les mêmes propriétés de symétrie ou d'antisymétrie que $T^{\alpha\beta}$. $T_{\alpha\beta}$ n'a par contre aucune propriété de symétrie si $T^{\alpha\beta}$ en a. On peut juste remarquer que si $T^{\alpha\beta}$ est symétrique, alors $T_{\beta}^{\alpha} = T_{\beta}^{\alpha}$. Dans ce cas on s'autorise à noter T_{β}^{α} , comme pour le symbole de Kronecker δ_{β}^{α} .

- La "contraction" d'un tenseur est par exemple la trace partielle $T^{\mu}_{\mu}{}^{\sigma}$. Il est facile de vérifier que si T est un tenseur de rang n la quantité obtenue en contractant deux de ses indices est un tenseur de rang $n - 2$ (dans l'exemple de la ligne précédente $T^{\mu}_{\mu}{}^{\sigma}$ est un tenseur de rang 1, c'est à dire un quadri-vecteur). Pour un tenseur à deux indices, T^{μ}_{μ} est un invariant de Lorentz, ce n'est plus vraiment un tenseur, on parle de "scalaire de Lorentz".⁵

- En comparant la relation (A.7) avec (A.19) on pourrait croire que (A.7) constitue une démonstration du fait que le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est un tenseur invariant. Ce n'est pas vraiment le cas: (A.7) constitue juste une vérification de la cohérence de nos concepts. La conservation du tenseur métrique est équivalente à celle du pseudo produit-scalaire, c'est une assumption antérieure à la notion de tenseur.

- Tenseur totalement antisymétrique de Levi-Civita:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ permutation paire de } (0, 1, 2, 3), \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ permutation impaire de } (0, 1, 2, 3), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24, \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\beta\gamma\delta} = -6 \delta_{\mu}^{\alpha}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\gamma\sigma\mu\nu} = -2 (\delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\sigma}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\gamma}^{\beta}). \quad (\text{A.21})$$

- Soit $A^{\mu\nu}$ un tenseur antisymétrique de rang 2. On définit son dual de Hodge $*A^{\mu\nu}$:

$$*A^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_{\alpha\beta}, \quad \text{on a } **A^{\mu\nu} = -A^{\mu\nu}. \quad (\text{A.22})$$

A.4 Formulation covariante des équations de Maxwell

Cette section est très succincte, pour une version plus détaillée, se reporter par exemple au chapitre III de mes notes de cours de relativité restreinte citées dans la bibliographie.

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. $A^{\mu} = (\frac{\phi}{c}, \vec{A})$ est un quadrivecteur. $F_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ est le tenseur (anti-symétrique) de Faraday. On peut l'écrire sous forme matricielle, en prenant la convention que le premier indice est l'indice de ligne et le second l'indice des colonnes. On obtient:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

⁵ Petit exercice: Soit $A^{\alpha\beta}$ un tenseur antisymétrique et $S^{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique. Que vaut le scalaire $A^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$?

On a

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2 \left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} \right) \quad \text{et} \quad {}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{4}{c} \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (\text{A.24})$$

Les éqs. de Maxwell s'écrivent :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad \text{et} \quad \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.25})$$

Les éqs. du mouvement d'une particule test : $\frac{d}{d\tau} P^\mu = q F^{\mu\nu} U_\nu$. Une transformation de jauge correspond à $\phi \rightarrow \phi - \partial_t G$ et $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} G$, où $G(\vec{r}, t)$ est un champ scalaire. Cela s'écrit sous forme covariante $A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu G$. Le tenseur de Faraday est clairement invariant de jauge. La jauge de Lorenz s'écrit $\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Elle est invariante de Lorenz.

A.5 Intégration

Commençons par une remarque: soit un champ scalaire $S(\underline{X})$. Il a l'expression $S(X^0, \dots, X^3)$ dans un référentiel donné et $S'(X'^0, \dots, X'^3)$ dans un autre référentiel. Par exemple, le temps: $t = X^0/c$ dans \mathcal{R} et $t = \gamma(X'^0 + \beta X'^1)/c$ dans \mathcal{R}' qui est en translation rectiligne uniforme selon Ox par rapport à \mathcal{R} .

L'élément d'intégration étant un scalaire de Lorenz, l'intégrale sur le quadri-espace de S peut-être calculée dans n'importe quel référentiel:

$$\int_{\mathbb{R}^4} S(\underline{X}) d^4 X = \int_{\mathbb{R}^4} S'(\underline{X}') d^4 X'. \quad (\text{A.26})$$

On peut remarquer également que la forme de la distribution de Dirac est invariante par transformation de Lorenz: $\delta^{(4)}(\underline{X} - \underline{A}) = \delta(X^0 - A^0) \times \dots \times \delta(X^3 - A^3)$. En effet on a $\int \delta^{(4)}(\underline{X} - \underline{A}) S(\underline{X}) d^4 X = S(\underline{A})$. Et en changeant de référentiel $\delta^{(4)}$ garde la même forme fonctionnelle puisque $\int \delta^{(4)}(\underline{X}' - \underline{A}') S'(\underline{X}') d^4 X' = S'(\underline{A}')$.

On peut définir une intégrale curviligne pour un champ scalaire ($\int S ds$) et pour un champ quadri-vectoriel ($\int A^\mu dX_\mu$).

A.5.a Gauss-Ostrogradsky

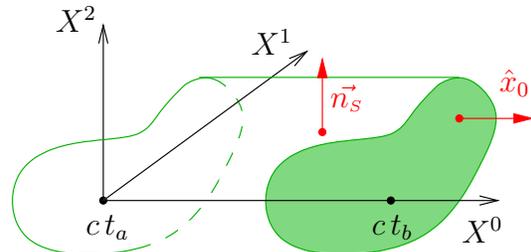
Soit K^μ un champ vectoriel, et soit Ω un "volume" de \mathbb{R}^4 délimité par une "surface" $\partial\Omega$. On a

$$\int_{\Omega} \partial_\mu K^\mu d^4 X = \oint_{\partial\Omega} K^\mu d^3 S_\mu. \quad (\text{A.27})$$

Dans cette expression $d^3 S_\mu$ est la normale sortante. Il faut la définir avec un certain soin dans le cas général, mais son expression est simple dans le cas particulier auquel nous allons nous restreindre pour démontrer (A.27): celui où $\Omega = [ct_a, ct_b] \times V$, V étant un volume fermé de \mathbb{R}^3 (on notera ∂V sa surface). La figure ci-dessous correspond à un schéma avec 2 dimensions d'espace seulement.

$\partial\Omega$ se décompose en trois parties:

1. La face avant (colorée sur le schéma): l'ensemble (ct_b, \vec{r}) où $\vec{r} \in V$. $\vec{n}_s = \hat{x}_0$.
2. La face arrière: l'ensemble (ct_a, \vec{r}) où $\vec{r} \in V$. $\vec{n}_s = -\hat{x}_0$.
3. L'ensemble $[ct_a, ct_b] \times \partial V$. \vec{n}_s dépend du point sur ∂V .



On a alors :

$$\oint_{\partial\Omega} K^\mu d^3S_\mu = - \int_V d^3v K^0(\vec{r}, t_a) + \int_V d^3v K^0(\vec{r}, t_b) + \int_{[ct_a, ct_b] \times \partial V} c dt \vec{K} \cdot d^2\vec{\sigma}, \quad (\text{A.28})$$

et (en écrivant $\partial_\mu K^\mu = \frac{1}{c} \partial_t K^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{K}$)

$$\int_\Omega \partial_\mu K^\mu d^4X = \int_\Omega dt d^3v \frac{\partial K^0}{\partial t} + \int_\Omega c dt d^3v \vec{\nabla} \cdot \vec{K}. \quad (\text{A.29})$$

Il est alors clair que les expressions (A.28) et (A.29) sont égales. Cela prouve la formule de Gauss-Ostrogradsky (A.27) dans le cas particulier qui nous intéresse.

Question: Comment définir l'élément d'hypersurface d^3S_μ sur la "face latérale" $[ct_a, ct_b] \times \partial V$ afin d'écrire correctement le dernier membre de droite de (A.28) ? On procède comme suit: on suppose que l'élément de surface sortante à V est construit sur deux vecteurs $d\vec{B}$ et $d\vec{C}$ de sorte que $d^2\vec{\sigma} = d\vec{B} \wedge d\vec{C}$ soit $d^2\vec{\sigma}|_i = \varepsilon_{ijk} d\vec{B}|_j d\vec{C}|_k$. On note $d\vec{A} = (dX^0, \vec{0})$, $d\vec{B} = (0, d\vec{B})$ et $d\vec{C} = (0, d\vec{C})$. On définit alors l'élément d'hypersurface par la règle suivante:

$$d^3S^\mu = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} dA_\alpha dB_\beta dC_\gamma = \varepsilon^{\mu 0jk} dX^0 dB_j dC_k = -\varepsilon^{0\mu jk} dX^0 dB_j dC_k.$$

On voit donc que d^3S^0 est nul: $d^3S^\mu = (0, d^3\vec{S})$ avec

$$d^3\vec{S}|_i = d^3S^i = -\varepsilon^{0ijk} dX^0 dB_j dC_k = -dX^0 \varepsilon_{ijk} d\vec{B}|_j d\vec{C}|_k,$$

et donc $d^3\vec{S} = -dX^0 d^2\vec{\sigma}$. On a alors bien

$$K^\mu d^3S_\mu = -\vec{K} \cdot d^3\vec{S} = dX^0 \vec{K} \cdot d^2\vec{\sigma}.$$

A.5.b Champ de quadri-divergence nulle

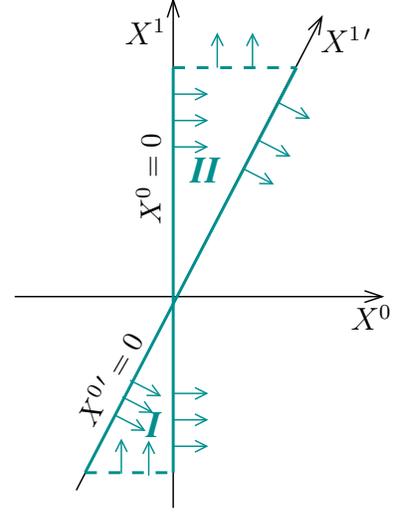
On considère un champ K^μ de quadri-divergence nulle (le quadri-courant par exemple) et tel que $K^\mu(|\vec{r}| \rightarrow \infty, t) = 0$. Le théorème de Gauss-Ostrogradsky (A.27) nous dit que $\oint_{\partial\Omega} K^\mu d^3S_\mu = 0$. En prenant $\Omega = [ct_a, ct_b] \times \mathbb{R}^3$ on obtient immédiatement $\int d^3v K^0(\vec{r}, t_b) = \int d^3v K^0(\vec{r}, t_a)$. Soit

$$\partial_\mu K^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v K^0(\vec{r}, t) \quad \text{indépendant de } t. \quad (\text{A.30})$$

Non seulement la quantité \mathcal{K} est indépendante du temps (ce qui est assez clair d'après (A.27)), mais c'est également un scalaire de Lorentz (ce qui est moins évident). Pour le démontrer on remarque que l'intégrale (A.30) est une intégrale de surface sur l'hyperplan orthogonal à l'axe $X^0 = 0$. Il faut alors s'assurer que l'intégration de K^0 sur cette hypersurface donne le même résultat que l'intégration de $K^{0'}$ sur l'hypersurface $X^{0'} = 0$ (puisque'un autre observateur fera le calcul en intégrant sur d^3v' c'est à dire l'hyperplan orthogonal à son axe temporel).

Comme $\partial_\mu K^\mu = 0$ on a $\int_I d^4X \partial_\mu K^\mu - \int_{II} d^4X \partial_\mu K^\mu = 0$ où les domaines I et II sont définis sur la figure ci-contre^a. En appliquant le théorème de Gauss on obtient

$$\left(- \int_{X^{0'}=0, X^{1'}<0} K^\mu d^3S_\mu + \int_{X^0=0, X^1<0} K^\mu d^3S_\mu \right) - \left(- \int_{X^0=0, X^1>0} K^\mu d^3S_\mu + \int_{X^{0'}=0, X^{1'}>0} K^\mu d^3S_\mu \right) = 0. \quad (\text{A.31})$$



^aPour les besoins du dessin, ils sont représentés dans un quadri-espace à seulement deux dimensions. Ce sont des triangles passant chacun par l'origine.

Dans la formule (A.31) on a omis la contribution sur les parois marquées en pointillées sur la figure en supposant que $K^\mu(\vec{r}, t)$ tend suffisamment rapidement vers zéro lorsque $|\vec{r}| \rightarrow \infty$. En regroupant les termes dans (A.31) on obtient le résultat souhaité :

$$\int_{X^0=0} K^\mu d^3S_\mu = \int_{X^{0'}=0} K^\mu d^3S_\mu. \quad (\text{A.32})$$

Pour $K^\mu \equiv J^\mu(\vec{r}, t)$ la relation (A.30) correspond à la conservation de la charge électrique totale.

Bien-sûr le raisonnement qui permet de démontrer (A.30) reste également valable pour un tenseur de rang plus élevé:

$$\text{si } \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{alors } P^\nu = \int T^{0\nu}(\vec{r}, t) d^3v \quad \text{est un quadri-vecteur conservé.} \quad (\text{A.33})$$

Cela se démontre en appliquant le raisonnement (A.30) à $K^\mu(\vec{r}, t) = T^{\mu\nu}(\vec{r}, t) f_\nu$ où f_ν est un quadri-vecteur fixé quelconque. On voit ainsi que $P^\nu f_\nu$ est un invariant scalaire conservé et donc que P^ν est un quadri-vecteur indépendant du temps. Idem:

$$\text{si } \partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0 \quad \text{alors } L^{\nu\rho} = \int M^{0\nu\rho} d^3v \quad \text{est un tenseur indépendant du temps.} \quad (\text{A.34})$$

Chapitre B : Rayonnement (non quantique)

B.1 Potentiels retardés

On veut déterminer les potentiels en fonction des sources. En jauge de Lorenz cela revient à résoudre $\square A^\mu = \mu_0 J^\mu$. Pour ce faire on passe par l'intermédiaire de la fonction de Green du problème définie comme la solution de $\square G(\underline{X}) = \delta^{(4)}(\underline{X})$. Une fois G connue on obtiendra l'expression des potentiels grâce à la formule

$$A^\mu(\underline{X}) = \mu_0 \int d^4 X'' G(\underline{X} - \underline{X}'') J^\mu(\underline{X}''). \quad (\text{B.1})$$

En faisant une transformation de Fourier dans l'espace à 4 dimensions:

$$G(\underline{X}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik_\mu X^\mu} \hat{G}(\underline{k}), \quad (\text{B.2})$$

il est facile de se persuader que $\hat{G}(\underline{k}) = -1/k_\mu k^\mu$ et que donc

$$G(\underline{X}) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{X} - ik_0 X^0}}{\vec{k}^2 - k_0^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 X^0} g(\vec{X}, k_0), \quad (\text{B.3})$$

où la fonction g est définie en (R.8), mais seulement pour un k_0 (noté z_0 dans (R.8)) ayant une partie imaginaire non nulle. On introduit donc $g_\pm(\vec{X}, k_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} g(\vec{X}, k_0 \pm i\epsilon)$. La formule (R.8) montre que $g_\pm(\vec{X}, k_0) = \exp\{\pm ik_0 r\}/(4\pi r)$ (en notant $|\vec{X}| = r$). Il vient donc ($X_0 = ct$)

$$G_\pm(\underline{X}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{\mathbb{R}} dk_0 \exp\{ik_0(-X^0 \pm r)\} = \frac{1}{4\pi r} \delta(\pm ct - r). \quad (\text{B.4})$$

Seule G_+ (qui décrit un signal émis en $\vec{r} = \vec{0}$ à $t = 0$ et se propageant vers l'infini) est acceptable pour un système non borné. Les formules (B.1) et (B.4) conduisent à l'expression des potentiels retardés:

$$A^\mu(\underline{X}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int J^\mu \left(\vec{r}'', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c} \right) \frac{d^3 r''}{|\vec{r} - \vec{r}''|}. \quad (\text{B.5})$$

B.2 Potentiels de Liénard-Wiechert

Cette partie concerne le rayonnement d'une charge ponctuelle en mouvement. On peut remarquer que¹

$$G_+(\underline{X}) = \frac{1}{4\pi r} \delta(r - ct) = \frac{1}{2\pi} \delta(\underline{X}^2) \Theta(t), \quad (\text{B.6})$$

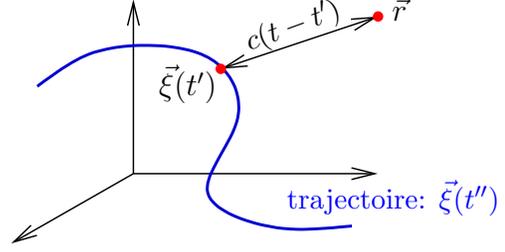
où Θ est la fonction de Heaviside². Alors la formule (B.1) s'écrit pour une charge ponctuelle q [cf. l'expression (A.17) du quadri-vecteur courant associé]

$$A^\mu(\underline{X}) = \frac{\mu_0 q}{2\pi} \int d^4 X'' \delta((\underline{X} - \underline{X}'')^2) \Theta(t - t'') \delta^{(3)}(\vec{r}'' - \vec{\xi}(t'')) \frac{d\xi^\mu}{dt''}.$$

¹La dérivation qui suit est tirée de la section IV.4 du livre de A.O. Barut, "Electrodynamics and classical theory of fields and particles", Dover Publication.

²En effet $\delta(\underline{X}^2) = \delta(r^2 - c^2 t^2) = \frac{1}{2r} \delta(r - ct) + \frac{1}{2r} \delta(r + ct)$, et la fonction Θ dans (B.6) "tue" le second δ .

Grâce au $\delta^{(3)}$ on peut facilement intégrer sur l'espace, alors $\underline{X}'' = (ct'', \vec{r}'')$ devient $\underline{\xi} = (ct', \vec{\xi}(t'))$. Il reste l'intégrale sur t'' . Le δ restant impose de choisir t'' de telle sorte que $\underline{X} - \underline{\xi}$ soit du type lumière: un photon émis en t'' à $\vec{\xi}(t')$ arrive en \vec{r} à t (le processus inverse est tué par le $\Theta(t-t'')$: on utilise le potentiel retardé). On note t' cette valeur particulière de t'' et on l'appelle le temps retardé (cf. figure ci-contre).



En posant $\underline{X} - \underline{\xi} = \underline{R}$ on a $\frac{d}{dt''} R^2 = 2R_\alpha \frac{dR^\alpha}{dt''} = -2R_\alpha \frac{d\xi^\alpha}{dt''}$ et donc [cf. formule (R.1), attention à la valeur absolue]

$$A^\mu(\underline{X}) = \frac{\mu_0 c q}{4\pi} \frac{d\xi^\mu/dt'}{R'_\alpha \frac{d\xi^\alpha}{dt'}}, \quad (\text{B.7})$$

où $\underline{R}' = \underline{X} - (ct', \vec{\xi}(t'))$, t' étant le temps retardé (tel que $R'_\alpha R'^\alpha = 0$). La notation (B.7) est manifestement covariante, mais elle peut prêter à confusion: par exemple $\frac{d\xi^\alpha}{dt'}$ signifie que la dérivée par rapport au temps $\frac{d\xi^\alpha}{dt'}$ est évaluée au temps retardé. En notant \vec{v}' la vitesse au temps retardé et $\underline{R}' = \underline{X} - \underline{\xi}(t')$ on peut écrire

$$A^\mu(\underline{X}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{(c, \vec{v}')}{(1 - \hat{R}' \cdot \vec{\beta}') R'}, \quad (\text{B.8})$$

où $R' = |\underline{R}'|$, $\hat{R}' = \underline{R}'/R'$ et $\vec{\beta}' = \vec{v}'/c$. Se souvenir que cette expression est valable en jauge de Lorenz.

B.2.a Expression de \vec{E} et \vec{B}

Un calcul techniquement délicat mais sans difficulté de principe permet d'obtenir les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} dans le référentiel comobile avec la particule au temps retardé:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{R}'}{R'^2} + \frac{1}{cR'} \left[(\dot{\vec{\beta}}' \cdot \hat{R}') \hat{R}' - \dot{\vec{\beta}}' \right] \right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{R}'}{R'^2} + \frac{1}{cR'} \hat{R}' \wedge (\hat{R}' \wedge \dot{\vec{\beta}}') \right\}, \\ \vec{B} &= -\frac{\mu_0 q}{4\pi R'} \hat{R}' \wedge \dot{\vec{\beta}}' = \frac{\hat{R}'}{c} \wedge \vec{E}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

En se souvenant de la définition du vecteur de Poynting [qui ne sera dérivée que plus tard, cf. (C.15)] on s'aperçoit qu'une charge qui n'accélère pas ne rayonne pas (car alors $\vec{E} \parallel \vec{B}$). Du coup on décompose \vec{E} et \vec{B} en un champ coulombien (formellement identique au champ créé par une particule fixe) et un champ de rayonnement (qui décroît en $1/R'$):

$$\vec{E}_{\text{coul}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R}'}{R'^2}, \quad \vec{B}_{\text{coul}} = \vec{0}, \quad \vec{E}_{\text{ray}} = \frac{\mu_0 q}{4\pi R'} \hat{R}' \wedge (\hat{R}' \wedge \vec{a}'), \quad \vec{B}_{\text{ray}} = \frac{\hat{R}'}{c} \wedge \vec{E}_{\text{ray}}. \quad (\text{B.10})$$

B.2.b Formule de Larmor

On veut calculer la puissance rayonnée par la particule à l'instant t . On sait (cela sera justifié proprement en C.3) que pour cela il faut caculer le flux du vecteur de Poynting \vec{S} à travers une surface entourant la particule.

Prenons un point \vec{r} situé assez loin de la particule pour qu'en \vec{r} la partie coulombienne du champ soit négligeable. La sphère \mathcal{S} de centre le $\vec{\xi}(t')$ (position retardée associée à \vec{r}) et de rayon R' englobe $\vec{\xi}(t)$ (puisque la vitesse de la particule est inférieure à c). \mathcal{S} est donc appropriée pour le calcul du flux de \vec{S} , en outre l'expression des champs y est simple car tous les points de sa surface correspondent à la même position retardée $\vec{\xi}(t')$. On a

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_{\text{ray}} \wedge \vec{B}_{\text{ray}} = \frac{|\vec{E}_{\text{ray}}|^2}{\mu_0 c} \hat{R}'. \quad (\text{B.11})$$

L'expression (B.11) repose sur la relation $\vec{B}_{\text{ray}} = \hat{R}' \wedge \vec{E}_{\text{ray}}/c$ qui est valable dans tous les référentiels. Si l'on choisit de travailler dans le référentiel co-mobile au temps retardé alors $|\vec{E}_{\text{ray}}|^2 = (\frac{\mu_0 q}{4\pi R'} a' \sin \theta)^2$, où \vec{a}' est l'accélération au temps retardé [cf. (B.10)]. La puissance rayonnée à l'instant t par la charge en mouvement est donc

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{S}} d^2\sigma \vec{S} \cdot \hat{R}' = \int \sin \theta d\theta d\varphi R'^2 \frac{|\vec{E}_{\text{ray}}|^2}{\mu_0 c} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a'^2}{4\pi \epsilon_0 c^3} = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \frac{dP'^{\mu}}{d\tau'} \frac{dP'_{\mu}}{d\tau'}. \quad (\text{B.12})$$

On a noté \vec{a}' l'accélération (et a' son module), P' la quadri-impulsion et τ' le temps propre de la particule, chaque quantité étant évaluée au moment retardé.

Remarque: À t fixé, le temps retardé dépend du choix du point \vec{r} qui a fixé la surface d'intégration comme étant une sphère de centre $\vec{\xi}(t')$ (cf. figure ci-dessus). On pourrait donc penser que l'expression (B.12) dépend du point arbitrairement choisi pour faire le calcul du flux de \vec{S} . Il n'en est rien si ce point est assez éloigné pour qu'on puisse ignorer la contribution du champ coulombien. En effet, si au lieu de choisir \vec{r} on prend $\vec{r} + d\vec{r}$ alors le point retardé bouge de $d\vec{\xi}(t') = \left. \frac{d\vec{\xi}}{dt} \right|_{t=t'} \cdot d\vec{r}$ qui est nul dans le référentiel comobile au temps retardé. Donc t' bouge si \vec{r} bouge, mais pas $\vec{\xi}(t')$ (et ni a') dans le référentiel comobile au temps retardé et les quantités apparaissant dans la formule (B.12) sont définies de manière non ambiguë.

B.3 Distribution de charges quelconque

On fait une analyse de Fourier temporelle:

$$J^{\mu}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} J_{\omega}^{\mu}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \iff J_{\omega}^{\mu}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt J^{\mu}(\vec{r}, t) e^{i\omega t}. \quad (\text{B.13})$$

Alors avec la formule des potentiels retardés il est facile de voir qu'en jauge de Lorenz ($k = \omega/c$)

$$A_{\omega}^{\mu}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} J_{\omega}^{\mu}(\vec{r}'). \quad (\text{B.14})$$

On note a la taille typique de la source, $\lambda = 2\pi/k$ et $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. On se place dans la zone de rayonnement où R est grand devant a et λ . Dans cette zone, en posant $\vec{k} = k\hat{r}$ (où $\hat{r} = \vec{r}/r$) on peut

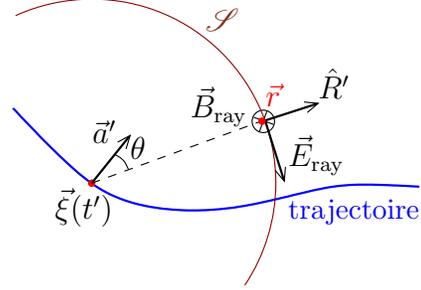


Figure dans le cas simple où \vec{a}' , \hat{R}' et \vec{E}_{ray} sont dans le plan de la feuille. \vec{B}_{ray} pointe vers la feuille en s'éloignant du lecteur.

montrer que $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \simeq i\vec{k}$ et qu'alors

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = i\vec{k} \wedge \vec{A}_\omega(\vec{r}) \quad , \quad \vec{E}_\omega(\vec{r}) = c\vec{B}_\omega(\vec{r}) \wedge \hat{r} . \quad (\text{B.15})$$

On a également $\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \hat{r} \wedge \vec{E}_\omega(\vec{r})/c$. On peut re-écrire l'expression (B.14) des potentiels en précisant un peu la définition de la zone de rayonnement : on se place dans des conditions telles que $1 \ll kR \ll (R/a)^2$ (ce qu'il est toujours possible de faire³) et on peut alors faire l'approximation

$$\frac{e^{ikR}}{R} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'},$$

et (B.14) s'écrit donc

$$A_\omega^\mu(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} J_\omega^\mu(\vec{r}') . \quad (\text{B.16})$$

B.3.a Énergie rayonnée

La puissance rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon r est:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \int d^2\sigma \vec{S} \cdot \hat{r} . \quad (\text{B.17})$$

Cette formule a déjà été vue en L3, on la démontrera par une analyse du tenseur impulsion-énergie (cf. C.3). Dans la zone de rayonnement (cad si r est assez grand) la relation (B.15) permet d'écrire $\vec{E}(\vec{r}, t) = c\vec{B}(\vec{r}, t) \wedge \hat{r}$ puis $\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{\mu_0} |\vec{B}(\vec{r}, t)|^2 \hat{r}$. L'énergie rayonnée ($\int dt \mathcal{P}$) peut être finie ou infinie suivant si la source rayonne pendant un temps fini ou infini.

B.3.b Approximation dipolaire électrique

On se place, toujours dans la zone de rayonnement, dans le cas particulier $a \ll \lambda$, c'est à dire que la source a des dimensions petites devant la longueur d'onde considérée. Alors dans (B.16) on peut remplacer $\exp\{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'\}$ par 1, ce qui conduit à

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{J}_\omega(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} [\dot{\vec{d}}]_\omega \quad \text{où} \quad [\dot{\vec{d}}]_\omega = -i\omega \vec{d}_\omega , \quad (\text{B.18})$$

\vec{d}_ω étant la transformée de Fourier du moment dipolaire électrique $\vec{d}(t)$ de la distribution de charge:

$$\vec{d}(t) = \sum_{a=1}^n q_a \vec{\xi}_a(t) \quad \text{et} \quad \dot{\vec{d}}(t) = \sum_{a=1}^n q_a \vec{v}_a(t) . \quad (\text{B.19})$$

La valeur de $\dot{\vec{d}}(t)$ peut dépendre du choix de l'origine des coordonnées⁴, mais pas celle de $\vec{d}(t)$, cf. Eqs. (B.19).

³En théorie de la diffraction, le régime $ka^2 \ll R$ s'appelle le régime de Fraunhofer.

⁴C'est le cas si la charge totale est non nulle.

Chapitre C : Formalisme lagrangien

C.1 Charge test dans le champ électromagnétique

On fait ici comme si on ne savait rien d'électromagnétisme. On suppose qu'il existe un champ quadri-vectoriel $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$ dont l'action sur une particule se traduit par l'action

$$S = \int_a^b (-m c ds - q A_\mu dX^\mu). \quad (\text{C.1})$$

C'est l'action la plus simple possible qui décrit l'interaction entre la particule et un champ quadri-vectoriel ; on parle de "couplage minimal". Cela correspond au lagrangien $L = L_0 + L_{\text{int}}$ où L_0 est le lagrangien libre et $L_{\text{int}} = -q\phi + q\vec{A}\cdot\vec{v}$. Le principe de moindre action conduit à définir la trajectoire comme l'extremum de l'action:

$$0 = \delta S = - \int_a^b (P_\alpha d\delta X^\alpha + q A_\mu d\delta X^\mu + q \delta A_\mu dX^\mu) = \int_a^b (dP_\alpha + q dA_\alpha) \delta X^\alpha - \int_a^b q \delta A_\mu dX^\mu.$$

où l'on a écrit $\delta ds = \frac{dX_\alpha}{ds} d\delta X^\alpha$ et $P_\alpha = m \frac{dX_\alpha}{d\tau}$. Le terme de droite ci-dessus a été obtenue grâce à une intégration par parties (le terme tout intégré est bien-sûr nul). Le terme en δA_μ dans l'expression ci-dessus ne correspond pas à une modification du champ (dans cette section le champ est fixé, ce n'est pas une variable dynamique), mais au fait que la trajectoire de la particule étant modifiée, elle voit un champ différent. On a donc $\delta A_\mu = \partial_\nu A_\mu \delta X^\nu$. En renommant les indices muets cela donne (on a également écrit $dA_\alpha = \partial_\beta A_\alpha dX^\beta$)

$$0 = \int_a^b \delta X^\alpha \left\{ \frac{dP_\alpha}{d\tau} - q (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \frac{dX^\beta}{d\tau} \right\} d\tau. \quad (\text{C.2})$$

On voit apparaître le tenseur $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ et les éqs. du mouvement sont

$$\frac{d}{d\tau} P_\alpha = q F_{\alpha\beta} U^\beta, \quad (\text{C.3})$$

comme on s'y attendait. Vue la définition du tenseur $F_{\alpha\beta}$ on a déjà directement une partie des éqs. de Maxwell¹:

$$\partial^\alpha {}^*F_{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{C.4})$$

C.2 Lagrangien du champ et des particules

Pour décrire la dynamique des champs, on veut une action invariante de Lorentz et quadratique dans les champs (pour avoir des éqs. de Maxwell linéaires). On a deux candidats sous la main: $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu} {}^*F^{\mu\nu}$. On peut remarquer que $F_{\mu\nu} {}^*F^{\mu\nu}$ étant un pseudo-scalaire, il est directement hors jeu. Mais de manière plus convaincante, on peut l'écrire comme une quadri-divergence [$2\partial_\mu (A_\nu \partial_\lambda A_\sigma \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma})$], et ce terme ne peut donc pas contribuer aux éqs. du mouvement (cf. note 3 plus bas). On prend donc

$$S_{\text{chp}} = -\frac{1}{4\mu_0 c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4X, \quad (\text{C.5})$$

¹À faire en exercice. Cela se démontre en utilisant la propriété de contraction d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique, cf. note 5 du Chapitre A.

ce qui correspond à $S_{\text{chp}} = \int dt L_{\text{chp}}$ avec $L_{\text{chp}} = \int d^3v \mathcal{L}_{\text{chp}}$ où $\mathcal{L}_{\text{chp}} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ est appelé “densité lagrangienne”.

On va légèrement modifier l’écriture de l’interaction particule/champ. Le terme S_{int} qui généralise le terme d’interaction de (C.1) à n particules ponctuelles s’écrit $-\sum_{a=1}^n \int q_a A_\mu(\vec{\xi}_a(t), t) \frac{d\xi_a^\mu}{dt} dt$. En utilisant (A.17) il peut être mis sous la forme $-\frac{1}{c} \int A_\mu(\underline{X}) J^\mu(\underline{X}) d^4X$. On obtient donc

$$S = S_0 + S_{\text{int}} + S_{\text{chp}} = -\sum_{a=1}^n \int m_a c ds_a - \frac{1}{c} \int A_\mu J^\mu d^4X - \frac{1}{4\mu_0 c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4X. \quad (\text{C.6})$$

Dans (C.6) l’intégration $\int d^4X$ est effectuée sur le quadri-volume $[ct_a, ct_b] \times \mathbb{R}^3$.

Remarque: L’action est, à peu de chose près, invariante de jauge. C’est clair pour la partie S_{chp} , mais c’est également vrai pour le terme S_{int} d’interaction particule/champ: une transformation de jauge correspond à $A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu G$. Alors $S_{\text{int}} \rightarrow S_{\text{int}} + \frac{1}{c} \int \partial^\mu (G J_\mu) d^4X$ (où on a utilisé la conservation de la charge électrique: $\partial^\mu J_\mu = 0$). C’est à dire que l’on a ajouté à \mathcal{L}_{int} une quadri-divergence qui –on va le voir, cf. note 3 – ne modifie pas les équations du mouvement du champ.²

On demande à l’action d’être extrémale par rapport aux variations des champs. On fait $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$, avec, pour tout \vec{r} : $\delta A_\mu(\vec{r}, t_a) = 0 = \delta A_\mu(\vec{r}, t_b)$. Alors on a

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int J^\mu \delta A_\mu d^4X - \frac{1}{2\mu_0 c} \int F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} d^4X.$$

On a $\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu$, et par exemple $F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu = \partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) - \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$. Le terme $\partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu)$ est une quadri-divergence dont la contribution peut se re-écrire avec (A.27) sous la forme d’un terme de surface $\oint F^{\mu\nu} \delta A_\nu d^3S_\mu$ qui est nul parce qu’aux bornes spatiales le champ s’annule et δA_ν est nul aux bornes temporelles³. On a donc

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int J^\mu \delta A_\mu d^4X + \frac{1}{2\mu_0 c} \int \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} d^4X - \frac{1}{2\mu_0 c} \int \delta A_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} d^4X.$$

Dans l’équation ci-dessus, les deux dernières intégrales sont égales au signe près, et finalement $\delta S = -\frac{1}{c} \int d^4X \delta A_\mu \{J^\mu + \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\mu\nu}\}$. La condition d’action extrémale impose donc que le champ vérifie

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu. \quad (\text{C.7})$$

Ce sont les éqs. de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère. Vérifier en exercice qu’en prenant la dérivée ∂_μ de (C.7) on obtient la conservation du courant $\partial_\mu J^\mu = 0$.

²Ce point justifie qu’on écarte de la densité lagrangienne un terme de la forme $A_\mu A^\mu$ que rien n’interdit *a priori*. Ce terme brise l’invariance de jauge, et oblige à travailler en jauge de Lorentz (cela se voit à partir des équations de Maxwell qui en découlent). On peut également montrer que ce terme donne une masse au photon (la trace du tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique n’est plus nulle, cf. discussion de la section C.3.c) et modifie la loi de Coulomb qui devient exponentiellement décroissante avec la distance: cf. TD “Limites expérimentales sur la masse du photon”.

³On a donc démontré la propriété plusieurs fois invoquée depuis le début de ce chapitre qu’une quadri-divergence ajoutée à la densité lagrangienne ne modifie pas les éqs. du mouvement.

C.3 Tenseur impulsion-énergie

C.3.a Généralités

On suppose qu'on a un champ scalaire ϕ et une densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ qui ne dépend pas explicitement de \underline{X} . L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} . \quad (\text{C.8})$$

Exercice: Vérifier pour le champ électromagnétique que l'on retrouve les équations (C.7) à partir de (C.8) qui s'écrit dans ce cas $\partial_\mu[\partial \mathcal{L} / \partial(\partial_\mu A_\nu)] = \partial \mathcal{L} / \partial A_\nu$.

Il est facile de voir que⁴

$$\partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0 \quad \text{avec} \quad T_\mu{}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} . \quad (\text{C.9})$$

$T^{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion canonique du champ. D'après la propriété (A.33), la quantité

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v T^{\mu 0}(\vec{r}, t) \quad (\text{C.10})$$

est un quadri-vecteur indépendant du temps. C'est la quadri-impulsion du champ. Cela correspond à une densité d'énergie $u(\vec{r}, t) = T^{00}(\vec{r}, t)$ et une densité d'impulsion $\vec{g}(\vec{r}, t)$ avec $g^i = \frac{1}{c} T^{i0}$.

Remarque: si l'on ajoute à $T^{\mu\nu}$ une quantité de la forme $\partial_\lambda \Psi^{\mu\nu\lambda}$ où $\Psi^{\mu\nu\lambda}(\vec{r}, t)$ est un champ tensoriel antisymétrique en (ν, λ) alors cela ne change ni l'équation de conservation (C.9), ni l'expression de l'impulsion (C.10). La première de ces assertions se démontre aisément. Pour démontrer la seconde il suffit de vérifier que $\int d^3v \partial_\lambda \Psi^{\mu 0\lambda} = 0$. L'antisymétrie de Ψ assure que l'intégrale vaut $\int d^3v \partial_i \Psi^{\mu 0i}$ (car $\Psi^{\mu 00} = 0$). À μ fixé, ce terme est l'intégrale volumique d'une divergence qui peut être transformée (par la version tri-dimensionnelle de Gauss-Ostrogradsky) en un terme de surface qui est nul si l'on fait l'hypothèse que Ψ s'annule suffisamment rapidement à l'infini.

On va essayer d'imposer des contraintes physiques pour restreindre la liberté que l'on a sur le choix de $T^{\mu\nu}$. On définit

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v (X^\mu T^{\nu 0} - X^\nu T^{\mu 0}) . \quad (\text{C.11})$$

Il est clair que $L^{23} = L_x$, $L^{31} = L_y$ et $L^{12} = L_z$ où \vec{L} est le moment cinétique du champ. D'après ce qu'on a vu section A.5.b $L^{\mu\nu}$ sera un "bon tenseur" automatiquement indépendant de t (et donc \vec{L} sera conservé) si le tenseur $M^{\mu\nu\lambda} = X^\mu T^{\nu\lambda} - X^\nu T^{\mu\lambda}$ vérifie $\partial_\lambda M^{\mu\nu\lambda} = 0$. Il est facile de se persuader que cette propriété est équivalente à $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ (à faire en exercice. Indication: utiliser $\partial_\lambda X^\mu = \delta_\lambda^\mu$ et $\partial_\lambda T^{\nu\lambda} = 0$).

On supposera donc désormais, soit que le tenseur canonique est symétrique, soit qu'en ajoutant à l'expression (C.9) un terme $\partial_\lambda \Psi^{\mu\nu\lambda}$ bien choisi on obtient un nouveau tenseur symétrique. On verra section C.3.b que c'est en effet possible dans le cas du champ électromagnétique⁵. Le nouveau tenseur est toujours noté $T^{\mu\nu}$ par abus de langage⁶.

⁴démonstration: considérer \mathcal{L} comme une fonction de \underline{X} et calculer $\partial_\mu \mathcal{L}$ en utilisant (C.8) pour éliminer $\partial \mathcal{L} / \partial \phi$.

⁵Dans le cas général c'est également possible grâce à la "transformation de Belifante".

⁶Certains auteurs préfèrent utiliser la notation $\Theta^{\mu\nu}$ pour le tenseur canonique et $T^{\mu\nu}$ pour sa forme symétrisée.

La discussion du cours magistral montre que $T^{\mu\nu}$ peut être écrit comme suit :

$$T^{\mu\nu}(\vec{r}, t) = \left(\begin{array}{c|ccc} u & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ \hline c g_x & & & \\ c g_y & & -\sigma^{ij} & \\ c g_z & & & \end{array} \right), \quad (\text{C.12})$$

où $u(\vec{r}, t)$ est la densité d'énergie, $\vec{g}(\vec{r}, t)$ la densité d'impulsion, $\vec{S}(\vec{r}, t)$ la densité de courant d'énergie (le vecteur de Poynting en électromagnétisme), et $\sigma^{ij}(\vec{r}, t)$ le tenseur des contraintes. La symétrie de $T^{\mu\nu}$ assure que $c\vec{g} = \vec{S}/c$.

C.3.b Le champ électromagnétique libre

On considère dans un premier temps le cas du champ libre (c'est à dire sans particules). Avec la définition (C.9) on obtient le tenseur impulsion-énergie canonique

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{chp}}}{\partial (\partial_\nu A_\sigma)} \partial^\mu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{chp}} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\sigma} \partial^\mu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{chp}}. \quad (\text{C.13})$$

Avec $\mathcal{L}_{\text{chp}} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ (absence de particules). En définissant $\Psi^{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{\mu_0} A^\mu F^{\nu\sigma} = -\frac{1}{\mu_0} A^\mu F^{\sigma\nu}$ on voit que $T^{\mu\nu} + \partial_\sigma \Psi^{\mu\nu\sigma}$ (que l'on notera $T_{\text{chp}}^{\mu\nu}$) a pour expression

$$T_{\text{chp}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\sigma} F^\mu{}_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{chp}}. \quad (\text{C.14})$$

Cette expression est clairement symétrique en μ et ν et elle a le bon goût d'être invariante de jauge (contrairement à (C.13)). Remarque : la manipulation que l'on vient de faire n'est satisfaisante qu'en l'absence de particules, car elle utilise le fait que $\partial_\sigma F^{\sigma\nu} = 0$ (ce qui permet d'écrire $\partial_\sigma \Psi^{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{\mu_0} F^{\nu\sigma} \partial_\sigma A^\mu$). Le cas du champ en interaction avec des particules est traité section C.3.c.

À partir de l'expression (C.14) et de l'interprétation physique (C.12) on obtient pour le champ électromagnétique

$$u(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2, \quad \vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}. \quad (\text{C.15})$$

Le tenseur tridimensionnel des contraintes est appelé tenseur de Maxwell, on ne le note plus σ comme dans (C.12) mais T_{M} avec

$$T_{\text{M}}^{ij} = \varepsilon_0 \left[E^i E^j + c^2 B^i B^j - \frac{\delta^{ij}}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) \right]. \quad (\text{C.16})$$

C.3.c Les particules

Dans cette partie on généralise le résultat de la section précédente afin de prendre en compte l'interaction du champ avec les particules.

On définit tout d'abord le quadri-vecteur courant de masse. La démarche est la même que pour le quadri-vecteur courant électrique: on note $\rho_{\text{m}}(\vec{r}, t) = \sum_{a=1}^n m_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}_a(t))$ la densité de masse. La conservation de la masse implique que $J_{\text{m}}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{\text{m}} dX^\alpha/dt$ est un bon quadri-vecteur dont la divergence est nulle.

La densité d'impulsion des particules est certainement $\rho_m U^i$, cela doit être la partie $\frac{1}{c} T_{\text{part}}^{i0}$. En l'absence d'une théorie de champ pour les particules qui permettrait – comme il a été fait à la section **C.3.a** pour T_{chp} – une approche constructiviste du tenseur impulsion-énergie T_{part} on adopte une approche inductive et comme $\rho_m = J_m^0/c$ on essaie

$$T_{\text{part}}^{\alpha\beta}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} U^\alpha J_m^\beta(\vec{r}, t) = \sum_{a=1}^n \frac{m_a}{\gamma_a} \frac{d\xi_a^\alpha}{d\tau_a} \frac{d\xi_a^\beta}{d\tau_a} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}_a(t)), \quad (\text{C.17})$$

où $\gamma_a = (1 - \vec{v}_a^2/c^2)^{-1/2}$. La dernière égalité résulte de la définition de J_m , elle permet de voir que le tenseur impulsion-énergie des particules est symétrique.

Remarque: On peut définir le champ $\rho_m^0(\vec{r}, t) = \sum_{a=1}^n \frac{m_a}{\gamma_a} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}_a(t))$ qui est un scalaire de Lorentz⁷, et alors $T_{\text{part}}^{\alpha\beta} = \rho_m^0 U^\alpha U^\beta$, ce qui permet de montrer que la trace $T_{\text{part}}^\alpha{}_\alpha(\vec{r}, t) = \rho_m^0(\vec{r}, t) c^2$. Alors, si l'on essaie d'interpréter le champ électromagnétique comme composé de particules effectives, on voit que ces particules doivent être de masse nulle parce que $T_{\text{chp}}^\alpha{}_\alpha(\vec{r}, t) = 0$ d'après (C.14).

Notre construction intuitive du tenseur impulsion-énergie des particules doit être validée par le fait que, pour des particules en interaction avec le champ électromagnétique, on doit vérifier

$$\partial_\beta (T_{\text{part}\alpha}^\beta + T_{\text{chp}\alpha}^\beta) = 0. \quad (\text{C.18})$$

Ici, on n'a plus $\partial_\beta T_{\text{chp}\alpha}^\beta = 0$ comme pour le champ libre (sec. **C.3.b**), mais $\partial_\beta T_{\text{chp}\alpha}^\beta = -F_{\alpha\sigma} J^\sigma$, et la contribution des particules annule exactement ce terme⁸. Noter donc que, même en présence de particules, on doit utiliser la forme (C.14) du tenseur du champ (calculée en l'absence de particules). Seule cette forme permet, une fois la contribution (C.17) des particules prise en compte, d'obtenir la loi de conservation (C.18) qui justifie l'interprétation physique du tenseur total $T = T_{\text{chp}} + T_{\text{part}}$ donnée en fin de section **C.3.a**.

L'expression du tenseur impulsion-énergie du système permet d'exprimer l'énergie totale des particules et du champ en interaction mutuelle : c'est la quantité $\mathcal{E} = \int d^3r (T_{\text{part}}^{00} + T_{\text{chp}}^{00})$. Le calcul est immédiat, on obtient :

$$\mathcal{E} = \sum_{a=1}^n \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \vec{v}_a^2/c^2}} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right\}. \quad (\text{C.19})$$

Le premier terme est l'énergie cinétique (plus le terme de masse) des particules, et le second est l'intégrale de la densité d'énergie du champ. On peut être surpris par cette expression de l'énergie qui semble ne rendre compte ni de l'interaction des particules (qui sont chargées) avec le champ électrique, ni de l'interaction des particules entre elles. Ces effets d'interaction sont bien présents dans (C.19), mais n'apparaissent pas explicitement. Dans le chapitre suivant on va pouvoir les identifier plus facilement [formule (D.11)].

⁷Pour une seule particule ρ_m^0 est la densité massique dans son référentiel propre. Pour n particules il n'y a pas de référentiel propre global, mais ρ_m^0 est clairement invariant de Lorentz (c'est une somme de termes invariants).

⁸On a

$$\partial_\beta T_{\text{part}\alpha}^\beta = \partial_\beta (J_m^\beta U_\alpha) = J_m^\beta \partial_\beta U_\alpha = \rho_m \frac{dX^\beta}{dt} \frac{\partial U_\alpha}{\partial X^\beta} = \rho_m \frac{dU_\alpha}{dt} = \sum_{a=1}^n m_a \frac{dU_\alpha^{(a)}}{d\tau_a} \frac{d\tau_a}{dt} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{\xi}_a(t)).$$

L'équation du mouvement de la particule (a) s'écrit $m_a dU_\alpha^{(a)}/d\tau_a = q_a F_{\alpha\sigma} U_\sigma^{(a)}$, en écrivant $U_\sigma^{(a)} d\tau_a/dt = d\xi_\sigma^{(a)}/dt$ on voit que $\partial_\beta T_{\text{part}\alpha}^\beta = F_{\alpha\sigma} \rho dX^\sigma/dt = F_{\alpha\sigma} J^\sigma$.

Chapitre D : Quantification

D.1 Quantification canonique en jauge de Coulomb

D.1.a Notion de champ vectoriel longitudinal et transverse

Un champ vectoriel $\vec{F}(\vec{r})$ est transverse si, pour tout \vec{r} , $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$. Il est longitudinal si, pour tout \vec{r} , $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$.

Tout champ vectoriel $\vec{F}(\vec{r})$ qui tend suffisamment rapidement vers zéro à l'infini peut s'écrire comme la somme d'un champ longitudinal ($\vec{F}_{\parallel}(\vec{r})$) et d'un champ transverse ($\vec{F}_{\perp}(\vec{r})$). C'est la décomposition de Helmholtz¹. En utilisant Parseval-Plancherel (R.7) on démontre alors que

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \vec{F}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r (\vec{F}_{\parallel}^2 + \vec{F}_{\perp}^2) . \quad (\text{D.2})$$

Dans la suite, en l'absence de précision, le domaine d'intégration sera toujours \mathbb{R}^3 .

D.1.b Écriture du hamiltonien en jauge de Coulomb

À partir de l'expression (C.6) – et en traitant les particules dans une approximation non relativiste – on écrit:

$$L = \sum_{a=1}^n \frac{m_a}{2} \dot{\vec{r}}_a^2 + \int \mathcal{L} d^3r \quad \text{où} \quad \mathcal{L} = -\rho\phi + \vec{J} \cdot \vec{A} + \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2) , \quad (\text{D.3})$$

On se place en jauge de Coulomb : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Alors le potentiel scalaire est solution de l'équation de Poisson $\vec{\nabla}^2 \phi + \rho/\varepsilon_0 = 0$ et peut donc être éliminé de l'expression du lagrangien et écrivant

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (\text{D.4})$$

Ensuite on décompose le champ électrique en composantes transverse et longitudinale: $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ où $\vec{E}_{\parallel} = -\vec{\nabla}\phi$ et $\vec{E}_{\perp} = -\dot{\vec{A}}$. On a alors (grâce à (D.2))

$$\int d^3r \vec{E}^2 = \int d^3r (\vec{E}_{\parallel}^2 + \vec{E}_{\perp}^2) \quad (\text{D.5})$$

et²

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}_{\parallel}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r |\vec{\nabla}\phi|^2 = \int \frac{d^3r d^3r'}{8\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}, t)\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (\text{D.6})$$

¹Cela se démontre en passant par la transformée de Fourier spatiale $\vec{\mathcal{F}}(\vec{q})$. On peut écrire $\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}_{\parallel} + \vec{\mathcal{F}}_{\perp}$ où $\vec{\mathcal{F}}_{\parallel} = \vec{q}(\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{q})/q^2$ et $\vec{\mathcal{F}}_{\perp} = -\vec{q} \wedge (\vec{q} \wedge \vec{\mathcal{F}})/q^2$, ce qui – en utilisant (R.6) – se traduit dans l'espace réel par

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} , \quad \text{où} \quad \vec{F}_{\parallel}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left(\int \frac{d^3r'}{4\pi} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\perp}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \left(\int \frac{d^3r'}{4\pi} \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) . \quad (\text{D.1})$$

Noter que la formule ci-dessus ne fonctionne pas pour un champ \vec{F} constant dans tout l'espace que l'on peut écrire, au choix, comme un gradient ou comme un rotationnel. Noter également que l'expression (D.1) justifie que, par exemple, on puisse écrire un champ de divergence nulle comme le rotationnel d'un potentiel vecteur.

²En effet, en appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradsky à $\int d^3r \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla}\phi)$ on peut re-écrire le terme central de (D.6) sous la forme $-\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int d^3r \phi \vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{2} \int d^3r \rho \phi$. Il suffit ensuite d'utiliser (D.4) pour obtenir le résultat.

On a également

$$\int d^3r \left(-\rho\phi + \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}_{\parallel}^2 \right) = - \int \frac{d^3r d^3r'}{8\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}, t)\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} - \sum_a \varepsilon_a^{\text{coul}}, \quad (\text{D.7})$$

où $\varepsilon_a^{\text{coul}}$ est une contribution infinie qui n'affecte pas la dynamique des particules (et bien-sûr pas celle du champ non plus). On obtient alors :

$$L = \sum_{a=1}^n \frac{m_a}{2} \dot{\vec{r}}_a^2 + \sum_a q_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{A}(\vec{r}_a, t) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \left[\dot{\vec{A}}^2 - c^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 \right]. \quad (\text{D.8})$$

Alors les moments conjugués sont

$$\vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} = m_a \dot{\vec{r}}_a + q_a \vec{A}(\vec{r}_a, t) \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = \varepsilon_0 \dot{\vec{A}} = -\varepsilon_0 \vec{E}_{\perp}. \quad (\text{D.9})$$

Cela permet d'écrire le hamiltonien, qui n'est rien d'autre que la version non relativiste de l'énergie (C.19)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^2 + \frac{1}{2} \int d^3r \left[\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right], \quad (\text{D.10})$$

exprimée en fonction des couples de variables conjuguées (\vec{r}_a, \vec{p}_a) et $(\vec{A}, \vec{\Pi})$. Avec (D.5) on obtient :

$$H = \sum_{a=1}^n \frac{1}{2m_a} \left[\vec{p}_a - q_a \vec{A}(\vec{r}_a, t) \right]^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \left[\frac{\vec{\Pi}^2}{\varepsilon_0^2} + c^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 \right]. \quad (\text{D.11})$$

D.1.c Quantification canonique du champ

On travaille en représentation de Schrödinger: le champ classique réel $\vec{A}(\vec{r}, t)$ devient un opérateur de champ $\vec{A}(\vec{r})$ auto-adjoint. On met le système dans un cube de côté L [cf. section R.1, éqs. (R.11) et suivantes] et on écrit :

$$A_i(\vec{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\underline{n}} \mathcal{A}_i(\vec{k}_{\underline{n}}) \exp\{i\vec{k}_{\underline{n}} \cdot \vec{r}\}, \quad \Pi_i(\vec{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\underline{n}} \pi_i(\vec{k}_{\underline{n}}) \exp\{i\vec{k}_{\underline{n}} \cdot \vec{r}\}, \quad (\text{D.12})$$

où $i \in \{x, y, z\}$ représente l'une des 3 coordonnées spatiales des vecteurs considérés et la somme $\sum_{\underline{n}}$ est une notation simplifiée pour $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^3}$ [cf. la discussion de la formule (R.11)]. Comme $\vec{A}(\vec{r})$ et $\vec{\Pi}(\vec{r})$ sont auto-adjoint on doit avoir

$$\vec{A}(\vec{k}_{\underline{n}}) = \vec{A}^{\dagger}(-\vec{k}_{\underline{n}}) \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}(\vec{k}_{\underline{n}}) = \vec{\Pi}^{\dagger}(-\vec{k}_{\underline{n}}). \quad (\text{D.13})$$

La quantification canonique dans la représentation de Schrödinger conduit à quantifier les degrés de liberté indépendants: les composantes du champ dans un plan perpendiculaire à \hat{k} muni d'une base $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2)$:

$$\left[\mathcal{A}_{\lambda}(\vec{k}_{\underline{n}}), \pi_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}_{\underline{n}'}) \right] = i\hbar \delta_{\lambda, \lambda'} L^3 \delta_{\underline{n}, \underline{n}'}, \quad \text{où} \quad \lambda, \lambda' \in \{1, 2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\lambda} = \vec{A} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda}. \quad (\text{D.14})$$

On peut alors montrer que pour les composantes cartésiennes on a

$$[\mathcal{A}_i(\vec{k}_n), \Pi_j^\dagger(\vec{k}_{n'})] = i\hbar \left(\delta_{i,j} - \frac{k_{n,i}k_{n',j}}{k_n^2} \right) L^3 \delta_{n,n'} , \quad \text{où } i, j \in \{x, y, z\} \quad \text{et } \mathcal{A}_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i . \quad (\text{D.15})$$

Noter que la relation (D.15) est compatible avec la jauge de Coulomb qui sécrit $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$.

On introduit les opérateurs de création a_ν^\dagger et d'annihilation a_ν (ν est une notation globale pour \underline{n} et λ)

$$2\mathcal{N}_n a_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_\lambda(\vec{k}_n) + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega_n} \Pi_\lambda(\vec{k}_n) , \quad (\text{D.16})$$

où $\omega_n \stackrel{\text{def}}{=}} c|\vec{k}_n|$. On peut vérifier avec (D.14) – en choisissant correctement la valeur pour l'instant arbitraire de la constante de normalisation \mathcal{N}_n – que les opérateurs a_ν et a_ν^\dagger obéissent aux relations de commutation

$$[a_\nu, a_{\nu'}^\dagger] = \delta_{\nu,\nu'} , \quad [a_\nu, a_{\nu'}] = 0 , \quad [a_\nu^\dagger, a_{\nu'}^\dagger] = 0 , \quad (\text{D.17})$$

où $\delta_{\nu,\nu'}$ est une notation pour $\delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{n,n'}$. Pour vérifier (D.17) avec la bonne normalisation il suffit de prendre $\mathcal{N}_n = [\hbar L^3 / (2\varepsilon_0 \omega_n)]^{1/2}$. Ensuite on suit la démarche utilisée en licence pour diagonaliser l'oscillateur harmonique: on inverse la relation (D.16) en résolvant le système 2×2 :

$$2\mathcal{N}_n a_\nu = \mathcal{A}_\lambda(\vec{k}_n) + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega_n} \Pi_\lambda(\vec{k}_n) \quad \text{et} \quad 2\mathcal{N}_n a_{-\nu}^\dagger = \mathcal{A}_\lambda(\vec{k}_n) - \frac{i}{\varepsilon_0 \omega_n} \Pi_\lambda(\vec{k}_n) , \quad (\text{D.18})$$

où l'on a utilisé (D.13) et “ $-\nu$ ” est une notation pour $(-n_x, -n_y, -n_z, \lambda)$. (D.18) conduit à

$$\mathcal{A}_\lambda(\vec{k}_n) = \mathcal{N}_n (a_\nu + a_{-\nu}^\dagger) \quad \text{et} \quad \Pi_\lambda(\vec{k}_n) = -i\varepsilon_0 \omega_n \mathcal{N}_n (a_\nu - a_{-\nu}^\dagger) \quad (\text{D.19})$$

Ce qui permet d'écrire³:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \sum_\nu \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_n}} (a_\nu \exp\{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\} + a_\nu^\dagger \exp\{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\}) \vec{e}_\lambda , \\ \vec{E}_\perp(\vec{r}) = -\frac{\vec{\Pi}(\vec{r})}{\varepsilon_0} &= \sum_\nu \sqrt{\frac{\hbar \omega_n}{2\varepsilon_0 L^3}} (ia_\nu \exp\{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\} - ia_\nu^\dagger \exp\{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\}) \vec{e}_\lambda , \\ \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \sum_\nu \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_n}} (ia_\nu \exp\{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\} - ia_\nu^\dagger \exp\{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\}) \vec{k}_n \wedge \vec{e}_\lambda . \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Cela conduit, après quelques calculs, à l'expression du hamiltonien du champ électromagnétique $H_{\text{e.m}}$ [$H_{\text{e.m}}$ est le dernier terme du membre de droite de (D.11)]

$$H_{\text{e.m}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{[0,L]^3} d^3r \left[\frac{\vec{\Pi}^2}{\varepsilon_0^2} + c^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 \right] = \sum_\nu \hbar \omega_n \left(a_\nu^\dagger a_\nu + \frac{1}{2} \right) . \quad (\text{D.21})$$

Pour obtenir (D.21) à partir de (D.20) il est commode d'écrire $\vec{\Pi}$ et \vec{B} sous une forme qui découle de (D.19)

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(\vec{r}) &= \frac{1}{L^3} \sum_{\underline{n}} \vec{\pi}(\vec{k}_n) \exp\{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\} , \quad \text{avec} \quad \vec{\pi}(\vec{k}_n) = \sum_\lambda \pi_\lambda(\vec{k}_n) \vec{e}_\lambda \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{1}{L^3} \sum_{\underline{n}} \vec{B}(\vec{k}_n) \exp\{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\} , \quad \text{avec} \quad \vec{B}(\vec{k}_n) = i\mathcal{N}_n \sum_\lambda (a_\nu + a_{-\nu}^\dagger) (\vec{k}_n \wedge \vec{e}_\lambda) \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

³On utilise $\vec{k}_{(-\underline{n})} = -\vec{k}_n$. Dans la formule (D.20) \sum_ν est une notation simplifiée pour $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^3} \sum_{\lambda \in \{1,2\}}$.

Ensuite on utilise l'égalité de Parseval-Plancherel (R.15) pour écrire:

$$\begin{aligned} \int_{[0,L]^3} d^3r \vec{\Pi}^\dagger(\vec{r}) \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}) &= \frac{1}{L^3} \sum_{\underline{n}} \vec{\pi}^\dagger(\vec{k}_{\underline{n}}) \cdot \vec{\pi}(\vec{k}_{\underline{n}}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\nu} \pi_{\lambda}^\dagger(\vec{k}_{\underline{n}}) \pi_{\lambda}(\vec{k}_{\underline{n}}) \\ &= \frac{1}{L^3} \sum_{\nu} (\varepsilon_0 \omega_{\underline{n}} \mathcal{N}_{\underline{n}})^2 (a_{\nu}^\dagger - a_{-\nu}) (a_{\nu} - a_{-\nu}^\dagger) , \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

et⁴

$$\int_{[0,L]^3} d^3r \vec{B}^\dagger(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\underline{n}} \vec{B}^\dagger(\vec{k}_{\underline{n}}) \cdot \vec{B}(\vec{k}_{\underline{n}}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\nu} |\vec{k}_{\underline{n}}|^2 \mathcal{N}_{\underline{n}}^2 (a_{\nu}^\dagger + a_{-\nu}) (a_{\nu} + a_{-\nu}^\dagger) . \quad (\text{D.24})$$

On a alors⁵

$$\begin{aligned} H_{\text{e.m}} &= \int_{[0,L]^3} d^3r \left(\frac{\vec{\Pi}^\dagger(\vec{r}) \cdot \vec{\Pi}(\vec{r})}{2\varepsilon_0} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \vec{B}^\dagger(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) \right) \\ &= \sum_{\nu} \frac{\hbar \omega_{\underline{n}}}{4} [(a_{\nu}^\dagger - a_{-\nu}) (a_{\nu} - a_{-\nu}^\dagger) + (a_{\nu}^\dagger + a_{-\nu}) (a_{\nu} + a_{-\nu}^\dagger)] \\ &= \sum_{\nu} \frac{\hbar \omega_{\underline{n}}}{2} [a_{\nu}^\dagger a_{\nu} + a_{-\nu} a_{-\nu}^\dagger] = \sum_{\nu} \frac{\hbar \omega_{\underline{n}}}{2} [a_{\nu}^\dagger a_{\nu} + a_{\nu} a_{\nu}^\dagger] = \sum_{\nu} \hbar \omega_{\underline{n}} [a_{\nu}^\dagger a_{\nu} + \frac{1}{2}] , \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

ce qui achève la démonstration de (D.21).

L'espace des états du champ est le produit tensoriel des espaces associés à chacun des modes propres du champ. Le fondamental du champ peut être noté $|0\rangle = |0_1 \dots 0_{\nu} \dots\rangle$. Les états propres sont de la forme (cf. le cas de l'oscillateur harmonique dans votre cours de L3)

$$|n_1 \dots n_{\nu} \dots\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \dots \frac{(a_{\nu}^\dagger)^{n_{\nu}}}{\sqrt{n_{\nu}!}} \dots |0\rangle . \quad (\text{D.26})$$

On dit qu'un tel état décrit un système avec n_1 photons dans l'état 1, \dots n_{ν} photons dans l'état ν , \dots . Cela correspond à une énergie d'excitation $\sum_{\nu} n_{\nu} \hbar \omega_{\underline{n}}$ par rapport au vide (qui a une énergie infinie).

D.2 Interaction atome/rayonnement

D.2.a Hamiltonien d'interaction

Il est courant de travailler en présence d'un champ extérieur fixé *a priori* et qui ne dépend pas du mouvement des particules du système. On écrit donc $\vec{A}_{\text{tot}}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{\text{e}}(\vec{r}, t) + \vec{A}(\vec{r}, t)$ et $\phi_{\text{tot}}(\vec{r}, t) = \phi_{\text{e}}(\vec{r}, t) + \phi(\vec{r}, t)$. L'indice "e" est pour "extérieur". Le champ sans indice est celui qu'on quantifie en jauge de Coulomb⁶. On a alors pour l'opérateur impulsion

$$\vec{p}_a = m_a \dot{\vec{r}}_a + q_a [\vec{A}(\vec{r}_a) + \vec{A}_{\text{e}}(\vec{r}_a, t)] , \quad (\text{D.27})$$

⁴Pour faire le calcul conduisant au membre de droite de (D.24), lors de l'évaluation du produit scalaire $\vec{B}^\dagger(\vec{k}_{\underline{n}}) \cdot \vec{B}(\vec{k}_{\underline{n}})$ on utilise la formule (facile à démontrer)

$$(\vec{k}_{\underline{n}} \wedge \hat{e}_{\lambda}) \cdot (\vec{k}_{\underline{n}} \wedge \hat{e}_{\lambda'}) = |\vec{k}_{\underline{n}}|^2 \delta_{\lambda, \lambda'}$$

⁵La dernière égalité de (D.25) est obtenue en utilisant la relation (D.17) qui donne: $a_{\nu} a_{\nu}^\dagger = 1 + a_{\nu}^\dagger a_{\nu}$.

⁶Il n'est pas nécessaire d'utiliser la jauge de Coulomb pour le champ extérieur.

et on trouve sans surprise

$$H = \sum_a \frac{1}{2m_a} \left[\vec{p}_a - q_a \vec{A}_e(\vec{r}_a, t) - q_a \vec{A}(\vec{r}_a) \right]^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} + \sum_a q_a \phi_e(\vec{r}_a, t) + \sum_\nu \hbar \omega_\nu \left(a_\nu^\dagger a_\nu + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{D.28})$$

En définissant $\vec{p}_{e,a} = \vec{p}_a - q_a \vec{A}_e(\vec{r}_a, t)$, cet hamiltonien peut être séparé en 3 termes, $H_{P,e}$, $H_{e,m}$ et H_I . Le premier décrit des particules évoluant dans un champ extérieur:

$$H_{P,e} = \sum_a \frac{1}{2m_a} (\vec{p}_{e,a})^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} + \sum_a q_a \phi_e(\vec{r}_a, t). \quad (\text{D.29})$$

On peut remarquer qu'il est commode de traiter le champ extérieur également en jauge de Coulomb, car dans ce cas $\phi_e \equiv 0$ puisqu'on peut clairement négliger l'interaction électrostatique entre les électrons du système et les charges créant ϕ_e .

La deuxième contribution à (D.28) est le hamiltonien $H_{e,m}$ du champ électromagnétique (D.21), et la suivante contient tous les termes restants: c'est le terme H_I qui se met sous la forme

$$H_I = W + W' \quad \text{avec} \quad W = - \sum_a \frac{q_a}{m_a} \vec{p}_{e,a} \cdot \vec{A}(\vec{r}_a) \quad \text{et} \quad W' = \sum_a \frac{q_a^2}{2m_a} \vec{A}^2(\vec{r}_a). \quad (\text{D.30})$$

Remarque: on a $\vec{p} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, et donc en jauge de Coulomb $\vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{p}$. Cette propriété se démontre en partant de $[p_k, A_j] = -i\hbar \partial A_j / \partial x_k$ et en sommant de $k = j = 1$ à 3. Pour obtenir l'écriture (D.30) de H_I on a utilisé le fait que $\vec{p}_{e,a}$ commute avec $\vec{A}(\vec{r}_a)$ qui découle de la propriété ci-dessus (commutation de \vec{p}_a et $\vec{A}(\vec{r}_a)$ en jauge de Coulomb) et du fait que $\vec{A}_e(\vec{r}_a, t)$ commute avec $\vec{A}(\vec{r}_a)$ [cf. expression (D.20) de $\vec{A}(\vec{r}_a)$].

Une configuration déjà étudiée en L3 consiste à considérer les transitions atomiques sous l'influence d'un champ extérieur sans prendre en compte les modifications du champ résultant de ces transitions. Cela revient à prendre $\vec{A}(\vec{r}_a) \equiv 0$ et à ne pas tenir compte de $H_{e,m}$. Dans cette configuration $H_I \equiv 0$ et on développe encore $H_{P,e}$ sous la forme $H_p + W_e + W'_e$ où W_e et W'_e ont la même forme que W et W' dans (D.30) mais avec \vec{A} remplacé par \vec{A}_e (et H_p a la même forme que $H_{P,e}$ mais où $\vec{p}_{e,a}$ est remplacé par \vec{p}_a .)

Par la suite (section D.2.b) nous allons étudier la désexcitation d'un atome sans champ extérieur. C'est une configuration (différente de celle étudiée en L3) où l'on prend en compte le champ associé aux transitions atomiques. Comme ces transitions sont quantifiées il est naturel de traiter ce champ quantiquement: c'est le champ $\vec{A}(\vec{r}_a)$. On a alors directement $\vec{A}_e \equiv 0$ et $H_{P,e} = H_p$.

Dans ces deux configurations (section D.2.b ou L3) on traite $W + W'$ (ou $W_e + W'_e$) comme une perturbation. Mais alors, en ce qui concerne les ordres de grandeurs on a (formule valable dans tous les cas, c.a.d. avec ou sans incidence "e"):

$$\frac{W'}{W} \approx \frac{q^2 A^2 / m}{q p A / m} \approx \frac{q p A / m}{p^2 / m} \approx \frac{W}{H_p} \ll 1. \quad (\text{D.31})$$

Donc si l'on travaille au premier ordre des perturbations il suffit de considérer seulement l'effet de W (ou de W_e le cas échéant) en négligeant W' (ou W'_e).

Il y a également une autre approximation très naturelle: les longueurs d'onde du rayonnement correspondant à une transition atomique sont typiquement⁷ $\lambda = 2\pi\hbar c/E_{\text{transi}} \sim 10^4 \text{ \AA}$ alors que l'extension du nuage électronique est de l'ordre du rayon de Bohr, c.a.d. 0.5 \AA . On peut donc faire l'approximation dipolaire électrique: $\vec{A}(\vec{r}_a) = \vec{A}(\vec{0})$ et $\vec{A}_e(\vec{r}_a, t) = \vec{A}(\vec{0}, t)$.

D.2.b Émission spontanée

On considère l'atome d'hydrogène avec un noyau infiniment lourd immobile à l'origine du système de coordonnées. On n'a qu'une seule charge mobile : l'électron ; et on peut donc laisser tomber l'indice a qui repère les degrés de liberté des particules chargées. On a alors $H_p = p^2/(2m) - e^2/r$ [avec $e^2 \stackrel{\text{def}}{=} q^2/(4\pi\epsilon_0)$] et $W = -q\vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{0})/m$. Les niveaux propres de H_p sont de la forme $-E_l/N^2$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ ($E_1 = e^2/(2a_0) = 13.6 \text{ eV}$ où $a_0 = \hbar^2/(me^2) = 0.529 \text{ \AA}$ est le rayon de Bohr). Les états propres associés sont de la forme⁸ $R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta, \phi)$ avec $l+n = N$, $n \in \mathbb{N}^*$, donc $0 \leq l \leq N-1$. En tenant compte du spin, un niveau N a donc une dégénérescence $2 \sum_{l=0}^{N-1} (2l+1) = 2N^2$.

Ici on étudie la désexcitation de l'atome par émission d'un photon. On calcule le taux de transition d'un état initial $|\varphi_i\rangle = |a, 0\rangle$ où l'électron est dans un état excité (repéré par a) et le champ électromagnétique est dans son état fondamental (le "vide de photons") vers un état $|\varphi_f\rangle = |b, 1_\nu\rangle$. La formule (R.36) nous donne

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \varphi_f | W | \varphi_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i), \quad (\text{D.32})$$

où ici $W = -\frac{q}{m}\vec{A}(\vec{0}) \cdot \vec{p}$. On obtient pour le taux de transition total (obtenu en sommant sur les états du photon émis)

$$\Gamma_{a \rightarrow b} = \sum_{\nu} \Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{4e^2(E_a - E_b)^3}{3\hbar^4 c^3} |\vec{r}_{ba}|^2, \quad (\text{D.33})$$

où $\vec{r}_{ba} = \langle b | \vec{r} | a \rangle$.

Démonstration de (D.33): Il faut d'abord évaluer l'élément de matrice

$$\langle \varphi_f | W | \varphi_i \rangle = -\frac{q}{m} \langle 1_\nu | \vec{A}(\vec{0}) | 0 \rangle \cdot \langle b | \vec{p} | a \rangle.$$

En utilisant le fait que $[H_{\text{el}}, \vec{r}] = -i\hbar\vec{p}/m$ on obtient $\langle b | \vec{p} | a \rangle = -im(E_a - E_b)\vec{r}_{ba}/\hbar$. On a également $\langle 1_\nu | \vec{A}(\vec{0}) | 0 \rangle = [\hbar/(2\epsilon_0 L^3 \omega_\nu)]^{1/2} \vec{\epsilon}_\lambda$, d'où

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{\pi q^2}{\epsilon_0 L^3 \hbar^2} \frac{(E_a - E_b)^2}{\omega_\nu} (\vec{r}_{ba} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda)^2 \delta(E_b + \hbar\omega_\nu - E_a).$$

Ensuite la somme sur ν dans (D.33) est effectuée avec la règle $\sum_{\nu} = \sum_{\underline{n}} \sum_{\lambda} = (L/2\pi)^3 \int d^3k \sum_{\lambda}$ [cf. section D.1.c et formule (R.14)]. On évalue l'intégrale sur les vecteurs d'onde en coordonnées sphériques ($d^3k = k^2 dk d^2\Omega_k$). On obtient la formule (D.33) en remarquant que pour tout vecteur \vec{V} on a

$$\int d^2\Omega_k \sum_{\lambda} (\vec{V} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda)^2 = \int d^2\Omega_k [V^2 - (\vec{V} \cdot \hat{k})^2] = 2\pi V^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta (1 - \cos^2\theta) = \frac{8\pi}{3} V^2. \quad (\text{D.34})$$

⁷En utilisant $E_{\text{transi}} = h\nu \sim 1 \text{ eV}$ et $\hbar c \simeq 200 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$.

⁸ N est le nombre quantique principal. Attention au conflit de notations avec le Cohen-Tannoudji–Dui–Laloë qui note n ce qui est ici noté N et k ce qui est ici noté n .

Un calcul explicite à partir de (D.33) donne par exemple pour la raie Lyman- α (transition $2p \rightarrow 1s$, de longueur d'onde $\lambda = 121.5$ nm)⁹

$$\hbar\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \alpha^3 e^2/a_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \alpha^5 mc^2 = 4.125 \times 10^{-7} \text{ eV}, \quad (\text{D.37})$$

où l'on a noté $\alpha = e^2/(\hbar c)$ la constante de structure fine ($\alpha^{-1} = 1.37036$). Attention le préfacteur sans dimension $(2/3)^8 \simeq 4 \times 10^{-2}$ est également important pour l'ordre de grandeur. La durée de vie de l'état $2p$ est $(\Gamma_{2p \rightarrow 1s})^{-1} \sim \alpha^{-3} \hbar a_0/e^2 \sim \alpha^{-4} a_0/c$ ce qui correspond à 1.59 ns ($\Gamma_{2p \rightarrow 1s} = 6.27 \times 10^8$ s⁻¹).

Il est à noter que le même ordre de grandeur est obtenu classiquement en calculant la durée de vie d'un électron sur une orbite circulaire de rayon a_0 perdant de l'énergie par émission de rayonnement électromagnétique (cf. par exemple le TD intitulé "Diffusion du rayonnement par un électron classique lié"). Cependant la mécanique classique ne comprend pas que l'électron ne rayonne pas lorsqu'il est sur le niveau fondamental. Elle ne comprend pas non plus que la durée de vie associée à la désexcitation $2s \rightarrow 1s$ soit de l'ordre d'une fraction de seconde (elle prévoit, comme pour la transition $2p \rightarrow 1s$, quelque chose de l'ordre de quelques nanosecondes). Cette durée de vie exceptionnellement longue est due au fait que, dans ce cas, l'élément de matrice \vec{r}_{ab} est nul. Il faut, pour décrire le phénomène, utiliser la théorie des perturbations à un ordre supérieur : le niveau $2s$ se désexcite *via* un processus à deux photons.

⁹Pour l'état $m = 0$ (que l'on note parfois $2p_0$) il faut évaluer $\vec{r}_{ab} = \langle 2, 1, 0 | \vec{r} | 1, 0, 0 \rangle$ où le ket $|N, l, m\rangle$ s'écrit en représentation $\vec{r} : R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$ où $n = N - l$. Il est clair que $\langle 2, 1, 0 | x | 1, 0, 0 \rangle = 0 = \langle 2, 1, 0 | y | 1, 0, 0 \rangle$. Il reste à évaluer

$$\langle 2, 1, 0 | z | 1, 0, 0 \rangle = \int_0^\infty r^2 dr R_{1,1}(r) r R_{1,0}(r) \int d^2\Omega Y_1^0(\Omega) \cos\theta Y_0^0(\Omega). \quad (\text{D.35})$$

Les expressions explicites des fonctions entrant dans cette intégrale sont $R_{1,0}(r) = 2a_0^{-3/2} \exp(-r/a_0)$, $R_{1,1}(r) = (2a_0)^{-3/2} (r/\sqrt{3}a_0) \exp(-r/2a_0)$, $Y_0^0(\Omega) = 1/\sqrt{4\pi}$, $Y_1^0(\Omega) = \sqrt{3/4\pi} \cos\theta$. Pour $\beta > 0$ $\int_0^\infty x^4 \exp(-\beta x) dx = 24\beta^{-5}$ et l'intégrale sur r dans (D.35) vaut $I_r = a_0 2^8 / (3^4 \sqrt{6})$. Celle sur les angles solides vaut $3^{-1/2}$ et finalement

$$\vec{r}_{ba} = \frac{2^8}{3^5 \sqrt{2}} a_0 \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad |\vec{r}_{ba}| = 0.7449 a_0. \quad (\text{D.36})$$

Pour les états $2p$ avec $m = \pm 1$, on a $Y_1^{\pm 1}(\Omega) = \mp \sqrt{3/8\pi} \sin\theta \exp(\pm i\varphi)$ et on obtient $\vec{r}_{ba} = 6^{-1/2} I_r (\mp \vec{e}_x - i \vec{e}_y)$, mais $|\vec{r}_{ba}|$ prend la même valeur que lorsque $m = 0$.

Chapitre R : Rappels

R.1 Rappels de mathématique

- Pour une fonction continue f qui n'a qu'un seul zéro (soit a) on a

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x - a)}{|f'(a)|}. \quad (\text{R.1})$$

Pour démontrer ce résultat il faut montrer que $K = \int_{\mathbb{R}} g(x)\delta[f(x)]dx = g(a)/|f'(a)|$ pour toute fonction g assez régulière en a . D'après les propriétés de la distribution de Dirac $K = \int_I g(x)\delta[f(x)]dx$ où I est un intervalle contenant a . On le choisit assez petit pour que f soit strictement monotone sur I . On peut alors faire le changement de variable $y = f(x)$, $dy = |f'(x)|dx$ et on note $J = f(I)$. Alors $K = \int_J g[f^{-1}(y)]\delta(y)dy/|f'(f^{-1}(y))| = g[f^{-1}(0)]/|f'(f^{-1}(0))| = g(a)/|f'(a)|$.

- Pour x et $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} dk \exp\{\pm ik(x - a)\} = 2\pi \delta(x - a). \quad (\text{R.2})$$

Cela se voit rapidement en disant que la transformée de Fourier de $\delta(x - a)$ est $\exp\{-ika\}$. On peut obtenir une démonstration relativement simple de (R.2) en discrétisant l'espace puis en faisant tendre le pas de discrétisation vers 0 [cf. discussion après la formule (R.13)].

- Pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{k} \exp\{ikx\} = i\pi \operatorname{sgn}(x). \quad (\text{R.3})$$

En effet, il est clair d'après (R.2) que $f'(x) = 2i\pi \delta(x)$ et donc $f(x) = 2i\pi \Theta(x) + C^{\text{ste}}$, où Θ est la fonction de Heaviside. Si on arrive à donner un sens à f , $f(x)$ sera clairement imaginaire, en utilisant $f(-x) = f^*(x)$ on voit que $C^{\text{ste}} = -i\pi$, d'où le résultat.

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$I(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^2} \sin^2(\alpha x) = \pi |\alpha|. \quad (\text{R.4})$$

$I'(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} dx \sin(2\alpha x)/x$. D'après (R.3) cette dernière intégrale vaut $\pi \operatorname{sgn}(\alpha)$. Pour arriver au résultat (R.4) on prend une primitive dans chacune des régions $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$ et on détermine les constantes d'intégration par $I(0) = 0$.

- Transformées de Fourier spatiales:

$$F(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{F}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad \mathcal{F}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r F(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (\text{R.5})$$

Voici une petite liste de transformées de Fourier utiles pour le cours :

$F(\vec{r})$	$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)$	$1/r$	\vec{r}/r^3	(R.6)
$\mathcal{F}(\vec{k})$	$\exp\{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0\}$	$4\pi/k^2$	$-4i\pi\vec{k}/k^2$	

La première est évidente, la seconde se démontre comme suit: soit $J = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2} \exp\{i\vec{k} \cdot \vec{r}\}$. L'intégrale sur les angles se fait sans difficulté [elle correspond aux calculs (R.9) ci-dessous : $J = 4\pi g(\vec{r}, z_0 = 0)$] et on obtient $J = \frac{1}{i\pi r} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{k} \exp(ikr)$ (où $r \in \mathbb{R}^{+*}$). Le reste découle immédiatement de

(R.3) qui permet de montrer que $J = 1/r$. Pour la troisième colonne de (R.6) on dérive par rapport à x_i la relation $J = 1/r$, cela donne $-\partial J/\partial x_i = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2} (-ik_i) \exp\{i\vec{k}\cdot\vec{r}\} = -\partial_i(1/r) = x_i/r^3$.

Au passage, la deuxième relation de (R.6) permet de démontrer que $-\Delta(\frac{1}{r}) = 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$. Cela se voit facilement en passant par les transformées de Fourier.

- On a la formule de Parseval-Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r F^*(\vec{r}) G(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{F}^*(\vec{k}) \mathcal{G}(\vec{k}). \quad (\text{R.7})$$

Elle se démontre en écrivant F et G en fonction de leurs transformées de Fourier et en utilisant la version à trois dimensions de (R.2) (c'est à dire la première des relations (R.6)).

- Une transformée de Fourier spéciale. Soit z_0 un nombre complexe avec $\text{Im } z_0 \neq 0$. On a

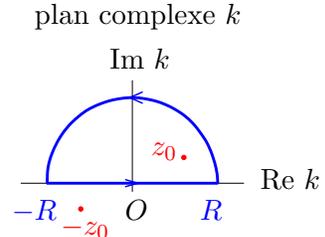
$$g(\vec{r}, z_0) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp\{i\vec{k}\cdot\vec{r}\}}{k^2 - z_0^2} = \begin{cases} \frac{\exp\{i z_0 r\}}{4\pi r} & \text{si } \text{Im } z_0 > 0, \\ \frac{\exp\{-i z_0 r\}}{4\pi r} & \text{si } \text{Im } z_0 < 0. \end{cases} \quad (\text{R.8})$$

En effet, on peut tout d'abord calculer l'intégrale angulaire en prenant \vec{r} comme axe des k_z :

$$\begin{aligned} g(\vec{r}, z_0) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2 - z_0^2} = \frac{1}{4i\pi^2 r} \int_0^\infty k dk \frac{1}{k^2 - z_0^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\ &= \frac{1}{4i\pi^2 r} \left(\int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 - z_0^2} e^{ikr} - \int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 - z_0^2} e^{-ikr} \right) = \frac{1}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{k dk}{k^2 - z_0^2} e^{ikr}. \end{aligned} \quad (\text{R.9})$$

La dernière intégrale de (R.9) peut se calculer en utilisant le contour $\Gamma(R)$ du plan de la variable complexe k formé de l'intervalle $[-R, R]$ fermé par un demi-cercle dans le demi-plan $\text{Im } k > 0$ (l'intégrale sur ce demi-cercle tend vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$ parce que $r > 0$) cf. figure ci-contre qui représente le cas $\text{Im } z_0 > 0$. On a donc

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{k e^{ikr} dk}{k^2 - z_0^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(R)} \frac{k e^{ikr} dk}{k^2 - z_0^2}. \quad (\text{R.10})$$



Le membre de droite de (R.10) vaut $2i\pi$ fois le résidu de $\frac{k e^{ikr}}{k^2 - z_0^2} = \frac{k e^{ikr}}{(k - z_0)(k + z_0)}$ au pôle situé dans le demi-plan $\text{Im } k > 0$. Si $\text{Im } z_0 > 0$, le pôle dans le demi-plan supérieur est en $k = z_0$ et le résidu vaut $e^{iz_0 r}/2$. Si $\text{Im } z_0 < 0$, le pôle dans le demi-plan supérieur est en $k = -z_0$ et le résidu vaut $e^{-iz_0 r}/2$. On en déduit alors aisément le résultat (R.8).

Remarque : la deuxième colonne de (R.6) montre que $g(\vec{r}, 0) = 1/(4\pi r)$ et donc la formule (R.8) est encore valable dans le cas particulier $z_0 = 0$, mais g est clairement mal définie lorsque $z_0 \in \mathbb{R}^*$.

- Volume fini; discrétisation de l'espace réciproque. Il est souvent pratique de considérer un système placé dans un volume V qui est un cube d'arête L avec des conditions aux bords périodiques. Alors toute fonction $F(\vec{r})$ peut être décomposée sur la base des $\exp\{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\}$ où \vec{k}_n est une notation pour (n_x, n_y, n_z) et les \vec{k}_n sont de la forme $(2\pi n_x/L, 2\pi n_y/L, 2\pi n_z/L)$:

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{n}} \mathcal{F}(\vec{k}_n) \exp\{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\}, \quad \text{avec } \mathcal{F}(\vec{k}_n) = \int_V d^3r F(\vec{r}) \exp\{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}\}. \quad (\text{R.11})$$

Dans la première égalité de (R.11) la somme sur \underline{n} est une somme sur $(n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{Z}^3$. La première égalité doit être considérée comme une définition de $\mathcal{F}(\vec{k}_{\underline{n}})$. La seconde égalité découle de la première et de la formule (facile à vérifier)

$$\int_V d^3r \exp\{i(\vec{k}_{\underline{n}} - \vec{k}_{\underline{m}}) \cdot \vec{r}\} = L^3 \delta_{\underline{n}, \underline{m}}. \quad (\text{R.12})$$

Ainsi, en prenant $F(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a})$ on obtient grâce à (R.11) $\mathcal{F}(\vec{k}_{\underline{n}}) = \exp\{-i\vec{k}_{\underline{n}} \cdot \vec{a}\}$ et

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\underline{n}} \exp\{i\vec{k}_{\underline{n}} \cdot (\vec{r} - \vec{a})\}, \quad (\text{R.13})$$

qui est la version discrète de la forme tri-dimensionnelle de (R.2). En effet, à la limite $L \rightarrow \infty$ la distribution des $\vec{k}_{\underline{n}}$ devient continue et

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\underline{n}} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3k, \quad (\text{R.14})$$

(cette identification correspond exactement à identifier l'intégrale avec la somme de Riemann associée). La formule (R.11) devient alors identique à (R.5). Dans la limite continue, le passage d'une somme discrète à une intégrale permet le passage $L^3 \delta_{\underline{n}, \underline{m}} \rightarrow (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_{\underline{n}} - \vec{k}_{\underline{m}})$ et (R.12) est également un résultat attendu: c'est la version tri-dimensionnelle de (R.2).

Enfin Parseval-Placherel s'écrit sous forme discrète :

$$\int_V d^3r F^*(\vec{r}) G(\vec{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\underline{n}} \mathcal{F}^*(\vec{k}_{\underline{n}}) \mathcal{G}(\vec{k}_{\underline{n}}), \quad (\text{R.15})$$

où \mathcal{F} et \mathcal{G} sont reliées à F et G par la formule (R.11).

• Quelques relations vectorielles:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}. \quad (\text{R.16})$$

Cela se démontre grâce à l'identité

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}, \quad (\text{R.17})$$

qui elle-même découle des propriétés du tenseur totalement anti-symétrique à trois dimensions. Pour un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ on a

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{C}^{\text{st}}) = (\vec{C}^{\text{st}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{C}^{\text{st}} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}). \quad (\text{R.18})$$

Cela se démontre en appliquant (R.17) au double produit vectoriel qui apparaît dans le membre de droite de (R.18). Enfin, si $f(\vec{r})$ est un champ scalaire on a également :

$$\vec{\nabla} \wedge (f \vec{A}) = \vec{\nabla} f \wedge \vec{A} + f \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (\text{R.19})$$

R.2 Principe variationnel en mécanique classique

Soit un système classique à n degré de libertés décrits par les coordonnées généralisées $q_1 \dots q_n$ dont la dynamique est régie par un lagrangien $L(q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t)$. Pour faire simple on va se limiter dans les calculs au cas à un degré de liberté mais toutes les équations obtenues ci-dessous se généralisent immédiatement au cas $n > 1$.

On veut déterminer la loi horaire $q(t)$ qui décrit un mouvement partant de q_0 à l'instant t_0 et arrivant en q_1 à l'instant t_1 , en imposant que ce soit la loi qui extrémise l'action $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$.

Considérons une petite modification de la loi horaire $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$ qui induit une modification des vitesses $\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t)$ et calculons la variation correspondante δS de l'action :

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right\} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \right\} \delta q dt . \quad (\text{R.20})$$

Dans le membre de droite on a effectué une intégration par parties et on s'est aperçu que le terme tout intégré est nul à cause de la règle que l'on s'est fixée (départ de q_0 à t_0 et arrivée en q_1 à t_1) qui impose $\delta q(t_0) = 0 = \delta q(t_1)$.

Pour que l'action soit extrémale autour d'une certaine loi horaire, il faut que pour toutes les variations autour de cette loi (c.a.d. pour tous les $\delta q(t)$) on ait $\delta S = 0$ ce qui impose que le terme entre crochets dans le membre de gauche de (R.20) soit nul. C'est l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] . \quad (\text{R.21})$$

Lorsque $L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q)$ on retrouve bien la relation fondamentale de la dynamique : $m\ddot{q} = -\partial_q U$. Lorsque le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps [c.a.d. $L = L(q, \dot{q}, \text{⌘})$] alors l'énergie $E = p\dot{q} - L$ est une constante du mouvement (où $p \stackrel{\text{def}}{=} \partial L / \partial \dot{q}$ est l'impulsion généralisée). Avec le type de lagrangien donné trois lignes plus haut, $p = m\dot{q}$ et $E = \frac{p^2}{2m} + U(q)$.

R.3 Section efficace en mécanique classique

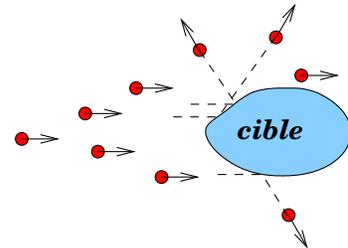
R.3.a Diffusion de particules

On considère un faisceau caractérisé par un vecteur densité de courant (de particules) \vec{J}_{inc} . Le flux de \vec{J}_{inc} à travers une surface est le nombre de particules qui traverse cette surface par unité de temps : $[J_{\text{inc}}] = L^{-2}T^{-1}$.

Le faisceau est incident sur une cible (ponctuelle ou étendue, cf figure ci-contre). L'extension du faisceau est grande devant la dimension de la cible de sorte qu'on considère que \vec{J}_{inc} est uniforme et indépendant de la position. Il est également indépendant de t : le faisceau est continu et on est en régime permanent. Soit dN_{col} le nombre de collisions pendant dt . Il est clair que $dN_{\text{col}}/dt \propto J_{\text{inc}}$. On écrit

$$\frac{dN_{\text{col}}}{dt} = \sigma J_{\text{inc}} . \quad (\text{R.22})$$

σ est la section efficace de collision, $[\sigma] = L^2$. Si les particules incidentes sont ponctuelles, et si on a une interaction de contact comme dans le schéma ci-dessus, alors σ est l'aire de la projection de la cible sur un plan perpendiculaire à \vec{J}_{inc} , d'où le nom de section efficace. Le schéma ci-dessus



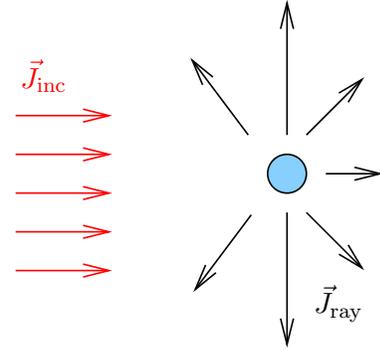
illustre la notion avec l'exemple simple d'une interaction de contact sur une cible étendue. mais on peut également travailler avec une interaction à portée finie sur une cible ponctuelle.

On peut (cela sera très utile pour le cas ondulatoire traité section **R.3.b**) définir un vecteur densité de courant rayonné $\vec{J}_{\text{ray}}(\vec{r})$ qui mesure le flux de particules diffusées par la cible, cf. la figure ci-contre.

Parce qu'on est en régime permanent, et d'après la définition de \vec{J}_{ray} , son flux à travers une surface fermée Σ qui englobe la source et dont les dimensions sont grandes devant la portée de l'interaction faisceau/cible est simplement

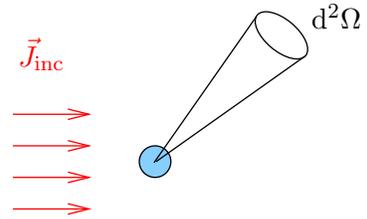
$$\frac{dN_{\text{col}}}{dt} = \oint_{\Sigma} \vec{J}_{\text{ray}}(\vec{r}) \cdot \vec{n}_s d^2S = \int \vec{J}_{\text{ray}}(r, \Omega) \cdot \hat{r} r^2 d^2\Omega. \quad (\text{R.23})$$

Dans la première intégrale de la formule (**R.23**) \vec{n}_s est la normale sortante. Dans la seconde intégrale on a pris pour surface Σ une grande sphère de rayon r , $\hat{r} = \vec{r}/r$ et Ω désigne l'angle solide ($d^2\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$). La sphère doit être grande pour que l'on soit sûr de compter toutes les collisions. Au passage la conservation du courant impose donc qu'à grand r on ait un courant rayonné de la forme $J_{\text{ray}} = \text{fct}(\Omega)/r^2$.



On peut également s'intéresser au nombre de particules diffusées pendant dt dans un cône d'ouverture $d^2\Omega$ dans la direction Ω , soit d^3N_{col} . On écrit alors

$$\frac{d^3N_{\text{col}}}{dt d^2\Omega} = \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} J_{\text{inc}}. \quad (\text{R.24})$$



$d^2\sigma/d^2\Omega$ est appelée section efficace différentielle. Son intégrale sur les angles solides vaut bien-sûr σ d'après (**R.22**). En comparant avec (**R.23**) on a

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{\vec{J}_{\text{ray}}(r, \Omega) \cdot \hat{r} r^2}{J_{\text{inc}}}. \quad (\text{R.25})$$

Remarque culturelle: En mécanique classique, dans le cas très fréquent d'une particule diffusée par un potentiel à symétrie sphérique, la connaissance de la déviation θ en fonction du paramètre d'impact b permet de calculer $d^2\sigma/d^2\Omega = \frac{b}{|\sin\theta|} |d\theta/db|^{-1}$, cf. Landau et Lifschitz vol I, chap. IV.

R.3.b Diffusion d'une onde

Il suffit d'adapter les définitions de la section précédente. On ne parle plus ici de particules incidentes ou diffusées mais d'énergie incidente ou rayonnée, ainsi

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{\text{puissance rayonnée dans } d^2\Omega}{S_{\text{inc}}} = \frac{\vec{S}_{\text{ray}} \cdot \hat{r} r^2}{S_{\text{inc}}}, \quad (\text{R.26})$$

où \vec{S}_{inc} et \vec{S}_{ray} sont les vecteurs de Poynting incidents et rayonnés (ils remplacent les vecteurs densité de courant \vec{J}_{inc} et \vec{J}_{ray} de la partie **R.3.a**). Cela sera une partie importante du cours sur le rayonnement

que d'établir l'expression de \vec{S}_{ray} pour une distribution de charges en mouvement. Ici, on doit en plus tenir compte du fait que le mouvement des charges est induit par le rayonnement incident.

R.4 Perturbations dépendantes du temps

On considère un système quantique régi par le hamiltonien $H = H_0 + W(t)$. H_0 est indépendant du temps, on note $|\varphi_n\rangle$ ses états propres (ils forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert) et E_n les énergies associées ; $W(t)$ est une perturbation. Le système est à $t = 0$ dans un état propre de H_0 (soit $|\varphi_i\rangle$) et il évolue sous l'effet du hamiltonien total H . Cette évolution est décrite par une fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ solution de $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$. On développe $|\psi\rangle$ sur la base des états propres de H_0 :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|\varphi_n\rangle, \quad (\text{R.27})$$

où, compte tenu de la condition initiale, $a_n(t=0) = \delta_{n,i}$. En écrivant $a_n(t) = c_n(t) \exp(-iE_n t/\hbar)$ il est aisé de montrer que pour tout n on a la relation exacte :

$$i\hbar\dot{c}_n(t) = \sum_m c_m(t) \langle\varphi_n|W|\varphi_m\rangle e^{-i(E_m - E_n)t/\hbar}, \quad (\text{R.28})$$

où $\dot{c}_n(t)$ désigne la dérivée temporelle de $c_n(t)$. À l'ordre zéro en $W(t)$ il est donc clair que $c_n^{(0)}(t) = \delta_{n,i}$. À l'ordre suivant on a $c_n(t) = c_n^{(0)}(t) + c_n^{(1)}(t)$ avec :

$$i\hbar\dot{c}_n^{(1)}(t) = \langle\varphi_n|W(t)|\varphi_i\rangle e^{i(E_n - E_i)t/\hbar}, \quad \text{soit} \quad c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle\varphi_n|W(t')|\varphi_i\rangle e^{i(E_n - E_i)t'/\hbar}, \quad (\text{R.29})$$

où l'on a utilisé la condition initiale $c_n^{(1)}(0) = 0$. On considère désormais le cas particulier $W(t) = W_0 \cos(\Omega t)$.¹ Pour effectuer l'intégration sur t' dans (R.29) on écrit alors

$$\int_0^t dt' \cos(\Omega t') e^{i(E_n - E_i)t'/\hbar} = \frac{1}{2} \int_0^t dt' \left(e^{iE^{(+)}t'/\hbar} + e^{iE^{(-)}t'/\hbar} \right), \quad \text{où} \quad E^{(\pm)} = E_n - E_i \pm \hbar\Omega. \quad (\text{R.30})$$

On se place désormais dans le cas $n \neq i$ et on rappelle que $c_{n \neq i}^{(0)}(t) = 0$. Cela donne

$$c_n(t) \simeq c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{2\hbar} \left\{ e^{iE^{(+)}t/2\hbar} \frac{\sin(E^{(+)}t/2\hbar)}{E^{(+)}t/2\hbar} + e^{iE^{(-)}t/2\hbar} \frac{\sin(E^{(-)}t/2\hbar)}{E^{(-)}t/2\hbar} \right\} \langle\varphi_n|W_0|\varphi_i\rangle. \quad (\text{R.31})$$

On veut calculer la probabilité de transition vers un état $|\varphi_{n \neq i}\rangle$ au bout d'un temps t , soit $\mathcal{P}_{i \rightarrow n}(t) = |c_n(t)|^2$; lorsqu'on prend le module au carré du terme précédent on trouve (en négligeant le terme croisé dans le module au carré du terme entre crochets)

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow n}(t) = \frac{\pi}{2\hbar} t |\langle\varphi_n|W_0|\varphi_i\rangle|^2 \left\{ \delta^{(t)}(E_n - E_i - \hbar\Omega) + \delta^{(t)}(E_n - E_i + \hbar\Omega) \right\}, \quad (\text{R.32})$$

où

$$\delta^{(t)}(E) = \frac{t}{2\pi\hbar} \left(\frac{\sin(Et/2\hbar)}{Et/2\hbar} \right)^2. \quad (\text{R.33})$$

¹ W_0 est un opérateur. On peut se restreindre à $\Omega \geq 0$. Il est possible que Ω soit nul, auquel cas la perturbation est indépendante du temps, mais même dans ce cas on choisit de s'intéresser à la probabilité de transition vers un état $|\varphi_n\rangle$ après un temps t (et non à l'expression approchée des états propres de H).

$\delta^{(t)}(E)$ tend vers une distribution de Dirac lorsque $t \rightarrow \infty$.² Au passage, ces considérations permettent de préciser le domaine de validité de l'approximation qui consiste à négliger le terme croisé et qui a conduit à (R.32) : il faut que $\hbar\Omega \gg \hbar/t$.

Dans (R.32) on voit que la probabilité de transition est proportionnelle à t , on définit donc un taux de transition $\Gamma_{i \rightarrow n} = \mathcal{P}_{i \rightarrow n}/t$ qui vaut pour t grand :

$$\Gamma_{i \rightarrow n} = \frac{\pi}{2\hbar} |\langle \varphi_n | W_0 | \varphi_i \rangle|^2 \{ \delta(E_n - E_i - \hbar\Omega) + \delta(E_n - E_i + \hbar\Omega) \} . \quad (\text{R.34})$$

Ce résultat est perturbatif, il n'est valable que tant que $\mathcal{P}_{i \rightarrow n} \ll 1$. Pour déterminer son régime de validité, on se place dans le pire des cas, c'est à dire à la résonance ($\hbar\Omega = E_n - E_i$ par exemple) alors \mathcal{P} est maximale et vaut³ $|\langle \varphi_n | W_0 | \varphi_i \rangle|^2 t^2 / (4\hbar^2)$. Il faut donc au total que

$$|\langle \varphi_n | W_0 | \varphi_i \rangle| \ll \frac{\hbar}{t} \ll |E_n - E_i| \sim \hbar\Omega . \quad (\text{R.35})$$

On notera que l'approximation qui consiste à négliger le terme croisé lorsqu'on prend le module de (R.31) n'est pas valable lorsque $\Omega = 0$, puisque dans ce cas $E^{(+)} = E^{(-)}$ (et d'ailleurs, l'inégalité de droite dans (R.35) est alors violée). Mais les calculs sont en fait plus simples lorsque $\Omega = 0$ puisque les deux sinus cardinaux dans (R.31) sont alors égaux. On obtient [au lieu de (R.32) et (R.34)]

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow n}(t) = t \times \Gamma_{i \rightarrow n} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{i \rightarrow n} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \varphi_n | W_0 | \varphi_i \rangle|^2 \delta^{(t)}(E_n - E_i) , \quad (\text{R.36})$$

Cette expression est valable pour une perturbation indépendante du temps ($\Omega = 0$)⁴ tant que $|\langle \varphi_n | W_0 | \varphi_i \rangle| \ll \hbar/t$. La probabilité pour que le système ne soit plus dans l'état i au bout d'un temps t est de la forme $t \times \Gamma_i$ avec

$$\Gamma_i = \sum_{n \neq i} \Gamma_{i \rightarrow n} , \quad (\text{R.37})$$

où $\Gamma_{i \rightarrow n}$ est de la forme (R.36) ou (R.34) selon si Ω est nul ou non. On dit que $1/\Gamma_i$ est la durée de vie de l'état $|\varphi_i\rangle$ sous l'influence de la perturbation, et que $\hbar\Gamma_i$ est la largeur de l'état.

²En effet, son intégrale sur \mathbb{R} vaut 1 (cela se voit avec (R.4)), sa hauteur $t/(2\pi\hbar)$ et sa largeur en énergie $\sim 2\hbar/t$.

³Pour ce calcul on doit bien-sûr utiliser l'expression exacte (R.33) de $\delta^{(t)}$, et non l'approximation par un pic delta.

⁴Bien-sûr (R.36) est sans intérêt si les niveaux propres de H_0 sont non dégénérés, car dans ce cas on ne pourra jamais satisfaire la contrainte imposée par la distribution de Dirac apparaissant dans (R.36).