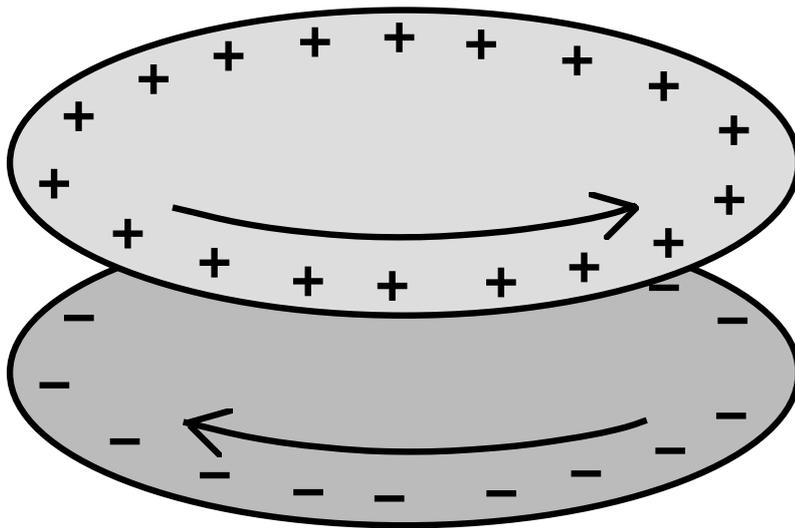


Université Paris-Sud Orsay
M1 Master de Physique

Travaux Dirigés

ÉLECTRODYNAMIQUE
CLASSIQUE ET QUANTIQUE



texte disponible en ligne:
http://lptms.u-psud.fr/nicolas_pavloff/enseignement/

Année 2021-22

Électrodynamique classique et quantique

1	Électrodynamique et relativité restreinte	2
2	Désintégration bêta	6
3	Diffusion Rayleigh, couleur du ciel	8
4	Diffusion du rayonnement par un électron classique lié	10
5	Limites expérimentales sur la masse du photon	12
6	Tenseur impulsion-énergie	15
7	Brisure spontanée de symétrie et mécanisme de Higgs	18
8	Quantification des oscillations d'une corde. Effet Casimir	21
9	Diffusion Thomson quantique	24

TD 1

Électrodynamique et relativité restreinte

1.1 Jeux cinématiques

Soient deux référentiels d'inertie \mathcal{R} et \mathcal{R}' . \mathcal{R}' se déplace par rapport à \mathcal{R} avec la vitesse \vec{V} . Un événement a pour coordonnées (ct, x, y, z) dans \mathcal{R} et (ct', x', y', z') dans \mathcal{R}' . On désigne par L_x la transformation de Lorentz spéciale au sens strict (c'est à dire telle que la direction de la vitesse soit parallèle à l'axe Ox). Enfin à toute vitesse \vec{w} on associera les grandeurs :

$$\vec{\beta}_w = \frac{\vec{w}}{c} \quad ; \quad \beta_w = |\vec{\beta}_w| \quad ; \quad \gamma_w = (1 - \beta_w^2)^{-1/2}. \quad (1.1)$$

Soit alors une particule M animée d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{U} (resp. \vec{U}') dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}').

A/ Exprimer \vec{U} en fonction de \vec{U}' et de \vec{V} . Montrer qu'à l'approximation des vitesses V faibles devant celle de la lumière ($\beta_V^2 \ll 1$) on a :

$$\vec{\beta}_U = \vec{\beta}_{U'} + \vec{\beta}_V - (\vec{\beta}_{U'} \cdot \vec{\beta}_V) \vec{\beta}_{U'}. \quad (1.2)$$

B/ Ecrire cette loi de composition en coordonnées sphériques d'axe Ox .

C/ Que deviennent ces dernières formules lorsque $U' = c$? Retrouver, lorsque $\beta_V^2 \ll 1$, la valeur de l'angle d'aberration de la lumière : $\Delta\theta = \beta_V \sin\theta'$.

D/ Obtenir à l'aide de (1.1.B) la relation $\gamma_U = \gamma_V \gamma_{U'} (1 + \vec{\beta}_V \cdot \vec{\beta}_{U'})$. En déduire que $(\gamma_U c, \gamma_U \vec{U})$ constitue un quadrivecteur (quadrivitesse).

E/ On suppose que $\vec{U} \parallel \vec{V} \parallel Ox$. Soit \mathcal{R}'' le référentiel d'inertie se déduisant de \mathcal{R}' par $L_x(\vec{U}')$. Retrouver la loi de composition des vitesses en écrivant que $L_x(\vec{U}) = L_x(\vec{U}')L_x(\vec{V})$. Commentez.

F/ On ignore désormais les référentiels \mathcal{R}' et \mathcal{R}'' , par contre on introduit le référentiel propre \mathcal{R}_0 de la particule. On désigne par τ le temps propre de la particule. Démontrer que :

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = (\gamma_U c, \gamma_U \vec{U}). \quad (1.3)$$

Conclusion? On note u^α cette quadrivitesse. L'exprimer dans \mathcal{R} et \mathcal{R}_0 puis calculer $u^2 = u_\alpha u^\alpha$.

On définit la quadriaccélération $A^\alpha = du^\alpha/d\tau$. Exprimer A^α dans \mathcal{R} . Que vaut $u^\alpha A_\alpha$? Montrer que l'invariant A^2 s'écrit (pour clarifier les notations on a abandonné les indices β_u et γ_u):

$$A^2 = -c^2 \gamma^4 \left[\dot{\vec{\beta}}^2 + \gamma^2 \beta^2 (\dot{\beta})^2 \right] = -c^2 \gamma^6 \left[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}})^2 \right]. \quad (1.4)$$

1.2 Charge ponctuelle en mouvement rectiligne uniforme

Soit une particule P de charge q qui se déplace selon Ox à la vitesse uniforme $\vec{v} = v \vec{e}_x$ par rapport à un référentiel \mathcal{R} et qui passe à l'origine à l'instant initial. On désigne par \mathcal{R}_0 le référentiel propre associé à cette particule. Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} .

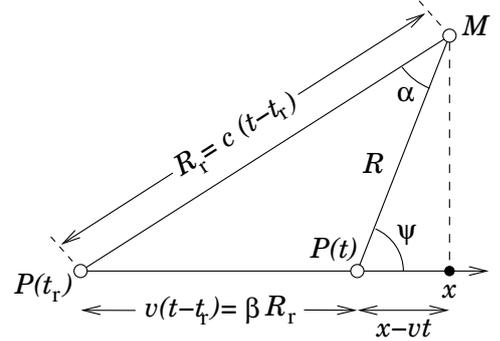
1/ Evaluer dans \mathcal{R}_0 le quadripotential du champ créé en M . En déduire les expressions de \vec{E}_0 et \vec{B}_0 . Exprimer dans \mathcal{R} le quadripotential en fonction de (x, y, z, t) .

2/ On ne considérera plus désormais que le référentiel \mathcal{R} . Démontrer que le potentiel scalaire peut se mettre sous la forme (les notations sont définies sur la figure):

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{1/2}}. \quad (1.5)$$

3/ On désigne par t_r le "temps retardé" qui est défini comme suit: un photon émis par P à l'instant t_r arrive en M à l'instant t . On note $\vec{R}_r = \overrightarrow{P(t_r)M}$. Démontrer que $\sin \alpha = \beta \sin \psi$. En déduire

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q/4\pi\epsilon_0}{R_r(1 - \hat{R}_r \cdot \vec{\beta})}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \hat{R}_r = \vec{R}_r/R_r, \\ \vec{\beta} = \frac{v}{c} \vec{e}_x. \end{cases}$$



4/ Exprimer \vec{E} en fonction de x, y, z, t . Etudier les variations de E_x et de $E_{y(z)}$ en fonction de $\xi = x - vt$, en particulier pour $\beta \simeq 0$ et pour $\beta \rightarrow 1$. Commenter. Tracer les lignes de champ. Exprimer \vec{B} . Montrer que $\vec{B} = \vec{\beta} \wedge \vec{E}/c = \hat{R}_r \wedge \vec{E}/c$.

1.3 Le symbole de Levi-Civita

On pose :

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation paire de } 0123; \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation impaire de } 0123; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.6)$$

1/ Déterminer $\Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta \Lambda^2_\gamma \Lambda^3_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\Lambda^0_\alpha \Lambda^0_\beta \Lambda^1_\gamma \Lambda^2_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. En déduire que le tenseur $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ garde la même expression dans les transformations de Lorentz propres.

2/ Exprimer les composantes du tenseur dual de $F^{\mu\nu}$: $*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$ en fonction de E_x, E_y, E_z, B_x, B_y et B_z .

3/ Récrire en terme du tenseur dual $*F^{\mu\nu}$ les équations de Maxwell

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.7)$$

où $\alpha, \beta, \gamma =$ sont trois des nombres $0, 1, 2, 3$.

4/ Ecrire l'expression du tenseur dual en fonction du quadripotential A^μ . Vérifier que l'équation trouvée en 3/ est satisfaite par cette expression.

5/ Exprimer les invariants $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ et $*F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ en fonction de \vec{E} et \vec{B} .

1.4 Monopôle magnétique

1.4.1 Généralités

En suivant une méthode proposée par Dirac, nous allons symétriser les équations de Maxwell sous la dualité électrique-magnétique et montrer que cela implique l'existence de monopôles magnétiques (analogues pour le magnétisme des charges électriques ponctuelles), dont nous étudierons les propriétés.

1/ Écrire les équations de Maxwell (en l'absence de charge et de courant) sous forme covariante relativiste.

2/ Comment se modifient le tenseur ${}^*F^{\mu\nu}$ et les champs \vec{E} et \vec{B} lors de la transformation, dite *transformation de dualité électrique/magnétique*: $F^{\mu\nu} \rightarrow {}^*F^{\mu\nu}$? Vérifier que les équations écrites en 1/ sont bien invariantes sous cette transformation.

3/ On considère maintenant les équations de Maxwell en présence de matière. Plus exactement, on les écrit :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad \text{et} \quad \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = \mu_0 K^\nu, \quad (1.8)$$

où $K^\mu(\vec{r}, t) = (c\sigma(\vec{r}, t), \vec{K}(\vec{r}, t))$.

- Rappeler la signification des composantes de $J^\mu(\vec{r}, t)$. Comment doivent se transformer J^μ et K^μ pour que le système d'équations (1.8) soit invariant sous l'effet de la transformation de dualité électrique/magnétique?
- Écrire la forme vectorielle des équations de Maxwell qui correspondent à (1.8). On pourra, soit traduire (1.8) en relations vectorielles, soit appliquer la transformation de dualité aux deux équations de Maxwell qui ne sont pas modifiées pour obtenir la nouvelle forme des deux autres.

4/ On suppose que la fonction $\sigma(\vec{r})$ est indépendante du temps et qu'elle est localisée dans un domaine Ω de l'espace tridimensionnel (c'est-à-dire $\sigma(\vec{r}) = 0$ si $\vec{r} \notin \Omega$) et on note $G = \iiint_\Omega d^3v \sigma(\vec{r})$. Exprimer en fonction de G le flux de champ magnétique à travers une surface S fermée entourant Ω . Comment peut-on alors interpréter G ? Quelles sont ses dimensions?

5/ On considère un monopôle magnétique immobile, c'est à dire une charge magnétique g ponctuelle fixe placée à l'origine: $\sigma(\vec{r}) = g\delta^{(3)}(\vec{r})$. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}_m(\vec{r})$ créé par ce monopôle.

Indication: On pourra chercher $\vec{B}_m(\vec{r})$ sous la forme $C^{\text{ste}} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ et démontrer que $C^{\text{ste}} = g/(4\pi\epsilon_0 c)$.

1.4.2 Solénoïde infini.

On revient dans toute cette section dans le cadre de l'électromagnétisme usuel. Nous allons montrer que l'extrémité d'un solénoïde infiniment mince et long modélise un monopôle magnétique.

Nous considérons donc un tel solénoïde qui s'étend le long de l'axe des z depuis l'origine jusqu'à $z \rightarrow +\infty$. On écrit le champ magnétique créé par ce solénoïde dans tout l'espace sous la forme $\vec{B} = \vec{B}_m + \vec{B}_s$ où $\vec{B}_m(\vec{r})$ est le champ déterminé à la question 1.4.1.5/, et

$$\vec{B}_s(\vec{r}) = \alpha \delta(x)\delta(y)\Theta(z) \vec{e}_z, \quad (1.9)$$

est le champ qui règne à l'intérieur du solénoïde¹. Déterminer la constante α qui apparaît dans (1.9) afin que le champ \vec{B} soit un champ acceptable pour la magnéto-statique usuelle².

1. On rappelle que Θ est la fonction de Heaviside: $\Theta(z) = 1$ si $z > 0$ et $\Theta(z) = 0$ si $z < 0$.

2. Si vous ne savez pas faire, ce n'est pas réhhibitoire, il suffit de sauter la question 1/(c) ci-dessous.

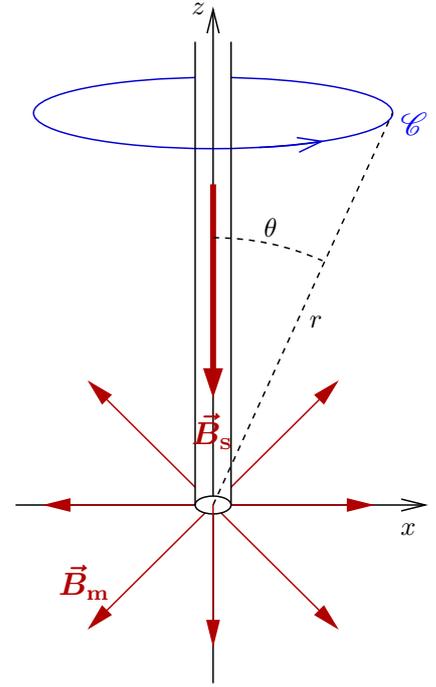
1/ Nous allons démontrer ici que le champ \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} dont l'expression en coordonnées sphériques est:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{g}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1 + \cos\theta}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi. \quad (1.10)$$

- Déterminer la zone de l'espace où \vec{A} est singulier.
- Montrer que sur $\mathcal{U}^+ = \{\mathbb{R}^3 \text{ privé du demi-axe } z \geq 0\}$, on a $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}$.
- Pour achever la démonstration on va vérifier que le théorème de Stokes s'applique sur un contour qui entoure la ligne de singularités de \vec{A} . Soit donc un cercle orienté \mathcal{C} entourant le demi-axe $z > 0$ (cf. schéma). Calculer la circulation de \vec{A} le long de ce cercle et vérifier que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \Phi_m + \Phi_s, \quad (1.11)$$

où Φ_m (resp. Φ_s) est le flux de \vec{B}_m (resp. de \vec{B}_s) sur une surface orientée s'appuyant sur \mathcal{C} . On choisira à chaque fois la surface la plus appropriée.



2/ On définit sur $\mathcal{U}^- = \{\mathbb{R}^3 \text{ privé du demi-axe } z \leq 0\}$, le champ $\vec{A}^* = \frac{g}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1 - \cos\theta}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi$.

- Démontrer que sur le domaine \mathcal{U} où \vec{A}^* et \vec{A} sont tous deux non singuliers ($\mathcal{U} = \mathcal{U}^- \cap \mathcal{U}^+ = \{\mathbb{R}^3 \text{ privé de l'axe } z = 0\}$), on a $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}^* = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}_m$.
- Démontrer que sur \mathcal{U} , on passe de \vec{A} à \vec{A}^* par une transformation de gauge, c'est à dire qu'il existe un champ scalaire $G(\vec{r})$ tel que $\vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla}G$. Donner l'expression de $G(\vec{r})$.
- On considère une particule quantique chargée soumise au hamiltonien $H = \frac{1}{2m} (\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + q\phi$ et décrite par une fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$. On note H^* la nouvelle forme de H obtenue lors de la transformation de jauge la plus générale ($\vec{A} \rightarrow \vec{A}^* = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}G$ et $\phi \rightarrow \phi^* = \phi(\vec{r}, t) - \partial_t G$ où $G(\vec{r}, t)$ est un champ scalaire quelconque).
Montrer (ou admettre et passer à la suite) que la nouvelle fonction d'onde Ψ^* (solution de $H^*\Psi^* = i\hbar\partial_t\Psi^*$) est $\Psi^*(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t) \exp\{iqG(\vec{r}, t)/\hbar\}$.
- Revenons au problème du monopôle, avec le $G(\vec{r})$ qui a été déterminé à la question (b) ci-dessus. Les fonctions d'onde Ψ et Ψ^* décrivant une particule se déplaçant dans l'espace \mathcal{U} doivent chacune reprendre la même valeur lors d'un parcours $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$. En déduire la condition de quantification de la charge q :

$$\frac{qg}{\epsilon_0 c} = nh \quad \text{où } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.12)$$

Formules en coordonnées sphériques :

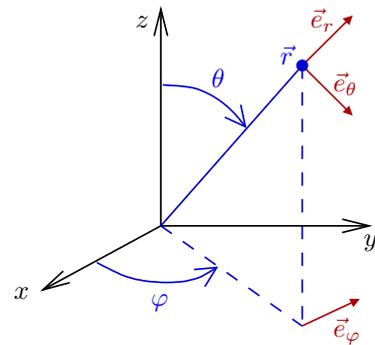
$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}). \quad (1.13)$$

Si $\vec{A}(\vec{r}) = f(r, \theta) \vec{e}_\varphi$, alors

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(f \sin\theta)}{\partial\theta} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(rf)}{\partial r} \vec{e}_\theta. \quad (1.14)$$

Pour un champ scalaire $G(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} G(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial G}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (1.15)$$



TD 2

Désintégration bêta

On se propose d'évaluer l'énergie rayonnée par une particule mise rapidement en mouvement rectiligne uniforme. On va donc écrire $\vec{v}(t) = v_0 \Theta(t) \hat{z}$ et $\vec{r}(t) = v_0 t \Theta(t) \hat{z}$, où $v_0 > 0$, $\Theta(t)$ est la fonction de Heaviside et \hat{z} un vecteur directeur de l'axe z' .

La technique des potentiels retardés fait apparaître la difficulté *a priori* insurmontable d'une accélération infinie. On peut contourner ce problème par transformation de Fourier temporelle. Il est possible (par exemple dans le cas de la désintégration β^-) de modifier le spectre en fréquences de façon convenable et d'aboutir à une solution raisonnable du problème posé.

0/ Pré-requis: On adoptera dans tout l'exercice les notations du cours: ainsi, si $\vec{B}(\vec{r}, t)$ est le champ magnétique, sa transformée de Fourier temporelle est $\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}} dt \vec{B}(\vec{r}, t) \exp\{i\omega t\}$, $k = \omega/c$, etc...

- (a) Rappeler sans démonstration les diverses formules permettant d'étudier le champ électromagnétique dans la zone de rayonnement par analyse de Fourier :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{J}_\omega(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}_\omega(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}_\omega(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{S}(\vec{r}, t) .$$

- (b) Montrer alors que l'énergie totale W émise au cours du temps par un processus générant des champs $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et $\vec{E}(\vec{r}, t)$ peut être évaluée grâce au flux du vecteur de Poynting sur une surface appropriée (dont on définira les caractéristiques) et que l'on peut alors écrire

$$W = \int_{\mathbb{R}} dt \int r^2 d^2\Omega \vec{S} \cdot \hat{r} = \frac{r^2 c}{\pi \mu_0} \int_0^\infty d\omega \int d^2\Omega \vec{B}_\omega^*(\vec{r}) \cdot \vec{B}_\omega(\vec{r}) , \quad (2.1)$$

où l'intégrale $d^2\Omega$ porte sur les angles solides. Pour évaluer certaines intégrales on pourra utiliser les symétries de \vec{B}_ω qui découlent du fait que $\vec{B}(\vec{r}, t)$ est réel.

1/ Donner l'expression de $\vec{J}(\vec{r}, t)$ puis de $\vec{J}_\omega(\vec{r})$ pour une charge q animée de la vitesse définie précédemment. En déduire, à grandes distances, l'expression approchée de $\vec{A}_\omega(\vec{r})$ sous la forme¹

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{ikr} \frac{1}{\cos\theta - \frac{1}{\beta_0}} \hat{z} ,$$

où l'on a noté θ l'angle entre \vec{r} et \vec{J} et on a introduit $\beta_0 = v_0/c$.

2/ Donner ensuite $\vec{B}_\omega(\vec{r})$ dans la zone du rayonnement. L'expression correspondante de W diverge parce que le spectre d'émission dans (2.1) est infini. Pour résoudre ce problème on introduit une fréquence de coupure haute ω_{\max} *ad hoc* dont on justifiera plus tard l'existence [on fait donc $\int_0^\infty d\omega f(\omega) \rightarrow \int_0^{\omega_{\max}} d\omega f(\omega)$]. Écrire alors l'expression de W en fonction de q , ω_{\max} , β_0 et de constantes fondamentales. Vérifier l'homogénéité de la formule.

3/ On considère la désintégration β^- d'un neutron initialement au repos :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

1. On verra apparaître une intégrale divergente que l'on régularisera en donnant à ω une petite partie imaginaire positive que l'on fera tendre vers zéro à la fin de la procédure.

On néglige l'énergie emportée par le neutrino et le recul du proton (cela signifie qu'on considère que le proton est émis au repos). Évaluer l'énergie cinétique T_e de l'électron (énergie mécanique moins énergie de masse). Que vaut le paramètre β_0 ? Calculer alors l'énergie rayonnée W en faisant un choix raisonnable de la fréquence maximale des photons émis pendant l'accélération brutale de l'électron. Évaluer le rapport W/T_e , commenter.

FORMULAIRE :

- Formule de Parseval-Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}} dt \vec{B}^*(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \vec{B}_\omega^*(\vec{r}) \cdot \vec{B}_\omega(\vec{r}) .$$

- Une formule à justifier rapidement si vous l'utilisez :

$$\text{pour } v_0 > 0 \text{ on a } \int_{\mathbb{R}} dt f(t) \delta(z - v_0 t) \Theta(t) = \frac{1}{v_0} f\left(\frac{z}{v_0}\right) \Theta(z) .$$

- une intégrale utile :

$$\int d^2\Omega \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{1}{\beta_0}} \right)^2 = 4\pi \left(-2 + \frac{1}{\beta_0} \ln \frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0} \right)$$

- Valeurs numériques :

$$m_n c^2 = 939,565 \text{ MeV}; m_p c^2 = 938,272 \text{ MeV}; m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}; \hbar c = 200 \text{ MeV}\cdot\text{fm}; c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}; 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}; q^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c) = 1/137.$$

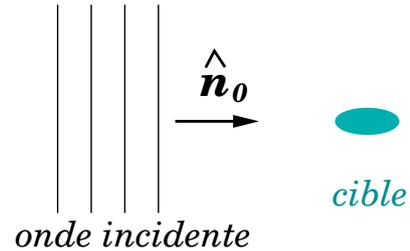
TD 3

Diffusion Rayleigh, couleur du ciel

On considère la diffusion d'une onde électromagnétique plane (vecteur d'onde $\vec{k}_0 = k\hat{n}_0$, pulsation $\omega = ck$) par un objet (la "cible") dont la taille est très petite devant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. Le champ incident s'écrit

$$\vec{E}_{\text{inc}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ E_0 \hat{\tau}_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}, \quad \vec{B}_{\text{inc}}(\vec{r}, t) = \hat{n}_0 \wedge \frac{\vec{E}_{\text{inc}}}{c},$$

avec $\hat{\tau}_0 \perp \hat{n}_0$. L'amplitude scalaire E_0 et les vecteurs normés $\hat{\tau}_0$ et \hat{n}_0 sont constants et réels: l'onde incidente est polarisée linéairement.



Le mécanisme de rayonnement est le suivant: l'onde incidente provoque des oscillations des charges et des courants dans la cible, à la pulsation ω . La cible rayonne alors des champs de même pulsation. On écrira donc les champs rayonnés sous la forme

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{A}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{B}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right\}.$$

1/ Justifier que l'on peut utiliser l'approximation dipolaire électrique. On travaillera dans le cadre de cette approximation dans tout ce qui suit.

2/ On note $\vec{d}(t)$ le moment dipolaire de la distribution (il est induit par l'onde incidente). Il est de la forme $\vec{d}(t) = \text{Re} \left\{ \vec{d}_\omega e^{-i\omega t} \right\}$. Rappeler, en jauge de Loren(t)z, dans la zone de rayonnement (dont vous donnerez la définition), l'expression des champs $\vec{A}_\omega(\vec{r})$, $\vec{E}_\omega(\vec{r})$ et $\vec{B}_\omega(\vec{r})$ en fonction de \vec{d}_ω .

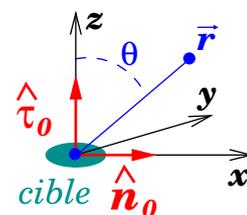
3/ Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{S}(\vec{r}, t)$ dans la zone de rayonnement en fonction de $\vec{B}(\vec{r}, t)$, de $\hat{r} = \vec{r}/r$ et de constantes fondamentales. En déduire que la puissance rayonnée par unité d'angle solide en direction de \vec{r} est, *une fois moyennée sur le temps*, de la forme

$$\left\langle \frac{d^2 \mathcal{P}}{d^2 \Omega} \right\rangle \propto |\hat{r} \wedge \vec{d}_\omega|^2,$$

où les crochets $\langle \dots \rangle$ désignent une moyenne temporelle $\frac{1}{T} \int_0^T dt$, avec $T = 2\pi/\omega$. Vous donnerez l'expression du coefficient de proportionnalité en fonction de k et de constantes fondamentales.

4/ On fixe l'origine des coordonnées au centre de la cible. On écrit de manière heuristique $\vec{d}(t) = \gamma \epsilon_0 \vec{E}_{\text{inc}}(\vec{0}, t)$. C'est à dire que le moment dipolaire induit par l'onde incidente est proportionnel au champ électrique incident. γ est un paramètre phénoménologique réel, homogène à un volume, dont on discutera la valeur plus bas.

On se place dans la géométrie illustrée sur le schéma ci-contre. Donner alors l'expression de $\langle d^2 \mathcal{P} / d^2 \Omega \rangle$ en fonction de k , γ , E_0 , $\sin \theta$ et de constantes fondamentales.



5/ En se rapportant aux compléments de cours on voit que la section efficace différentielle est

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \left\langle \frac{d^2\mathcal{P}}{d^2\Omega} \right\rangle \bigg/ \left\langle |\vec{S}_{\text{inc}}| \right\rangle, \quad \text{où} \quad \left\langle |\vec{S}_{\text{inc}}| \right\rangle = \frac{1}{\mu_0} \left\langle |\vec{E}_{\text{inc}} \wedge \vec{B}_{\text{inc}}| \right\rangle.$$

Donner l'expression de $d^2\sigma/d^2\Omega$ en fonction des paramètres du problème. Dans quelle(s) direction(s) l'énergie est-elle principalement rayonnée? Donner l'expression de la section efficace totale σ en fonction de k et γ (on pourra utiliser le formulaire en fin d'énoncé). Cette décroissance de σ avec la longueur d'onde est typique de la diffusion Rayleigh. Elle explique que les grandes longueurs d'onde (le rouge) sont peu affectées alors que les faibles longueurs d'onde (le bleu) sont beaucoup plus diffusées. Sachant que $\lambda_{\text{rouge}} = 0,65 \mu\text{m}$ et $\lambda_{\text{violet}} = 0,41 \mu\text{m}$, donner la valeur du rapport $\sigma_{\text{rouge}}/\sigma_{\text{violet}}$.

6/ Pour ce qui est de la diffusion de la lumière solaire par l'atmosphère, on peut relier le paramètre γ à des grandeurs plus communes. On rappelle que dans un milieu diélectrique on écrit le vecteur déplacement électrique $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (où \vec{P} est le vecteur polarisation) sous la forme $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t)$ où ϵ_r est la permittivité relative du milieu.

Le vecteur polarisation vaut $\vec{P} = N_v \vec{d}$ où N_v est le nombre de molécules par unité de volume ($N_v = 2,69 \times 10^{25}$ molécule/m³ pour l'air) et \vec{d} est le moment dipolaire d'une molécule. Vérifier l'homogénéité de cette formule en la comparant la définition de \vec{D} . Rappeler le lien entre ϵ_r et l'indice n de l'air ($n - 1 = 2,78 \times 10^{-4}$). En déduire que $\gamma = (n^2 - 1)/N_v \simeq 2(n - 1)/N_v$.

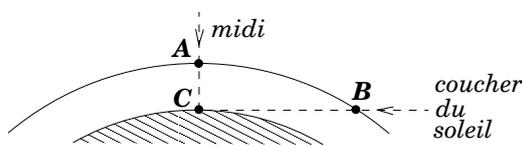
7/ On veut maintenant calculer la diminution d'intensité d'une onde incidente monochromatique de longueur d'onde λ lorsque celle-ci traverse l'atmosphère (que l'on supposera homogène).

On considère un tube cylindrique imaginaire de section A , dont l'axe $0x$ coïncide avec la direction de propagation de l'onde électromagnétique. On appelle intensité lumineuse la quantité $I(x) = \langle |\vec{S}(\vec{r}, t)| \rangle$. Justifier¹ que si l'on fait le bilan sur une tranche $[x, x + dx]$ du cylindre on a

$$A I(x + dx) = A I(x) - \sigma dN I(x),$$

où $dN = N_v A dx$ est le nombre de molécules contenues dans le tronçon $[x, x + dx]$. Montrer alors que l'intensité de l'onde décroît selon une loi exponentielle $I(x) = I_0 \exp\{-x/x_0\}$ avec une longueur caractéristique x_0 dont on donnera l'expression en fonction de N_v , λ et n (indice de l'air).

8/ On considère un individu placé en C qui observe le soleil à midi (la lumière solaire traverse alors l'atmosphère selon le trajet AC) puis au crépuscule (lorsque la lumière solaire traverse l'atmosphère selon le trajet BC). On donne $AC = 20$ km. Montrer que $BC \simeq \sqrt{2R_T AC}$ (où R_T est le rayon terrestre) et remplir le tableau ci-dessous:



couleur	λ [μm]	x_0 [km]	I_C/I_A	I_C/I_B
rouge	0,65			
vert	0,52			
violet	0,41			

Discuter alors de la couleur des couchers de soleil.

Formulaire :

$$\int d^2\Omega \sin^2 \theta = \frac{8\pi}{3},$$

où $d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ et le domaine d'intégration porte sur tous les angles solides : $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

1. Dans la discussion on mettra en avant les arguments physiques pertinents, et on les discutera en détail, sans trop insister sur la rigueur mathématique.

TD 4

Diffusion du rayonnement par un électron classique lié

On considère un électron de charge $-q$ oscillant autour d'un noyau (fixe à l'origine des coordonnées) de charge q . Dans les 3 premières questions, le mouvement de l'électron est donné par la loi $\vec{r}(t) = a \cos(\omega t) \vec{e}_z$ de sorte que l'ensemble {électron + noyau} forme un dipôle oscillant de moment dipolaire

$$\vec{d}(t) = \text{Re} \{ -a q e^{-i\omega t} \} \vec{e}_z . \quad (4.1)$$

1/ En vous appuyant sur les notes de cours, établir rapidement l'expression des champs électriques et magnétiques générés par le dipôle (4.1). On ne donnera l'expression que dans la zone de rayonnement (que l'on définira auparavant).

2/ Montrer ensuite que le flux ϕ du vecteur de Poynting à travers une sphère de rayon r très grand, moyenné sur une période, se met sous la forme

$$\langle \phi \rangle = \frac{e^2}{3} \frac{a^2 \omega^4}{c^3} . \quad (4.2)$$

3/ On considère toujours l'électron dont la trajectoire est $z(t) = a \cos(\omega t)$. On suppose qu'au cours de sa trajectoire il est soumis à la force

$$\vec{F}_R = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{z} \vec{e}_z . \quad (4.3)$$

Calculer la valeur moyenne sur une période de la puissance effectuée par F_R sur l'électron (soit $\langle dW_R/dt \rangle$). En comparant cette expression avec (4.2), expliquer pourquoi on peut décrire la perte d'énergie par rayonnement en utilisant la force effective F_R .

4/ On considère maintenant que l'électron est astreint à se déplacer selon Oz et qu'il est lié à l'origine par une force de rappel harmonique. L'effet de sa perte d'énergie par rayonnement est décrit de manière effective par la force (4.3). L'équation gouvernant sa dynamique est alors

$$m \ddot{z} = -m \omega_0^2 z + F_R . \quad (4.4)$$

On définit $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$.

- Montrer que l'ordre de grandeur de F_R est celui de la force harmonique multipliée par r_0/λ_0 .
- Évaluer l'ordre de grandeur de r_0/λ_0 et en déduire que F_R peut être traitée comme une perturbation.
- Chercher les solutions de (4.4) de la forme $\exp\{i\Omega t\}$ et montrer qu'à l'ordre 1 inclus en r_0/λ_0 on a

$$\Omega = \pm\omega_0 + i\frac{\gamma_0}{2} . \quad (4.5)$$

Donner l'expression de γ_0 . Que représente physiquement le temps $\tau_0 = \gamma_0^{-1}$? (justifier votre réponse). Comparer à la valeur obtenue en cours pour la durée de vie d'un état atomique excité (phénomène d'émission spontanée).

5/ L'électron est maintenant soumis à un champ électrique incident polarisé le long de Oz et d'amplitude à l'origine $-E \cos(\omega t)$. Justifier que l'équation gouvernant la dynamique de l'électron s'écrit

$$m \ddot{z} = -m \omega_0^2 z + F_R + q E \cos(\omega t) . \quad (4.6)$$

En particulier, pourquoi la force de Lorentz ne figure-t-elle pas dans l'équation du mouvement (4.6) et dans quel domaine de fréquences ω cette équation est-elle valable?

- Calculer le mouvement d'oscillation forcée de l'électron [on cherchera une solution de (4.6) sous la forme $\text{Re}\{z_0 \exp(i\omega t)\}$].
- En déduire à partir des résultats de la question 2/ l'énergie rayonnée par l'électron dans tout l'espace (ou de manière équivalente la puissance dissipée par la force F_R).
- Montrer que le flux d'énergie *par unité de surface* (moyenné sur une période) associé à l'onde incidente (supposée plane et se propageant selon Ox) est $\langle S_{\text{inc}} \rangle = E^2 / (2\mu_0 c)$. En déduire la section efficace totale de diffusion $\sigma(\omega)$. On donnera son expression en fonction de r_0 , ω , ω_0 et γ_0 .
- On suppose que $\omega \ll \omega_0$ (diffusion Rayleigh). Montrer que $\sigma(\omega)$ est alors proportionnelle à une puissance de ω que l'on déterminera.
- On suppose que $\omega_0 \ll \omega \ll c/r_0$ (diffusion Thomson). Montrer que $\sigma(\omega)$ est égale à une constante.
- On suppose enfin que ω est voisine de ω_0 (diffusion résonnante). Montrer que les variations de $\sigma(\omega)$ avec $\omega - \omega_0$ mettent en évidence un phénomène de résonance. Quelle est la largeur de la résonance? Que vaut la section efficace à la résonance?

Formulaire

• q étant la charge élémentaire (> 0), ε_0 la permittivité du vide, \hbar la constante de Planck divisée par 2π , c la vitesse de la lumière dans le vide et m la masse électronique on note

$$e^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}, \quad r_0 = \frac{e^2}{m c^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}.$$

On appelle r_0 le rayon classique de l'électron ($r_0 = 2,82 \text{ fm}$) et α la constante de structure fine ($\alpha = 1/137,0$).

• Pour estimer les ordres de grandeur, il est utile de se souvenir que le potentiel d'ionisation de l'atome d'hydrogène est

$$E_I = \frac{e^2}{2a_0} = 13,6 \text{ eV} \quad \text{où} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2} = 0,529 \text{ \AA} \quad \text{est le rayon de Bohr.}$$

TD 5

Limites expérimentales sur la masse du photon

En 1936, Alexandre Proca a construit une théorie alternative à l'électromagnétisme usuel dans laquelle le photon aurait une masse non nulle. Ce problème porte sur la version non quantique de cette théorie et sur ses conséquences expérimentales.

Formulaire

- La solution de l'équation $(-\vec{\nabla}^2 + \Lambda^{-2})G(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r})$ est la fonction

$$G(\vec{r}) = \frac{\exp\{-r/\Lambda\}}{4\pi r}, \quad (5.1)$$

où $r = |\vec{r}|$.

- Pour une fonction ϕ ne dépendant que de $r = |\vec{r}|$ on a : $\vec{\nabla}^2\phi = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\phi)$.
- Pour fixer les idées voici un ordre de grandeur de la masse de particules légères: pour l'électron $m = 511$ keV/c²; pour les neutrinos ν_e , $m < 2$ eV/c².
- $\hbar c \simeq 197$ MeV.fm

5.1 Lagrangien de Proca

On considère un modèle d'interaction du champ électromagnétique avec la matière caractérisé par les densités lagrangiennes \mathcal{L}_{chp} et \mathcal{L}_{int} suivantes:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -J^\mu A_\mu, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\text{chp}} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\mu_0}\frac{A_\mu A^\mu}{\Lambda^2}, \quad (5.2)$$

où $J^\mu(\vec{r},t) = (c\rho, \vec{J})$ est le quadri-courant, $A^\mu(\vec{r},t) = (\phi/c, \vec{A})$ le quadri-potentielle, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur de Faraday, μ_0 la perméabilité du vide et Λ une constante réelle positive.

1/ Écrire la forme explicite des équations d'Euler-Lagrange sous la forme d'une relation entre $F^{\mu\nu}$, J^μ et A^μ qui modifient les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère usuelles. Montrer que la conservation du courant impose de travailler en jauge de Loren(t)z. Montrer que les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-divergence ne sont pas affectées par le terme supplémentaire ajouté au lagrangien du champ (*indication*: passer par la forme covariante de ces équations).

2/ Dans cette question (et dans cette question seulement) on se restreint au cas du champ libre (absence de sources: $J^\mu \equiv 0$). Le tenseur impulsion-énergie canonique du champ est

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{chp}}}{\partial(\partial_\nu A_\sigma)}\partial^\mu A_\sigma - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\text{chp}}. \quad (5.3)$$

On le symétrise en lui ajoutant un terme $\partial_\sigma \Psi^{\mu\nu\sigma}$ avec $\Psi^{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{\mu_0} A^\mu F^{\nu\sigma}$. Donner la forme explicite du tenseur impulsion-énergie $T_{\text{chp}}^{\mu\nu}$ qui résulte de cette opération. Donner l'expression de la densité d'énergie $u(\vec{r}, t)$ et du vecteur de Poynting $\vec{S}(\vec{r}, t)$ en fonction des champs \vec{E} , \vec{B} , \vec{A} et ϕ . Donner l'expression de la trace $T_{\text{chp}\mu}^\mu$ en fonction du quadri-potential et des paramètres du problème. Pourquoi peut-on dire que dans cette théorie le photon a une masse non nulle?

5.2 Premières conséquences d'une masse finie du photon

Montrer que les équations du champ obtenues en 5.1.1/ s'écrivent sous la forme

$$\left(\square + \frac{1}{\Lambda^2} \right) A^\mu = \mu_0 J^\mu, \quad (5.4)$$

où $\square = \partial_\mu \partial^\mu$.

1/ Donner l'expression du potentiel électro-statique créé par une charge ponctuelle q immobile située à l'origine. Quelle variable peut caractériser la portée de ce champ? Dans quelle limite retrouve-t-on le résultat électrostatique usuel?

2/ En l'absence de sources, on considère une solution de (5.4) en onde plane, de la forme $A^\mu(\vec{r}, t) = \mathcal{A}^\mu \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\}$, où \mathcal{A}^μ est un quadri-vecteur constant.

- Écrire la relation de dispersion $\omega(k)$ correspondante. Montrer qu'elle peut être mise sous la forme $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ qui correspond à la relation entre énergie et impulsion d'une particule libre de masse m (vous définirez vous-même E et p en fonction de ω , k et de constantes fondamentales). Exprimer en particulier m en fonction de \hbar , c et Λ .
- Tracer rapidement l'allure de la relation de dispersion. Dans quelle gamme de longueur d'ondes est-on le plus sensible à la masse finie du photon?
- On rappelle que la vitesse de groupe est $v_g = \partial\omega/\partial k$. Des mesures de propagation d'ondes radio au dessus de l'océan montrent que leur vitesse de groupe varie de moins de 10^{-3} en valeur relative lorsque la longueur d'onde λ varie de 300 à 450 m. En déduire une borne supérieure à la masse du photon. On donnera la valeur numérique en eV/ c^2 . *Indication*: on pourra, pour simplifier les calculs, négliger les termes d'ordre $(\lambda/\Lambda)^4$ et vérifier *a posteriori* la validité de cette approximation.

5.3 Expérience de Cavendish

Dans cette section on poursuit l'étude commencée en 5.2.1/ sur les conséquences électrostatiques de la masse non nulle du photon. On considère une sphère conductrice vide portant une charge surfacique uniforme. Cela correspond à une densité de charge $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta^{(1)}(r - R)$.

1/ On veut ici résoudre la composante "0" de l'équation (5.4). Le potentiel électrostatique ϕ correspondant a une symétrie sphérique. Montrer alors que

$$r \phi(r) = \begin{cases} A \exp(-r/\Lambda) & \text{si } r \geq R, \\ B \sinh(r/\Lambda) & \text{si } r \leq R, \end{cases} \quad (5.5)$$

où l'on donnera l'expression des constantes A et B en fonction des paramètres du problème.

2/ Discuter de l'efficacité de l'écrantage à l'intérieur de la sphère en fonction des paramètres du problème.

3/ On place à l'intérieur de la sphère précédente une sphère conductrice non chargée, de rayon $r_0 < R$, qui ne modifie pas $\phi(r \leq R)$ mais permet juste de mesurer $\Delta V = \phi(R) - \phi(r_0)$. On note $V = \phi(R)$. L'expérience la plus récente mesure $\Delta V/V < 4 \times 10^{-16}$ pour $R = 1.5$ m et $r_0 = 1$ m. Calculer la borne supérieure de la masse du photon qui en découle (donner la valeur numérique en eV/ c^2).

5.4 Champ magnétique terrestre

C'est une idée de Schrödinger qui consiste à étudier les effets magnétostatiques de la masse finie du photon.

1/ Soit la distribution de courant

$$\vec{J}(\vec{r}) = -\vec{M} \wedge \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}), \quad (5.6)$$

où \vec{M} est un vecteur constant et φ une fonction donnée normalisée à l'unité : $\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\vec{r}) d^3r = 1$. Calculer le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ de cette distribution, défini par $\vec{\mathfrak{M}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{r} \wedge \vec{J}(\vec{r}) d^3r$.

2/ On assimile la Terre à un dipôle magnétique créé par la distribution de courant (5.6) où l'on prend $\varphi(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r})$. Montrer que le potentiel associé vaut alors $\vec{A} = -\mu_0 \vec{M} \wedge \vec{\nabla} G(\vec{r})$, où la fonction G est définie en (5.1).

3/ En déduire le champ magnétique créé par cette distribution (pour $r > 0$). On écrira le résultat final sous la forme

$$\frac{B_i}{\mu_0} = \frac{b_2(r)M_j}{4\pi r^3} \left(\frac{3x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) + \frac{b_1(r)M_i}{4\pi r^2}, \quad (5.7)$$

où x_1, x_2, x_3 sont les trois composantes cartésiennes de \vec{r} , et M_1, M_2, M_3 celles de \vec{M} . On donnera l'expression des fonctions $b_1(r)$ et $b_2(r)$.

4/ Pour répondre à cette question il suffit de savoir que $b_2(r) = e^{-r/\Lambda} (1 + \mathcal{O}(r/\Lambda)^2)$ et $b_1(r) = e^{-r/\Lambda} \mathcal{O}(r/\Lambda)^2$.

Des mesures du champ magnétique à la surface de la Terre, et, par satellite, dans la magnétosphère, montrent que $|b_1(R)/b_2(R)| < 4 \times 10^{-3}$ pour $R = 6400$ km. Quelle borne supérieure obtient-on ainsi sur l'ordre de grandeur de la masse du photon? (on donnera la valeur numérique en eV/c²).

5/ S'il vous reste du temps démontrez la formule (5.1).

TD 6

Tenseur impulsion-énergie

6.1 Trivialité

Retrouver la force entre deux particules immobiles en utilisant le tenseur des contraintes de Maxwell, c'est à dire en utilisant la loi :

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{champ} + \vec{P}_{part} \right)_i = \int_{surf} d^2\sigma T_{ij}^{(M)} n_j \quad \text{où} \quad \vec{P}_{champ} = \int_{vol} d^3x \frac{\vec{S}}{c^2}, \quad (6.1)$$

où \hat{n} est la normale (sortante) à la surface considérée, $\vec{S} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0$ et

$$T_{ij}^{(M)} = \epsilon_0 \left(E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) \right). \quad (6.2)$$

On notera q_A et q_B les valeurs des deux charges et $2a$ leur distance de séparation. On pourra ne traiter que les cas $q_A = q_B = e$ et $q_A = e = -q_B$.

6.2 Force de Lorentz

Retrouver l'équation du mouvement des particules soumises à la force de Lorentz à partir des expressions (6.1) et (6.2).

Indications: 1- Utiliser Gauss-Ostrogradsky.

2- pour tout champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ on a: $\vec{A} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})|_i = \frac{1}{2} \partial_i \vec{A}^2 - A_j \partial_j A_i$.

6.3 Char à voile cosmique

• Montrer le tenseur des contraintes d'une onde plane se propageant dans le vide selon la direction \hat{N} s'écrit

$$T_{ij}^{(M)} = -u N_i N_j \quad \text{avec} \quad u(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2). \quad (6.3)$$

On pourra utiliser (en la démontrant) la formule :

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lpq} = \delta_{il} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) + \delta_{ip} (\delta_{jq} \delta_{kl} - \delta_{jl} \delta_{kq}) + \delta_{iq} (\delta_{jl} \delta_{kp} - \delta_{jp} \delta_{kl}). \quad (6.4)$$

• Soit \vec{F} la force exercée par une onde plane se réfléchissant sur un conducteur plan (d'aire \mathcal{A}) sous l'angle d'incidence α . On appellera R le coefficient de réflexion et \hat{N}' la direction de l'onde réfléchie. Montrer que si l'on néglige les effets d'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie alors

$$\vec{F} = \bar{u} \mathcal{A} \cos \alpha (\hat{N} - R \hat{N}'). \quad (6.5)$$

Discuter (en particulier que signifie \bar{u} ?). Montrer que l'équation (6.5) est exacte si $R = 0$ ou 1 .

• Au voisinage de la Terre, le flux d'énergie électromagnétique en provenance du Soleil vaut 0.14 W cm^{-2} . Quelle peut-être l'accélération maximale d'un hypothétique char à voile interplanétaire? On supposera la masse par unité de surface égale à $10^{-4} \text{ g cm}^{-2}$.

6.4 Une théorie des champs pour l'équation de Schrödinger

On considère une théorie pour un champ complexe $\psi(\vec{r},t)$ décrite par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_t \psi, \partial_j \psi, \psi^*, \partial_t \psi^*, \partial_j \psi^*) = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_j \psi \partial_j \psi^* - V(\vec{r},t) \psi \psi^* . \quad (6.6)$$

Dans l'expression (6.6) $V(\vec{r},t)$ est un potentiel extérieur, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ où x_j désigne la $j^{\text{ième}}$ composante de \vec{r} ($j \in \{1,2,3\}$) et on a une somme implicite sur les indices spatiaux répétés¹.

1/ Démontrer (ou admettre pour gagner du temps) que les équations d'Euler-Lagrange se mettent sous la forme

$$\partial_t \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} \right] + \partial_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} , \quad (6.7)$$

et d'une équation similaire obtenue en remplaçant ψ par ψ^* dans (6.7).

- (a) Écrire la forme explicite des équations d'Euler-Lagrange. Commenter.
 (b) Démontrer que la quantité

$$\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} + \partial_t \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} + \partial_j \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi)} \quad (6.8)$$

s'exprime simplement en fonction de \mathcal{L} . Même question en remplaçant ψ par ψ^* dans l'expression ci-dessus.

2/ On définit les quantités

$$\rho(\vec{r},t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} - \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)} \right] \quad \text{et} \quad \vec{J}_j(\vec{r},t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi)} - \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi^*)} \right] . \quad (6.9)$$

Donner les expressions explicites des champs ρ et \vec{J} en fonction de ψ , ψ^* et de leurs dérivées. Calculer la quantité $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$. Commenter [discuter en particulier la dépendance temporelle de la quantité $\int_{\mathbb{R}^3} d^3v \rho(\vec{r},t)$].

3/ On définit le tenseur σ_{jk} par

$$\sigma_{jk} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \psi)} \partial_j \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \psi^*)} \partial_j \psi^* - \delta_{jk} \mathcal{L} . \quad (6.10)$$

En vous inspirant du cours (partie sur le tenseur impulsion-énergie), ou bien en utilisant la forme explicite des équations d'Euler-Lagrange, démontrer que l'on a :

$$\partial_t g_j = \partial_k \sigma_{jk} - |\psi|^2 \partial_j V , \quad \text{où} \quad \vec{g} = m \vec{J} . \quad (6.11)$$

Donner une interprétation physique de chacun des termes de la formule (6.11).

Indication: on pourra intégrer la formule sur un volume fermé Ω délimité par une frontière $\partial\Omega$, et grand devant l'extension spatiale de V , ce qui permet de faire apparaître la force \vec{F} exercée par le potentiel sur le champ ψ comme la valeur moyenne sur ψ d'un "opérateur force" à définir.

4/ Pour interpréter la formule (6.11) d'une manière intuitive on se place dans une configuration unidimensionnelle (on notera x la coordonnée d'espace) et stationnaire dans laquelle la fonction d'onde $\psi(x,t)$ prend la forme $\psi(x,t) = \phi(x) \exp\{-iEt/\hbar\}$. On considère un potentiel $V(x)$ indépendant du temps, localisé au voisinage de l'origine et qui décroît rapidement lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

La fonction $\phi(x)$ a le comportement asymptotique suivant:

$$\phi(x) = \begin{cases} A [e^{ipx/\hbar} + r e^{-ipx/\hbar}] & \text{quand } x \rightarrow -\infty , \\ A t e^{ipx/\hbar} & \text{quand } x \rightarrow +\infty . \end{cases} \quad (6.12)$$

- (a) Dans (6.12) p et A sont des constantes positives, r et t des constantes complexes. Comment p est-il relié à E ? Quel nom peut-on donner aux coefficients $|r|^2$ et $|t|^2$? Comment ces coefficients sont-ils reliés entre eux?

1. On ne fait pas de distinction covariant/contravariant.

- (b) Identifier dans l'expression (6.12) la composante qui décrit un flot de particules incident depuis $-\infty$. Déterminer le courant incident J_{inc} associé.
- (c) En utilisant la version intégrée entre $-\infty$ et $+\infty$ de (6.11) adaptée à la configuration unidimensionnelle et stationnaire que l'on considère dans cette question, montrer que la force F exercée par le potentiel sur le flot de particules incident depuis $-\infty$ se met sous la forme

$$F = \sigma(-\infty) - \sigma(+\infty) = -2 A^2 |r|^2 \frac{p^2}{m} . \quad (6.13)$$

- (d) Donner une interprétation physique de la relation (6.13) en évaluant le transfert d'impulsion par unité de temps entre le faisceau incident et l'obstacle que représente le potentiel $V(x)$. Pour cela il faut déterminer le nombre de particules qui subissent un choc avec l'obstacle par unité de temps, et l'impulsion reçue par ces particules au cours de la collision.

TD 7

Brisure spontanée de symétrie et mécanisme de Higgs

Le lagrangien étudié dans la partie **B** présente une **brisure spontanée de symétrie**. La symétrie continue $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\phi(x)$ du lagrangien n'est pas une symétrie de l'état du vide. À cette symétrie est associé un champ scalaire réel de masse nulle (**boson de Goldstone**).

Dans la partie **C**, le champ de jauge A^μ (photon) acquiert une masse non nulle par couplage avec le champ scalaire ϕ (**mécanisme de Higgs**). Par suite de la symétrie de jauge, il n'y a plus de boson de Goldstone.

A. Champ scalaire complexe

On étudie un champ scalaire complexe $\phi(x)$ défini sur l'espace de Minkowski \mathcal{E} , x désignant l'ensemble des coordonnées x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Ce champ peut être considéré comme formé de deux champs scalaires réels $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$. On notera $\phi^*(x)$ le champ complexe conjugué du champ $\phi(x)$:

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2, \quad \phi^* = \phi_1 - i\phi_2. \quad (7.1)$$

Le système est régi par l'action $S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x$ où la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi^*) - V(|\phi|^2) \quad \text{avec} \quad V(|\phi|^2) = \frac{k^2 |\phi|^2}{2} \quad \text{et} \quad k > 0. \quad (7.2)$$

1. Déterminer les équations du mouvement sous une forme manifestement covariante. Pour cela, on demande d'appliquer le principe de moindre action en utilisant les champs réels ϕ_1 et ϕ_2 .
2. Vérifier qu'on retrouve les équations du mouvement de la question précédente à partir du principe de moindre action lorsqu'on traite $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ comme deux champs indépendants.
3. Déterminer les moments conjugués $\pi_1(x)$ et $\pi_2(x)$ des champs $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ respectivement. Calculer la densité d'énergie $\mathcal{H}(\pi_1, \pi_2, \phi_1, \phi_2, \vec{\nabla}\phi_1, \vec{\nabla}\phi_2)$.
4. Quel est le niveau fondamental du système? Est-il dégénéré?
5. Lorsqu'on quantifie le système, une particule d'énergie E et de quantité de mouvement \vec{p} correspond à un champ classique $\phi(t, \vec{r}) = Ae^{i(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar}$. Quelle est la relation entre E et \vec{p} ? Quelle est la masse de la particule?

B. Lagrangien en $|\phi|^4$

Comme dans la partie **A**, on étudie un champ scalaire complexe $\phi(x)$, mais la densité lagrangienne est maintenant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi^*) - V(|\phi|^2) \quad \text{avec} \quad V(|\phi|^2) = \frac{-K^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4}{2} \quad (7.3)$$

où $K > 0$ et $\lambda > 0$. Le lagrangien (7.3) diffère du lagrangien (7.2) par la présence du terme en $|\phi|^4$ et par le signe devant le terme en $|\phi|^2$.

1. Pourquoi le système n'aurait-il aucun sens physique sans la présence du terme en $|\phi|^4$ (c'est-à-dire pour $\lambda = 0$) ?
2. Déterminer les équations du mouvement sous une forme manifestement covariante.
3. Déterminer les moments conjugués $\pi_1(x)$ et $\pi_2(x)$ des champs $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ respectivement. Calculer la densité d'énergie $\mathcal{H}(\pi_1, \pi_2, \phi_1, \phi_2, \vec{\nabla}\phi_1, \vec{\nabla}\phi_2)$.
4. Montrer que l'énergie du système est minimale pour le champ

$$\phi_0(x) = a e^{i\theta} \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{\frac{K^2}{2\lambda}} \quad \text{et} \quad \theta = \text{constante réelle.} \quad (7.4)$$

Montrer que le niveau fondamental du système est dégénéré. Interpréter cette dégénérescence par les propriétés de symétrie de la densité lagrangienne.

5. On suppose que le système est initialement dans l'état fondamental $\phi_0(x) = a$ et on étudie les excitations à partir de cet état. Pour cela, on introduit un nouveau champ scalaire complexe $\psi(x)$, ou deux champs scalaires réels $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ en posant

$$\phi(x) = a + \psi(x) = a + \psi_1(x) + i\psi_2(x). \quad (7.5)$$

a. Exprimer la densité lagrangienne (7.3) en termes de a , λ , ψ_1 et ψ_2 .

b. Pour les petites excitations, on néglige dans la densité lagrangienne les termes d'ordres 3 et 4 en $\psi(x)$. Lorsqu'on quantifie le système, comme à la question **A.5**, une particule est associée à chacun des champs ψ_1 et ψ_2 . Quelles sont leurs masses respectives m_1 et m_2 ?

C. Champ scalaire et champ électromagnétique

Le champ scalaire complexe $\phi(x)$ de la partie **B** est couplé au champ électromagnétique décrit par le quadripotential $A_\mu(x)$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Le système est régi par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu \phi) (D^\mu \phi)^* - \frac{-K^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4}{2} - \frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (7.6)$$

où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (7.7)$$

D_μ est la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + i\gamma A_\mu(x), \quad (7.8)$$

γ étant une constante non nulle.

1. Trouver, par analyse dimensionnelle, les expressions possibles de la masse et de la charge électrique des particules.
2. Montrer que la densité lagrangienne (7.6) est invariante dans la transformation de jauge

$$\begin{cases} \phi'(x) &= \phi(x) e^{i\gamma\Lambda(x)} \\ \phi'^*(x) &= \phi^*(x) e^{-i\gamma\Lambda(x)} \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x) \end{cases} \quad (7.9)$$

où $\Lambda(x)$ est une fonction réelle arbitraire.

3. Déterminer les équations du mouvement pour les champs $\phi(x)$ et $A_\mu(x)$ sous une forme manifestement covariante. On conseille d'utiliser la méthode du **A.2** en admettant que, pour ce calcul, on peut considérer $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ comme deux champs indépendants. On posera

$$j^\nu(x) = \gamma \frac{\phi(D^\nu \phi)^* - \phi^*(D^\nu \phi)}{2i}. \quad (7.10)$$

4. Quelle est l'interprétation physique du quadrivecteur $j^\mu(x)$? Vérifier à partir des équations du mouvement que

$$\partial_\nu j^\nu = 0. \quad (7.11)$$

En déduire l'expression d'un scalaire invariant conservé.

5. Pourquoi peut-on imposer

$$\phi(x) = \phi^*(x) = \rho(x) \geq 0? \quad (7.12)$$

Montrer que les équations du mouvement peuvent alors s'écrire ($\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$)

$$\square \rho - \gamma^2 A_\mu A^\mu \rho - K^2 \rho + 2\lambda \rho^3 = 0 \quad (7.13)$$

$$\partial_\mu (\gamma \rho^2 A^\mu) = 0 \quad (7.14)$$

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + \mu_0 \gamma^2 \rho^2 A^\nu = 0 \quad (7.15)$$

6. Vérifier qu'il y a une solution $\rho = \rho_0 = \text{constante}$, $A^\nu = 0$ des équations (7.13-7.15). On considère que le champ $\rho(x)$ est gelé à la valeur $\rho(x) = \rho_0$ (on néglige ses fluctuations). Quelle est alors l'équation du mouvement du champ A^ν ? Quelle est la masse m_p de la particule (photon) associée à ce champ?

D. Symétries et lois de conservation

1. On considère un champ scalaire complexe $\phi(x)$ dont le mouvement est régi par le principe de moindre action associé à une densité lagrangienne

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*). \quad (7.16)$$

- a. Écrire de façon générale les équations du mouvement en considérant $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ comme deux champs indépendants (cf. question **A.2**).

- b. On effectue la petite variation

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x), \quad \phi'^*(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x) \quad (7.17)$$

à partir d'une solution ϕ des équations du mouvement, $\delta\phi(x)$ étant infiniment petit. Montrer que la fonctionnelle (7.16) varie de

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi'] - \mathcal{L}[\phi] = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \delta\phi^* \right). \quad (7.18)$$

- c. On suppose que dans la variation (7.17), effectuée avec

$$\delta\phi(x) = i\epsilon\phi(x) \quad \text{et} \quad \delta\phi^*(x) = -i\epsilon\phi^*(x), \quad (7.19)$$

où ϵ est un nombre réel infinitésimal, la densité lagrangienne (7.16) est invariante: $\mathcal{L}[\phi'] = \mathcal{L}[\phi]$. Montrer que le quadrivecteur

$$J^\mu = i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \phi^* \right) \quad (7.20)$$

est de quadridivergence nulle.

2. a) Vérifier que les densités lagrangiennes (7.2), (7.3) et (7.6) sont invariantes dans la variation définie par les équations (7.17) et (7.19). Dans le cas de (7.6), le champ A^μ n'est pas modifié dans la variation: $A'^\mu(x) = A^\mu(x)$.
- b. Dans chacun de ces cas, calculer le quadrivecteur (7.20) en fonction des champs et de leurs dérivées.
- c. Commenter le titre de cette partie **D**.

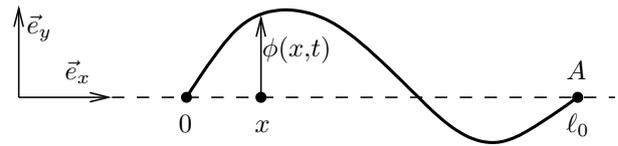
TD 8

Quantification des oscillations d'une corde. Effet Casimir

Dans ce problème on étudie la quantification de l'équation de d'Alembert et on en déduit une version de l'effet Casimir pour un champ scalaire sans masse.

8.1 Corde classique

On considère une corde homogène (masse linéique ρ) tendue entre deux points de l'axe Ox d'abscisses respectives 0 et ℓ_0 . On étudie de petites déformations où le déplacement transverse est décrit par un champ $\phi(x,t)$ (cf. schéma ci-contre).



1/ La corde est fixe à ses extrémités : $\phi(0,t) = 0 = \phi(\ell_0,t)$. On fait l'hypothèse de petites déformations : $|\partial\phi/\partial x| \ll 1$. Montrer alors que la longueur ℓ de la corde est donnée par

$$\ell = \ell_0 + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_0} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 dx . \quad (8.1)$$

En déduire que si l'on appelle \mathcal{T} la force de tension exercée à l'une des extrémités de la corde, et si l'on néglige l'influence de la gravité, le lagrangien L du système est

$$L = \int_0^{\ell_0} \mathcal{L} dx \quad \text{où} \quad \mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\mathcal{T}}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 . \quad (8.2)$$

2/ On note $c = (\mathcal{T}/\rho)^{1/2}$ et on introduit une notation covariante avec des indices prenant les valeurs 0 et 1 : $x^0 = ct = x_0$, $x^1 = x = -x_1$, $\partial_\mu\phi = \partial\phi/\partial x^\mu$, $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$... Montrer que la densité lagrangienne s'écrit

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{\rho c^2}{2} (\partial^\mu\phi) (\partial_\mu\phi) . \quad (8.3)$$

3/ Écrire l'action correspondant à cette densité lagrangienne et utiliser le principe variationnel pour en déduire l'équation d'onde vérifiée par le champ ϕ (équation de d'Alembert).

4/ Définir le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ de la corde. Donner son expression en fonction de ϕ et de ses dérivées. Montrer que $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$.

5/ Construire le "di-vecteur" $P = (P^0 = E/c, P^1)$ de la corde.

- (a) Donner l'expression de l'énergie E de la corde sous la forme d'une intégrale faisant intervenir ρ , c , $\partial\phi/\partial x$ et $\partial\phi/\partial t$. Même question pour son impulsion P^1 .

(b) Donner l'expression explicite de $T^{11}(x,t)$ et montrer de la manière de votre choix que

$$\frac{dP^1}{dt} = T^{11}(0,t) - T^{11}(\ell_0,t). \quad (8.4)$$

Expliquer alors pourquoi on peut interpréter $\mathcal{T} - T^{11}(0,t)$ comme la force exercée par la corde sur le point d'abscisse 0 et $T^{11}(\ell_0,t) - \mathcal{T}$ comme la force exercée par la corde sur le point A (abscisse ℓ_0).

8.2 Corde quantique

Dans cette partie, tous les opérateurs sont notés avec un chapeau, sauf les α_n et α_n^\dagger (par soucis de lisibilité). On définit le champ conjugué de ϕ : $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_t\phi) = c\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\phi)$. En représentation de Schrödinger on quantifie le système en remplaçant les champs $\phi(x,t)$ et $\pi(x,t)$ par des opérateurs quantiques hermitiques $\hat{\phi}(x)$ et $\hat{\pi}(x)$ développés selon les modes normaux :

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar}{\ell_0\rho\omega_n}} \sin(k_n x) (\alpha_n + \alpha_n^\dagger), \quad \text{et} \quad \hat{\pi}(x) = i \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar\rho\omega_n}{\ell_0}} \sin(k_n x) (-\alpha_n + \alpha_n^\dagger), \quad (8.5)$$

où $k_n = \pi n/\ell_0$, $\omega_n = ck_n$, et les opérateurs de création α^\dagger et de destruction α vérifient les relations de commutation :

$$[\alpha_n, \alpha_m^\dagger] \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_n \alpha_m^\dagger - \alpha_m^\dagger \alpha_n = \delta_{n,m}, \quad [\alpha_n, \alpha_m] = [\alpha_n^\dagger, \alpha_m^\dagger] = 0. \quad (8.6)$$

1/ Dans ce problème, pour aller plus vite au résultat, on ne suit pas la démarche du cours qui consiste à d'abord imposer le commutateur des champs $\hat{\phi}$ et $\hat{\pi}$ puis à faire apparaître les opérateurs de création et de destruction. On suit ici l'ordre exactement opposé.

L'objet de cette question préliminaire est donc : Vérifier que $\hat{\phi}$ et $\hat{\pi}$ définis par (8.5) sont des opérateurs hermitiques et qu'ils obéissent aux relations de commutation usuelles. Pour cela on calculera $[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(y)]$, $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ et $[\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)]$.

2/ Exprimer l'opérateur hamiltonien \hat{H} en fonction des opérateurs de champ $\hat{\phi}$ et $\hat{\pi}$ et montrer qu'il se met sous la forme

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar\omega_n \left(\alpha_n^\dagger \alpha_n + \frac{1}{2} \right). \quad (8.7)$$

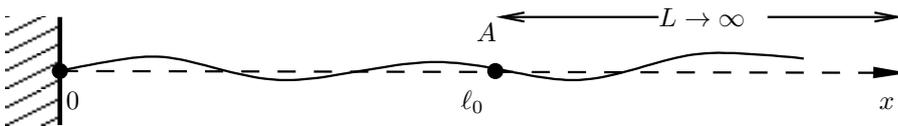
3/ Pour $\nu \in \mathbb{N}^*$ on appelle "fonction d'onde à 1 phonon dans l'état ν " le ket $|1_\nu\rangle = \alpha_\nu^\dagger|0\rangle$, où $|0\rangle$ est l'état fondamental (parfois appelé le "vide de la théorie"), défini par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n|0\rangle = 0$.

Montrer que la valeur moyenne de l'opérateur hamiltonien sur une fonction d'onde $|1_\nu\rangle$ vaut :

$$\langle 1_\nu | \hat{H} | 1_\nu \rangle = E_0 + \hbar\omega_\nu, \quad (8.8)$$

où E_0 est l'énergie du vide.

4/ On se place désormais dans la configuration illustrée ci-dessous: la corde est fixée en 0 et en ℓ_0 et s'étend jusqu'à $+\infty$. On veut déterminer la force subie par le point A d'abscisse ℓ_0 lorsque la corde est dans son état fondamental.



D'après ce qu'on a vu question A.5/(b) la force exercée sur A par le brin de gauche est $F_g = \langle 0 | \hat{T}^{11}(\ell_0) - \mathcal{T} | 0 \rangle$. Montrer que l'on obtient

$$F_g = -\mathcal{T} + \frac{\pi \hbar c}{2\ell_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} n. \quad (8.9)$$

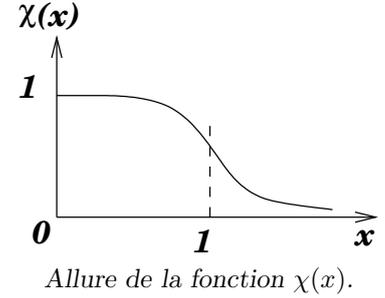
5/ La divergence de l'expression (8.9) est compensée par la force F_d exercée par le brin à droite de A . Pour évaluer F_g et F_d proprement on introduit momentanément une pulsation de coupure arbitrairement grande : $\omega_c = \pi c/L_c$.

Cela revient à inclure dans l'expression (8.9) de la force un "terme régulateur" $\chi(\omega_n/\omega_c) = \chi(nL_c/\ell_0)$:

$$F_g = -\mathcal{T} + \frac{\pi \hbar c}{2\ell_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \chi\left(\frac{nL_c}{\ell_0}\right) = -\mathcal{T} + \frac{\pi \hbar c}{2\ell_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} g(n), \quad (8.10)$$

où on a posé $g(x) = x \chi(xL_c/\ell_0)$.

La fonction régularisante $\chi(x)$ tend vers zéro pour $x \gg 1$ (ainsi que toutes ses dérivées), et $\chi(0) = 1$ (et ses premières dérivées sont nulles à l'origine), cf. figure ci-contre.



La force F_d exercée sur A par le brin (infini) de droite est, à un changement de signe près, la même que F_g donnée par (8.10), exercée par une corde de longueur non pas ℓ_0 mais L (infinie). Cela donne :

$$F_d = \mathcal{T} - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\pi \hbar c}{2L^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \chi\left(\frac{nL_c}{L}\right). \quad (8.11)$$

Dans la limite où L est très grand, les modes à droite forment un quasi-continuum et il est légitime de remplacer dans (8.11) la somme discrète par une intégrale sur la variable continue n ($\sum_n \rightarrow \int dn$).

(a) Monter alors grâce à un changement de variable approprié que

$$F_d = \mathcal{T} - \frac{\pi \hbar c}{2\ell_0^2} \int_0^{\infty} dx g(x). \quad (8.12)$$

(b) En utilisant la formule d'Euler-McLaurin (8.16) donner alors l'expression de la force totale subie par le point A . Comment s'appelle cette force? Quelle est son origine physique?

(c) Pour les courageux: étudier la dépendance en température de cette force. À température finie on aura par exemple (en laissant désormais tomber le terme de tension statique \mathcal{T} dont on sait qu'il sera compensé) :

$$F_g(T) = \text{Tr} \left[\hat{T}^{11}(\ell_0) \exp\{-\beta \hat{H}\} \right], \quad (8.13)$$

où la trace est prise dans l'espace de Fock des états quantiques de la corde (états à plusieurs phonons).

Formulaire

• Pour x et y dans $]0, \ell_0[$ on a, en notant $k_n = \pi n/\ell_0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(k_n y) = \frac{\ell_0}{2} \delta(x - y). \quad (8.14)$$

• On a également (pour n et m dans \mathbb{N} , non nuls)

$$\int_0^{\ell_0} \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx = \frac{\ell_0}{2} \delta_{n,m} = \int_0^{\ell_0} \cos(k_n x) \cos(k_m x) dx. \quad (8.15)$$

• Formule d'Euler-McLaurin : Pour une fonction $g(x)$ suffisamment régulière et tendant assez rapidement vers zéro à l'infini on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n) = \int_0^{\infty} g(x) dx + \frac{g(0)}{2} - \frac{g'(0)}{12} + \frac{g'''(0)}{6!} + \dots \quad (8.16)$$

TD 9

Diffusion Thomson quantique

0/ Rappeler sans démonstration l'expression – au premier ordre des perturbations – de Γ_{if} , taux de transition par unité de temps d'un état $|\varphi_i\rangle$ vers un état $|\varphi_f\rangle$ (tous deux états propres du hamiltonien non perturbé associés aux valeurs propres E_i et E_f) sous l'effet d'une perturbation indépendante du temps (soit W_0).

Le but de cet exercice est de calculer la section efficace de diffusion élastique d'un photon par un électron atomique dans la limite où l'énergie $\hbar\omega$ du photon est grande devant l'énergie d'ionisation E_I de l'atome.

Le système, placé à l'origine des coordonnées, est supposé initialement dans l'état $|\varphi_i\rangle = |a; \underline{n}, \lambda\rangle$ (atome dans l'état fondamental $|a\rangle$, en présence d'un photon $\vec{k}_{\underline{n}}, \vec{e}_{\lambda}$). On considère la diffusion élastique de sorte que l'état final est $|\varphi_f\rangle = |a; \underline{n}', \lambda'\rangle$ avec $\omega_{\underline{n}} = \omega_{\underline{n}'}$.

Les conventions de notation sont celles du cours, on considère que le système est placé dans une boîte cubique de taille $L \times L \times L$ avec des conditions aux limites périodiques. Les modes propres du champ électromagnétique sont notés indifféremment $|\underline{n}, \lambda\rangle$ ou $|\vec{k}_{\underline{n}}, \vec{e}_{\lambda}\rangle$ ou $|\underline{n}, \lambda\rangle$.

1/ En utilisant le cours, écrire la partie du hamiltonien décrivant l'interaction (en jauge de Coulomb) entre le photon et l'électron sous la forme d'un terme $H_I^{(1)}$ du premier ordre en q plus un terme $H_I^{(2)}$ (du second ordre en q). Dans quel régime de pulsation ω peut-on faire une approximation dipolaire électrique pour $H_I^{(1)}$ et $H_I^{(2)}$? On se placera désormais dans ce régime.

2/ Montrer que la contribution de $H_I^{(1)}$ au premier ordre au taux de transition Γ_{if} est nulle. On admettra dans ce qui suit (cela sera justifié plus tard: question 5/ ci-dessous) que la contribution de $H_I^{(1)}$ au second ordre est petite devant la contribution de $H_I^{(2)}$ au premier ordre. Par la suite on utilisera donc le résultat de la question 0/ avec $W_0 = H_I^{(2)}$.

3/ Donner l'expression de $H_I^{(2)}$ en utilisant la décomposition en modes du potentiel vecteur. Montrer alors que

$$\langle \varphi_i | H_I^{(2)} | \varphi_f \rangle = \frac{q^2}{2m} \frac{\hbar}{\varepsilon_0 L^3} \frac{\vec{e}_{\lambda} \cdot \vec{e}_{\lambda'}}{\omega}, \quad (9.1)$$

où ω est la valeur commune de $\omega_{\underline{n}}$ et $\omega_{\underline{n}'}$. Pour évaluer (9.1) on se placera dans la condition $(\underline{n}, \lambda) \neq (\underline{n}', \lambda')$ qui correspond à une "vraie diffusion".

4/ Γ_{if} est le taux de diffusion d'un photon incident $|\vec{k}_{\underline{n}}, \vec{e}_{\lambda}\rangle$ vers un état $|\vec{k}_{\underline{n}'}, \vec{e}_{\lambda'}\rangle$. De manière analogue à ce qui est fait dans le cas classique¹, la section efficace totale est obtenue en divisant le taux de diffusion Γ_{if} par le flux incident de photons et en sommant sur tous les états finals (avec, on le rappelle $\sum_{\underline{n}', \lambda'} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int k'^2 dk' d^2\Omega_{k'} \sum_{\lambda'}$).

(a) Justifier que le flux de photons incidents dans le mode $|\vec{k}_{\underline{n}}, \vec{e}_{\lambda}\rangle$ vaut $\Phi_{\text{inc}} = c/L^3$.

Indication : On se souviendra que le mode $|\vec{k}_{\underline{n}}, \vec{e}_{\lambda}\rangle$ est normalisé.

1. La différence c'est qu'ici on ne considère plus un flux d'énergie comme dans le cas classique [cf. TD 4, question 5/(c)], mais un flux de photons.

(b) Donner alors l'expression de la section efficace totale de diffusion

$$\sigma = \sum_{\underline{n}', \lambda'} \frac{\Gamma_{if}}{\Phi_{\text{inc}}} \quad (9.2)$$

Comparer avec la valeur classique [TD 4, question 5.(e)] et commenter.

5/ Dans cette dernière question (hors barême) on évalue la contribution au deuxième ordre de $H_I^{(1)}$ à Γ_{if} et on montre qu'elle est effectivement négligeable devant la contribution de $H_I^{(2)}$ au premier ordre.

Un calcul perturbatif (qui ne vous est pas demandé) montre que la contribution de $H_I^{(1)}$ au deuxième ordre à Γ_{if} est du type $(2\pi/\hbar)T_{if}^{(1)}\delta(E_i - E_f)$ avec

$$T_{fi}^{(1)} = \sum_b \frac{\langle a, 1_{\underline{n}', \lambda'} | H_I^{(1)} | b, 0 \rangle \langle b, 0 | H_I^{(1)} | a, 1_{\underline{n}, \lambda} \rangle}{E_a + \hbar\omega - E_b} + \sum_b \frac{\langle a, 1_{\underline{n}', \lambda'} | H_I^{(1)} | b, 1_{\underline{n}', \lambda'}, 1_{\underline{n}, \lambda} \rangle \langle b, 1_{\underline{n}', \lambda'}, 1_{\underline{n}, \lambda} | H_I^{(1)} | a, 1_{\underline{n}, \lambda} \rangle}{E_a - \hbar\omega - E_b}, \quad (9.3)$$

où la somme sur b porte sur les états propres électroniques (liés au noyau) et on a toujours $(\underline{n}, \lambda) \neq (\underline{n}', \lambda')$.

(a) Montrer que l'on a

$$T_{fi}^{(1)} = \frac{q^2}{m^2} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega} \sum_b \left\{ \frac{\langle a | \vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda'} | b \rangle \langle b | \vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda} | a \rangle}{E_a + \hbar\omega - E_b} + \frac{\langle a | \vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda} | b \rangle \langle b | \vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda'} | a \rangle}{E_a - \hbar\omega - E_b} \right\}. \quad (9.4)$$

(b) Les niveaux b pour lesquels l'élément de matrice $\langle a | \vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda} | b \rangle$ contribue de manière significative à (9.4) sont tels que $|E_b - E_a| \sim E_I \ll \hbar\omega$. Montrer que si on néglige brutalement $(E_b - E_a)$ devant $\hbar\omega$ les deux contributions à (9.4) s'éliminent exactement.

(c) On doit donc pousser le développement limité à un ordre supérieur. Montrer alors que

$$T_{fi}^{(1)} \simeq \frac{q^2}{m^2} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega} \sum_b \frac{(E_b - E_a) \langle a | \vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda} | b \rangle \langle b | \vec{p} \cdot \vec{e}_{\lambda'} | a \rangle}{\hbar^2 \omega^2}. \quad (9.5)$$

(d) Pour évaluer l'ordre de grandeur de (9.5) on peut remplacer $(E_b - E_a)$ au numérateur par E_I . Montrer alors que

$$T_{fi}^{(1)} \sim \left(\frac{E_I}{\hbar\omega} \right)^2 \langle \varphi_i | H_I^{(2)} | \varphi_f \rangle. \quad (9.6)$$

Conclure.

Formulaire

• q étant la charge élémentaire (> 0), ε_0 la permittivité du vide, \hbar la constante de Planck divisée par 2π , c la vitesse de la lumière dans le vide et m la masse électronique on note

$$e^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}, \quad r_0 = \frac{e^2}{m c^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}.$$

On appelle r_0 le rayon classique de l'électron ($r_0 = 2,82$ fm) et α la constante de structure fine ($\alpha = 1/137,0$).

• Pour estimer les ordres de grandeur, il est utile de se souvenir que le potentiel d'ionisation de l'atome d'hydrogène est

$$E_I = \frac{e^2}{2a_0} = 13,6 \text{ eV} \quad \text{où} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2} = 0,529 \text{ \AA} \quad \text{est le rayon de Bohr.}$$