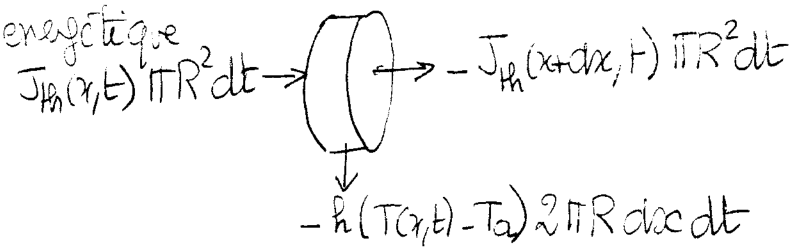
Expérience d'Ingen Housz

on fait le bilan energétique



donc pendant dt on a une variation d'energie de la tranche =

$$dU = \underbrace{J_{th}(x,t)\,\pi R^2 dt}_{\text{ce qui rentre}} - \underbrace{\left\{ J_{th}(x+dx,t)\,\pi R^2 dt + h\,[T(x,t)-T_a]\,2\pi R\,dx\,dt \right\}}_{\text{ce qui sort}}$$

on a également $dU = C\,\dfrac{\partial T}{\partial t}\,dt$ où $C = \mu c\,\pi R^2 dx$ est la capacité calorifique de la tranche.

cela donne : $J_{th}(x,t) - J_{th}(x+dx,t) - h\,[T(x,t)-T_a]\,\dfrac{2\,dx}{R} = \mu c\,dx\,\dfrac{\partial T}{\partial t}$

or $J_{th}(x+dx) - J_{th}(x) = \dfrac{\partial J_{th}}{\partial x}\,\cancel{dx} = -\kappa\,\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dx$ (loi de Fourier)

donc $$\boxed{\kappa\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{R}\,(T(x,t)-T_a) = \mu c\,\frac{\partial T}{\partial t}}$$

2/ régime permanent : $\partial T/\partial t = 0$ on a $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \dfrac{2h}{\kappa R}\,\theta$ où $\theta(x) = T(x) - T_a$

il y a 2 solutions linéairement indépendantes, la seule acceptable =

$$\boxed{\theta(x) = (T_0 - T_a)\,e^{-x/\delta} \quad \text{où} \quad \delta = \left(\frac{\kappa R}{2h}\right)^{1/2}}$$

on a $[\kappa] = M\,L\,\Theta^{-1}\,T^{-3}$ (obtenu avec la loi de Fourier)

$[h] = M\,\Theta^{-1}\,T^{-3}$ (cf. eq (1))

donc $\left[\dfrac{\kappa R}{2h}\right] = L^2$ en accord avec la formule

3/ $T(x) = (T_0 - T_a)\,e^{-x/\delta} + T_a$. $T(x)$ atteint la valeur $T_f = 333\,K$ au point $x = \delta\,\ln\left(\dfrac{T_0 - T_a}{T_f - T_a}\right) \propto \sqrt{\kappa}$

on a donc $\boxed{\dfrac{x_1}{x_2} = \sqrt{\dfrac{\kappa_1}{\kappa_2}}}$ soit $\kappa_2 = \kappa_1 \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = 65{,}6\ W.m^{-1}.K^{-1}$

Congélation de l'eau

1/ ⓐ Q est une quantité positive : $Q = ML$

ⓑ on a :

$$\text{source chaude } T_2 \xrightarrow{q_2} \text{système} \xleftarrow{q} \text{source froide } T_0 \qquad \uparrow w$$

sur un cycle on a : $\Delta U = w + q_2 + q = 0$ = 1^er^ principe

$\Delta S = q_2/T_2 + q/T_0 = 0$ = l'inégalité de Clausius devient une égalité dans le cas réversible

on obtient donc $\boxed{w = q\left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right)}$

ⓒ pour congeler l'eau il faut que le système reçoive de la part de la source froide (l'eau) une quantité de chaleur ML. Il faut donc que le moteur fournisse $W = ML\,(T_2/T_0 - 1)$

et $W = \tau\mathcal{P}$ donc la durée de l'opération est $\boxed{\tau = \frac{ML}{\mathcal{P}}\,\frac{T_2 - T_0}{T_0}}$

A.N. $\tau = \frac{0{,}344\ 10^6\,J}{100\,W} \times \frac{2\overset{15}{\cancel{6}}5}{273} = 3\overset{15}{\cancel{14}}\,s = 5\,mn\ et\ \overset{15}{\cancel{14}}\,s$

2/

$$\text{source chaude } T_2 \xrightarrow{\delta Q_2} \text{système} \xleftarrow{\delta Q} \text{source froide } T \qquad \uparrow \delta W$$

pendant dt on a un nombre entier de cycles donc :

$$\begin{cases} \Delta U = \delta W + \delta Q + \delta Q_2 = 0 \\ \Delta S = \delta Q_2/T_2 + \delta Q/T = 0 \end{cases}$$

donc $\delta W = \delta Q\,\frac{T_2 - T}{T}$ et on a également $\delta Q = -Mc_p\,dT$

d'où $\delta W = -Mc_p\,(T_2 - T)\frac{dT}{T}$ et cela conduit à :

$$W = \int_{T_2}^{T_0} \delta W = Mc_p \int_{T_0}^{T_2} \left(\frac{T_2}{T} - 1\right) dT$$

soit $\boxed{W = Mc_p T_2 \ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right) - Mc_p (T_2 - T_0)}$

cela s'écrit $W = Mc_p T_0\, f(T_2/T_0)$ où $f(x) = x\ln(x) - x + 1$

$f(T_2/T_0) = 4{,}07\ 10^{-3}$

donc $W = 4{,}64\ kJ$

et $t = \frac{W}{\mathcal{P}} = 46\,s$