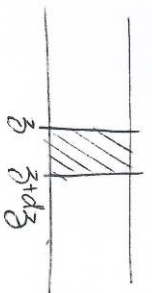


1/ PROBLEME DE STEFAN

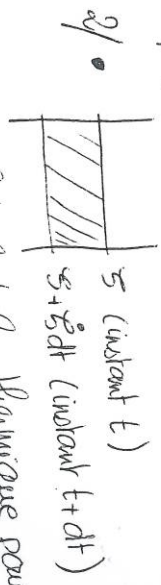
1/  $\vec{j}_R = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_3$

• en regardant une tranche de section S:  
 et on fait le bilan thermique:

$$j_R(z, t) S dt - j_R(z+dz, t) S dt = \delta Q = \rho c S dz \frac{\partial T}{\partial t} dt$$



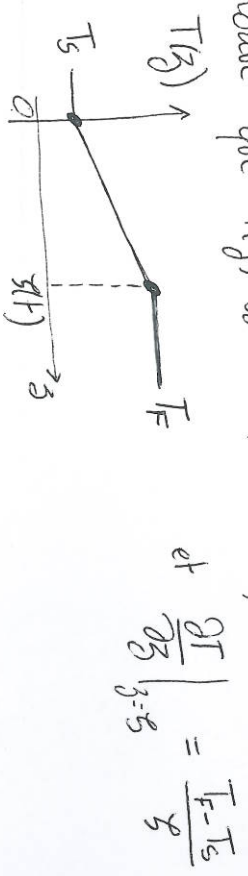
cela donne  $-\frac{\partial j_R}{\partial z} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$   
 qui, combiné à la loi de Fourier conduit à  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$



• si on fait le bilan thermique pour cette même dm on va dire =

$-L \rho \dot{\xi} S dt = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\xi} S dt$  CQFD.  
 cela s'écrit  
 $-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = L \rho \dot{\xi} S$   
 •  $\lambda$  dm = chaleur reçue lors de la solidification à la temp  $T_F$   
 •  $\lambda$  dm = transfert de chaleur par la surface au  $\xi$  (aucun par la surface libre en  $z_0 + \xi dt$  car dans l'eau  $T = T_F$  car  $j_R = 0$ )

3/ on n'a jamais atteint l'état stationnaire (sauf si toute l'eau est gelée) mais on négligeant  $\frac{\partial T}{\partial t}$  dans l'eq. de la chaleur on trouve que  $T(z)$  est une fonction affine entre  $z(1)$  et  $z(2)$



(1)

en reportant dans  $\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = \rho L \dot{\xi}$  cela donne

$\xi \dot{\xi} = \mathcal{D}$  avec  $\mathcal{D} = \lambda (T_F - T_0) / \rho L = 2.18 \cdot 10^7 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

cette équation est facile à intégrer (avec la condition initiale  $\xi(0) = 0$ )

$\xi(t) = \sqrt{2 \mathcal{D} t}$  cela donne:

- 1 jours =  $t = 864 \cdot 10^4 \text{ s}$        $\xi(t) = 19 \text{ cm}$
- 1 semaine       $\xi(t) = 51 \text{ cm}$
- 1 mois (30 jours)       $\xi(t) = 106 \text{ m}$

(2)

**Equilibre liq-vapeur de l'eau**

4

1/  $L_0(T) = (V_0 \cdot v_2) T \frac{dP_2}{dT}$  à la saturation.  $v_2 =$  volume molaire de la vapeur à la saturation =

$$P_0(T) v_2 = \frac{nRT}{n_2 v_2}$$

à  $T_0$  on a  $v_2 = \frac{RT}{v_2 \cdot P_0(T_0)} = 1,792 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \gg v_2 = v_0 = 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$

on a cette  $L_0(T) = C^{SE} = L_0(T_0)$  on peut facilement intégrer la relation de Clapeyron =  $\frac{dP_2}{P_2} = \frac{v_2 L_0(T_0)}{R} \frac{dT}{T^2}$

soit:  $P_2(T) = P_2(T_0) \times \exp \left\{ \frac{v_2 L_0(T_0)}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}$

dans le compartiment du bas on a un mélange eau liquide/eau vapeur donc  $P = P_2(T) = 1,97 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

dans le compartiment supérieur on a:  $P_2(T) = P$  et  $P_2 S_2 \frac{h}{2} = n_2 RT$  et la masse d'air est  $m_A = n_A \times v_A = \frac{P_2 S_2 \cdot h \cdot v_A}{2RT} = 0,04 v_A = 1,16 \text{ g}$

dans le compartiment inférieur on a:  $m_E = P_2 \times dV_2 + \frac{P_2 S_2 \times (h_2 - d)}{RT} = 2 \cdot 10^2 \text{ kg} + 0,039 v_E$

or  $x = \frac{m_E (\text{vapeur})}{m_E} = 0,034$

3/ si toute l'eau est liquide l'air aura un volume disponible!

\* si toute l'eau est sous forme vapeur on aura

$P V'_E = \frac{m_E}{v_E} RT$   $P V'_A = \frac{m_A}{v_A} RT$  et  $V'_E + V'_A = S_2 h$

cela donne  $P = \left( \frac{m_E}{v_E} + \frac{m_A}{v_A} \right) \frac{RT}{S_2 h} = 23,9 \text{ bar}$

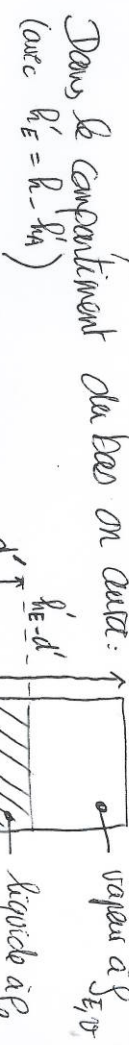
5

plus que la pression de vapeur saturante à la température  $T' = 380 \text{ K}$  est selon la formule (2):  $P_2(T') = 1,76 \text{ bar}$ .

on ne peut pas avoir de vapeur à cette pression supérieure à la pression de vapeur saturante donc toute l'eau n'est pas sous forme vapeur.

(b) on a donc la pression d'équilibre  $P_2(T') = 1,76 \text{ bar}$  et par l'air  $P_2(T') \cdot S_2 \frac{h'_2}{v_A} = \frac{m_A}{v_A} RT$  on obtiens  $h'_2 = 74 \text{ cm}$

(c) à  $T'$  la même température de la vapeur d'eau est  $P_{E,0} = \frac{P_2(T') v_E}{RT}$  cela donne  $P_{E,0} = 0,98 \text{ kg m}^{-3}$

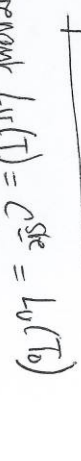


Dans le compartiment du bas on a:  $P_2 \times d' \times S + P_{E,0} \times S_2 \times (h - h'_2 - d') = m_E$

soit  $d' = \frac{1}{P_2 - P_{E,0}} \times \left[ \frac{m_E}{S} - P_{E,0} \times (h - h'_2) \right] = 1,95 \text{ mm}$

cela permet de calculer le titre en vapeur d'eau =  $x' = \frac{m_E - P_{E,0} d' S}{m_E}$  on trouve  $x' = 0,058$

(d) pour calculer  $\Delta S$  on fait le parcours suivant:



on prend  $L_0(T) = C^{SE} = L_0(T_0)$

je trouve  $\Delta S_I = 4,15 \text{ JK}^{-1}$

$\Delta S_{II} = 2,25 \text{ JK}^{-1}$

$\Delta S_{III} = 6,90 \text{ JK}^{-1}$

\*  $\Delta S_I = \frac{-2m_E L_0(T)}{2m_E d}$  on condense une masse  $2m_E$  de gaz

\*  $\Delta S_{II} = m_E C_{v,l} \ln \left( \frac{T'}{T} \right)$  on réchauffe à volume  $v$  la vapeur

\*  $\Delta S_{III} = \frac{2m'_E L_0(T')}{T'}$  on vaporise une masse  $2m'_E$  de liquide à la temp  $T'$