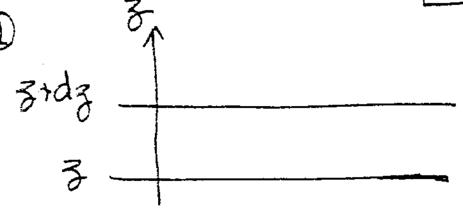
Etude de l'atmosphère

① 

équilibre de la tranche d'air :

$$\underbrace{(P+dP)S}_{\text{pression exercée en } z+dz} + \underbrace{mg\, n_v(z)\, dz\, S}_{\text{poids de la tranche}} = \underbrace{P \times S}_{\text{force de pression en } z}$$

donc $\boxed{dP = -mg\, n_v(z)\, dz}$ (1)

② question de cours : évol. adiabatique réversible : $PV^\gamma = C^{\underline{\underline{ste}}}$. On a $V = \dfrac{nRT}{P}$

donc la relation de Laplace entre T et P s'écrit : $P^{1-\gamma} T^\gamma = C^{\underline{\underline{ste}}}$

sa forme différentielle est :

$$\boxed{(1-\gamma)\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0} \quad (2)$$

③ l'équation d'état des gaz parfaits donne $P(z) = n_v(z)\, k_B T(z)$

donc dans l'éq. (2) on a $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{mg\, n_v(z) dz}{n_v(z)\, k_B T}$

$$= -\frac{mg\, dz}{k_B T} = -\frac{\mathcal{M} g\, dz}{RT}$$

en reportant dans l'éq. (2) cela donne $\boxed{\dfrac{dT}{dz} = -\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{\mathcal{M}g}{R}}$

AN : $\dfrac{dT}{dz} = -\dfrac{0.42}{1.42}\,\dfrac{28.9\, 10^{-3} \times 9.81}{8.314}$ K/m $\simeq 10$ K.km^{-1} ce qui est très raisonnable.

④ $\dfrac{dT}{dz}$ est une constante, donc $T(z)$ est une fct affine de la forme :

$T(z) = T_0(1-\alpha z)$ avec $T_0 = T(z=0)$ et $\boxed{\alpha = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{\mathcal{M}g}{RT_0}}$

on a $(1-\gamma)\dfrac{dP}{P} = -\gamma\dfrac{dT}{T} = -\gamma\,\dfrac{-\alpha T_0\, dz}{T_0(1-\alpha z)}$

soit $(\gamma-1)\dfrac{dP}{P} = \gamma\,\dfrac{-\alpha\, dz}{1-\alpha z}$ en intégrant : $\ln P^{\gamma-1} = \ln[(1-\alpha z)^\gamma] + C^{\underline{\underline{ste}}}$

soit $P(z) = C^{\underline{\underline{ste}}} \times (1-\alpha z)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ et la constante est évidemment $P(z=0) = P_0$ soit 10^5 Pa approximativement

donc $\boxed{P(z) = P_0(1-\alpha z)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$

lorsque $z = \dfrac{1}{\alpha}$ on a $T=0$ et $P=0$ c'est le vide.

d'où épaisseur de l'atmosphère :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\gamma R T_0}{(\gamma-1)\mathcal{M}g} \simeq 30 \text{ km}$$

2d problème

1/ l'énoncé de Kelvin du 2^{d} principe répond à cette question : un moteur mono-thermne est impossible. En effet sur un cycle : $\Delta U = 0 \Rightarrow W = -Q$
et on a $0 = \Delta S \geq \frac{Q}{T_S}$ (inégalité de Clausius) donc $W \geq 0$: le travail reçu par le système est positif : ce n'est pas un moteur

2/ on a un nbre de mole $n = \frac{1g}{29g} = 1/29$

a) alors • $T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{10^6 Pa \times 8\,10^{-5} m^3}{8{,}314} \times 29 \simeq 290\,K$ (en fait 279 K)

• AC étant une adiabatique réversible on a $P_A V_A^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma}$
donc $V_C = \left(\frac{P_A}{P_C}\right)^{1/\gamma} V_A = 0{,}414\,l$ on en déduit $T_C = \frac{P_C V_C}{nR}$

soit $T_C = \frac{10^5 Pa \times 0.414\,10^{-3} m^3}{8{,}314\ JK^{-1}} \times 29 = 144\,K$

• $V_B = V_C = 0{,}414\,l$ $T_B = T_A = 279\,K$
donc $P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{1}{29}\,\frac{8{,}314 \times 279}{0{,}414\,10^{-3}} = 1{,}93\,10^5 Pa = 1{,}93$ bar

b/ sur l'isotherme AB : comme on a un gaz parfait $\Delta U_{AB} = 0$ donc
$$Q_{AB} = -W_{AB} = \int_A^B P dV = nRT_A \int_A^B \frac{dV}{V}$$
$$= \underbrace{nRT_A}_{P_A V_A} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

donc $Q_{AB} = -W_{AB} = 10^6 Pa \times 8\,10^{-5} m^3 \times \ln\left(\frac{0{,}414}{0{,}08}\right)$
$= +131{,}5\,J$ (le signe est bien celui auquel on s'attend : $W_{AB} < 0$)

sur l'adiabatique CA : on a $Q_{CA} = 0$ et $W_{CA} = -\int_C^A P dV$
le long de l'adiabatique $PV^{\gamma} = C^{ste} = P_A V_A^{\gamma}$
donc
$$W_{CA} = -P_A V_A^{\gamma} \int_C^A \frac{dV}{V^{\gamma}} = \frac{P_A V_A^{\gamma}}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{V^{\gamma-1}}\right]_C^A = \frac{P_A V_A}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1}\right)$$

soit $W_{CA} = \frac{10^6 P_A \times 8\,10^{-5} m^3}{0{,}4} \times \left(1 - \left(\frac{0.08}{0.414}\right)^{0.4}\right) = 96{,}4\,J$

autre méthode de calcul : ici $W_{CA} = \Delta U_{CA} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_A - T_C) = +96{,}7\,J$

[égal au précédent modulo les erreurs d'arrondi.]

sur l'isochore BC : il est clair que $W_{BC} = 0$ donc

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_A) = -W_{CA} = -96{,}4 \text{ J}$$

c/ • on a reçu en travail total : $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = W_{AB} + W_{CA}$

une quant. de chaleur $Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = Q_{AB} + Q_{BC}$

• on a vu que $W_{AB} = -Q_{AB}$ et que $Q_{BC} = -W_{CA}$ donc on a bien $W + Q = 0$ comme l'impose le 1er principe.

• on a $W = W_{AB} + W_{CA} = -131{,}5 \text{ J} + 96{,}4 \text{ J} = -35{,}1 \text{ J}$

donc on a $W < 0$ = le cycle est moteur. On pouvait prévoir le signe de W car un cycle parcouru dans le sens

dans le diagramme de Clapeyron est tjs moteur (cf. cours)

d/ on a $W < 0$ = cycle moteur, mais il n'est pas monotherme = le passage de $B \to C$ correspond à un refroidissement isochore réversible et nécessite une infinité de sources successives à des températures $T_B, T_B - \varepsilon \dots T_C$

3/ ici le cycle est parcouru dans le sens récepteur, mais la transition $C \to B$ n'est plus réversible : il ne peut y avoir à chaque instant équilibre entre la temp. de la source (à T_B fixée) et celle du gaz (dont T varie de T_C à T_B).

a/ ici on a néanmoins $W_{CB}^{ir} = 0$ donc $Q_{CB}^{ir} = U_B - U_C = -Q_{BC}$ calculé précédemment.

et pour les transf. $A \to C$ et $B \to A$ rien ne change par rapport à tout à l'heure = seul le signe est à chaque fois modifié.

donc ici $W = +35{,}1 \text{ J}$ et $Q = -35{,}1 \text{ J}$

b/ on a $\Delta S = \int_C^B \frac{\delta Q_{rev}}{T}$ le chemin réversible entre C et B correspond à une isochore avec égalité à chaque instant entre T et T_{source} (T_S variant de T_B à T_C).

Et alors $\delta Q_{rev} = C_V \, dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$

donc $\Delta S_{CB} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right) = 0{,}474 \text{ JK}^{-1}$

la source a dans le même temps échangé $Q_S = -Q_{CB}^{ir} = -96{,}4 \text{ J}$

et donc $\Delta S_{source} = \frac{Q_S}{T_B} = -0{,}346 \text{ JK}^{-1}$ (car ici $dS_{source} = \frac{dU_{source}}{T_S}$)