Diverses détentes adiabatiques

1/ on passe de l'état initial (énergie interne U_0) $\longrightarrow$ état final à $T = 0K$ (énergie interne nulle)

$$\Delta U = -U_0 = W + Q$$

$Q = 0$ car adiabatique
$W =$ travail reçu $= -U_0$

donc le travail fourni est $W_f = -W = +U_0$
on ne peut pas faire mieux.

2/ détente adiabatique réversible = isentropique. La loi de Laplace s'écrit : $P\left(\frac{T}{P}\right)^{\gamma} = C^{ste}$ soit $\boxed{\frac{T_1}{T_0} = \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$ ici $\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

on a ici $\Delta U = W + \underbrace{Q}_{\text{nul}}$ donc le travail fourni par le gaz est $W_f = U_0 - U = \frac{R}{\gamma-1}(T_0 - T_1)$
(et bien-sûr $\Delta S = 0$)

<u>AN</u>: $T_1 = 398\,K$
$W_f = 7{,}51\,kJ$

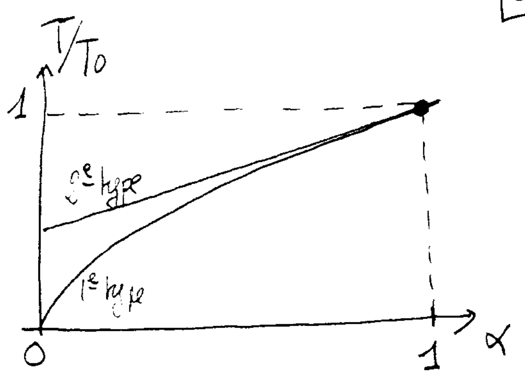
3/ on a tjs $Q = 0$ et $\Delta U = W$ ici $\begin{cases} W = -P_f \Delta V = -P_f\left(\frac{RT_2}{P_f} - \frac{RT_0}{P_0}\right) \\ \text{et} \\ \Delta U = \frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_0) \end{cases}$

cela donne $\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right) = -\frac{T_2}{T_0} + \alpha$ d'où : $\boxed{\frac{T_2}{T_0} = \frac{1}{\gamma}\left[1 + \alpha(\gamma - 1)\right]}$

d'où $T_2 = 640\,K$
$W_f = U_0 - U_2 = 4{,}49\,kJ$

- on écrit $C_p\,dT = dH = TdS + VdP$ où ici $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$ $(n=1)$
donc $dS = \frac{C_p}{T}dT - R\frac{dP}{P}$ et $\left[\begin{array}{l} \Delta S = S_f - S_0 = \underbrace{\frac{\gamma R}{\gamma-1}}_{\frac{5R}{2}} \ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right) - R\ln(\alpha) \\ \text{soit } \Delta S = 9{,}87\ J.K^{-1} \end{array}\right.$

- on a le graphe :



pour le m^ "taux de dépression" α la détente réversible conduit à une temp finale < celle obtenue avec la détente de 2e type. C'est plus avantageux = W_f est plus grand on prend $\quad P_0, T_0 \longrightarrow \sqrt{P_0 P_f}, T_i \longrightarrow P_f, T_3$

on a alors : $\quad T_i = \frac{T_0}{\gamma}\left[1+(\gamma-1)\sqrt{\alpha}\right]$ et $T_3 = \frac{T_i}{\gamma}\left[1+(\gamma-1)\sqrt{\alpha}\right]$

pour chacune des deux sous-transformations on a $\frac{\sqrt{P_0 P_f}}{P_0} = \frac{P_f}{\sqrt{P_0 P_f}} = \sqrt{\alpha}$

donc $T_3 = \frac{T_0}{\gamma^2}\left[1+(\gamma-1)\sqrt{\alpha}\right]^2$

cela donne : $T_3 = 528\,K$ et $W_f = U_0 - U_3 = 5{,}89\,kJ$

et $\Delta S = \frac{5R}{2}\ln\left(\frac{T_3}{T_0}\right) - R\ln(\alpha) = 5{,}87\ J.K^{-1}$

5/ ici on a clairement $\frac{T_4}{T_0} = \left[\frac{1+(\gamma-1)\alpha^{1/n}}{\gamma}\right]^n$

- on a $\alpha^{1/n} = \exp\left[\frac{1}{n}\ln(\alpha)\right] \simeq 1 + \frac{1}{n}\ln\alpha$ lorsque $n \to 0$

puis $\ln\left(\frac{T_4}{T_0}\right) = n\ln\left[1/\gamma + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\alpha^{1/n}\right] \simeq n\ln\left[1+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{n}\ln\alpha\right]$

$\simeq \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ln\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}\ln\alpha$

d'où finalement $\frac{T_4}{T_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha^{\gamma-1/\gamma} = 0{,}398$

on retrouve le cas adiabatique reversible comme une succession de transf. irreversibles infinitésimales

- pour $n=5$ on a $T_4 = 450\,K$ et pour $n=10$, $T_4 = 424\,K$.