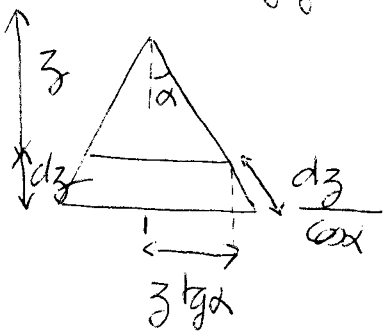
Hydrostatique

① $P_0 = P_{atm} + \rho g H$ et $P(z) = P_0 + \rho g z$

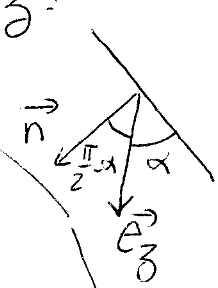


l'aire dS vaut $2\pi z \,\mathrm{tg}\alpha \times \dfrac{dz}{\cos\alpha} + O(dz^2)$

$d\vec{F}$ est clairement verticale et dirigée vers le bas avec :

$$d\vec{F} = P(z) \times dS \times \underbrace{\sin\alpha \,\vec{e_z}}_{}$$

projection de la normale à la surface sur $\vec{e_z}$:



ensuite il suffit d'intégrer :

$\vec{F} = F\,\vec{e_z}$ avec

$$F = \int_0^h P(z)\, dS \sin\alpha = 2\pi(\mathrm{tg}\alpha)^2 \int_0^h z(P_0 + \rho g z)\,dz$$

soit $F = 2\pi(\mathrm{tg}\alpha)^2 \left[P_0 \dfrac{h^2}{2} + \rho g \dfrac{h^3}{3}\right] = S\left(P_0 + \dfrac{2}{3}\rho g h\right)$

où $S = \pi h^2 (\mathrm{tg}\alpha)^2$ est l'aire de la base du cône.

c'est la formule (1) de l'énoncé.

② l'équilibre mécanique du fluide contenu dans le cône s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{pression} + \rho V g \vec{e_z} - R\,\vec{e_z} = 0 \qquad \text{où } V = S\frac{h}{3}$$

on peut donc écrire $\sum \vec{F}_{pression} = F\,\vec{e_z}$

avec $F = R - S\rho g \dfrac{h}{3}$

il est clair que $R = S\,P(h) = S(P_{atm} + \rho g (H + h))$

d'où

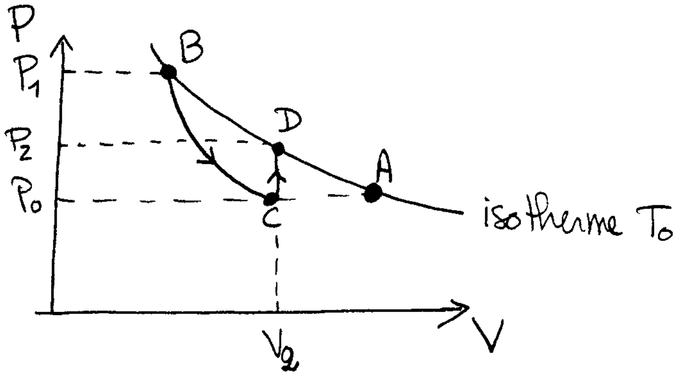
$$F = S\left(P_{atm} + \rho g H + \frac{2}{3}\rho g h\right)$$

c'est de nouveau la formule (1) de l'énoncé.

$\boxed{\text{Clement et Desormes}}$

$$\begin{matrix} n_0 \text{ moles} \\ P_0\, V_0\, T_0 \end{matrix} \xrightarrow[\text{isotherme}]{\text{compres.}} \begin{matrix} n_0\ P_1 \\ V_1\ T_0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{fuite}} \begin{matrix} n_1\ P_0 \\ V_2\ T_2 \end{matrix} \xrightarrow[\text{-lisation}]{\text{therma-}} \begin{matrix} n_1\ P_2 \\ V_2\ T_0 \end{matrix}$$

1) on a :



2) • le long de $B \to C$, les n_1 molecules qui restent dans l'enceinte subissent une transf. adiabatique réversible = $P\left(\frac{T}{P}\right)^\gamma = C^{ste}$

donc $P_1\left(\frac{T_0}{P_1}\right)^\gamma = P_0\left(\frac{T_2}{P_0}\right)^\gamma$

• lorsqu'on va de $C \to D$ la conservation du volume et du nbre de moles implique = $\frac{P_0}{T_2} = \frac{P_2}{T_0}$

• en combinant ces 2 eqs on obtient $P_1\left(\frac{T_0}{P_1}\right)^\gamma = P_0\left(\frac{T_0}{P_2}\right)^\gamma$

soit $\boxed{\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^\gamma}$

3) soit ρ la masse volumique du mercure j'écris $\left[\begin{array}{l} P_1 = P_0 + \rho g h_1 \\ P_2 = P_0 + \rho g h_2 \end{array}\right.$

alors :

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\rho g h_1}{P_0}\right) \simeq \frac{\rho g h_1}{P_0}$$

$$\ln\left[\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^\gamma\right] = \gamma \ln\left(\frac{1 + \rho g h_1/P_0}{1 + \rho g h_2/P_0}\right) \simeq \gamma\, \frac{\rho g (h_1 - h_2)}{P_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}}$$

4/ pour N_2 cela donne $\gamma = \frac{4{,}0}{4{,}0 - 1{,}1} \simeq 1{,}38$ (valeur théor. pour gaz di-atomique : $\gamma = 1{,}4$)

Machine Tritherme

- le cycle est décrit sans travail :

$$\begin{cases} 0 = \Delta U = Q_1 + Q_2 + Q_3 & \text{(1}^{\text{er}}\text{ principe)} \\ 0 = \Delta S \geqslant \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \end{cases}$$

(inégalité de Clausius)

- on a $Q_1 > 0$ par construction

- dans la 1$^{\text{re}}$ éq. on a $Q_2 = -(Q_1 + Q_3)$ en reportant dans l'inégalité de Clausius cela donne :

$$\boxed{Q_3 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3} \right) \geqslant \underbrace{Q_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)}}$$

comme $T_2 > T_1$ et $Q_1 > 0$ ce terme est strictement positif

d'où $Q_3 \times \frac{T_3 - T_2}{T_2 T_3} \geqslant 0$ et donc comme $T_3 > T_2$ il est clair que $Q_3 \geqslant 0$.

- donc $\eta = \frac{Q_1}{|Q_3|} = \frac{Q_1}{Q_3}$ avec l'inégalité encadrée ci-dessus cela donne :

$$\boxed{\eta = \frac{Q_1}{Q_3} \leqslant \eta_c = \frac{T_3 - T_2}{T_2 T_3} \times \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}}$$

l'égalité de Clausius est atteinte pour un fonctionnement réversible d'après le cours. Dans ce cas on obtient donc $\eta = \eta_c$

$$\eta_c = \underbrace{\frac{T_3 - T_2}{T_3}}_{\substack{\text{efficacité de Carnot} \\ \text{d'un moteur fonction-} \\ \text{-nant entre } T_3 \text{ et } T_2}} \times \underbrace{\frac{T_1}{T_2 - T_1}}$$

efficacité de Carnot d'un réfrigérateur fonctionnant entre T_2 et T_1 =

on peut donc analyser cette machine comme le produit de 2 machines dithermes non isolées : (i) un moteur entre T_2 et T_3 qui utilise Q_3 pour produire un travail W et (ii) un frigo entre T_1 et T_2 qui utilise W pour soutirer Q_1 à la source froide.