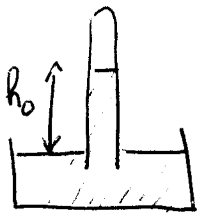
Expérience de Mariotte

1/ on remplit un tube de mercure, on le bouche, on le retourne dans un bassin de mercure puis on enlève le bouchon. On observe alors :



on a clairement $P_0 = \rho g h_0$

cela donne $h_0 = \dfrac{P_0}{\rho g} = \dfrac{1{,}013\ 10^5}{13600 \times 9{,}81} = 0{,}76\ m$

2/ on a la même quantité d'air au début et à la fin de l'expérience. Soit P sa pression à la fin de l'expérience (initialement elle valait P_0) on a (éq. d'état des gaz parfaits)

$$\frac{P_0 L}{RT} = \frac{P L'}{RT}$$

et l'hydrostatique implique $P_0 = P + \rho g h'$

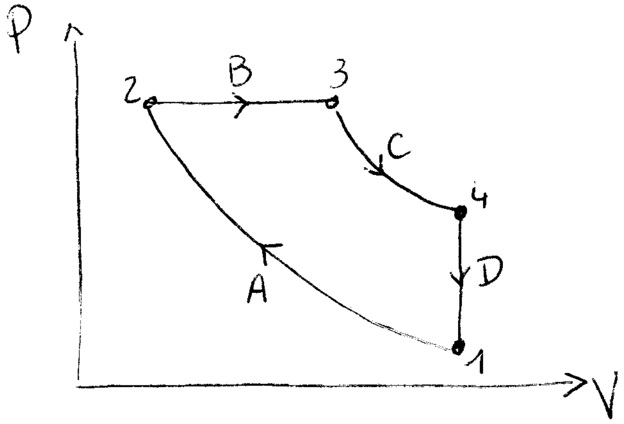
la première relation implique $P = \rho g \dfrac{h_0 L}{L'}$

en reportant dans la seconde on obtient $h_0 = h_0 \dfrac{L}{L'} + h'$

soit $\dfrac{h_0}{h'}\left(1 - \dfrac{L}{L'}\right) = 1$ ou encore $\dfrac{L}{L'} + \dfrac{h'}{h_0} = 1$

3/ lorsqu'on retourne le tube, le mercure a tendance à sortir et l'air a un volume qui augmente et une pression qui diminue. Il est difficile a priori d'évaluer comment va évoluer le produit PV ($= nRT$). Pour cela il vaut mieux raisonner ainsi : $\Delta U = W + Q$. Comme on retourne assez vite $Q = 0$. Et $W = -\int P_{ext}\, dV$ est clairement négatif. Donc $\Delta U = C_v \Delta T$ est négatif, donc comme nous l'indiquait peut-être notre intuition, la détente initiale est certainement associée à une (légère) baisse de température. Ensuite, le contact du tube avec l'air ambiant (qui fait office de thermostat) ramène la température de l'air dans la colonne à la valeur ambiante

Cycle DIESEL



$V_1 = a\, V_2$

$V_4 = b\, V_3$

$\begin{pmatrix} a = 9 & a^\gamma = 21{,}6740 \\ b = 3 & b^\gamma = 4{,}6555 \end{pmatrix}$

* transf. A = $V_2 = V_1/a$ $\quad PV^\gamma = C^{ste}$ donc $P_2 = a^\gamma P_1$

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{R} = a^{\gamma-1}\, T_1$$

* transformation B = $P_3 = P_2 = a^\gamma P_1$ $\quad V_3 = V_4/b = V_1/b$

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{R} = \frac{a^\gamma}{b}\, T_1$$

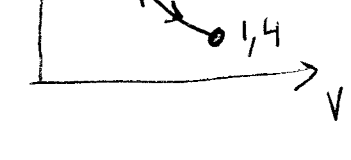
* transformation C = $V_4 = V_1$ $\quad P_4 V_4^\gamma = P_3 V_3^\gamma$ donc $P_4 = \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma P_1$

puis $T_4 = \dfrac{P_4 V_4}{R} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\gamma T_1$

cela conduit au tableau de résultats suivant (résultats avec 4 chiffres significatifs)

(i)	(1)	(2)	(3)	(4)
P_i [bar]	1,0	21,67	21,67	4,656
T_i [K]	300	722,5	2167	1397
V_i [l]	24,94	2,771	8,314	24,94

<u>remarque</u> : si $b = a$ alors les états 2 et 3 sont identiques et 1 et 4 également. On a juste le schéma =



Donc pas de travail (ni de chaleur) reçu sur un cycle.

<u>échanges avec l'extérieur :</u> (on utilisera $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$ et $C_P = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$)

* transf. A : $Q_A = 0$

$$W_A = U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1) = \frac{R}{\gamma-1}(a^{\gamma-1} - 1)T_1$$
$$= 8{,}781 \text{ kJ}$$

* transf. B : $W_B = -P_2(V_3 - V_2) = -a^\gamma P_1\left(\frac{V_1}{b} - \frac{V_1}{a}\right) = -a^\gamma\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)RT_1$

$$W_B = -12{,}01 \text{ kJ}$$

et $Q_B = C_P(T_3 - T_2) = \frac{\gamma}{\gamma-1} a^\gamma\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)RT_1$

$$= 42{,}05 \text{ kJ}$$

* transf. C : $Q_C = 0$

$$W_C = U_4 - U_3 = C_V(T_4 - T_3) = \frac{a^\gamma}{\gamma-1}\left[\frac{1}{b^\gamma} - \frac{1}{b}\right]RT_1$$
$$= -16{,}02 \text{ kJ}$$

* transf. D : $W_D = 0$

$$Q_D = C_V(T_1 - T_4) = \frac{1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right]RT_1 = -22{,}79 \text{ kJ}$$

on a $W_A + W_B + W_C + W_D < 0$: le cycle est moteur (si on connaît son cours on le voit d'après son sens de parcours)..

l'efficacité d'un moteur est $\eta = \frac{W_{fourni}}{Q_{reçue}}$

il est clair que $Q_{reçue} = Q_B$

et donc $W_{fourni} = -(W_A + W_B + W_C + W_D)$

soit $$\eta = \frac{-\frac{1}{\gamma-1}(a^{\gamma-1} - 1) + a^\gamma(1/b - 1/a) - \frac{a^\gamma}{\gamma-1}(1/b^\gamma - 1/b)}{\frac{\gamma}{\gamma-1} a^\gamma(1/b - 1/a)}$$

pour faire le calcul explicite il est plus commode d'écrire $W_{fourni} = Q_B + Q_D$ (avec le 1er principe) (3)

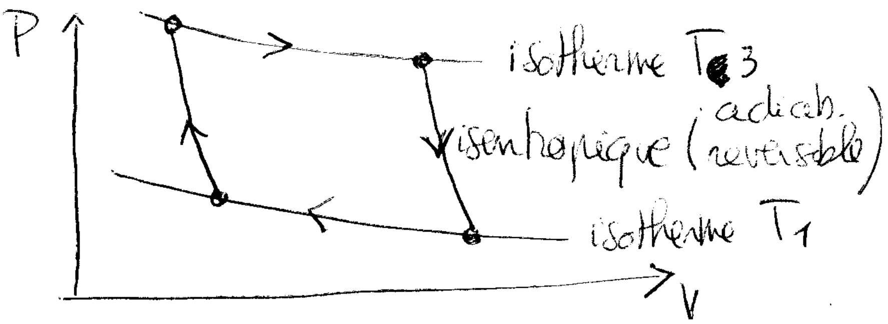
et alors $$\eta = 1 + \frac{Q_D}{Q_B} = 1 + \frac{\frac{1}{\gamma-1}\left[1-(a/b)^\gamma\right]}{\frac{\gamma}{\gamma-1}a^\gamma(1/b - 1/a)}$$

$$\boxed{\text{soit } \eta = 1 - \frac{a^\gamma - b^\gamma}{\gamma(ab)^{\gamma-1}(a-b)}}$$

on trouve $\eta = 0,458$

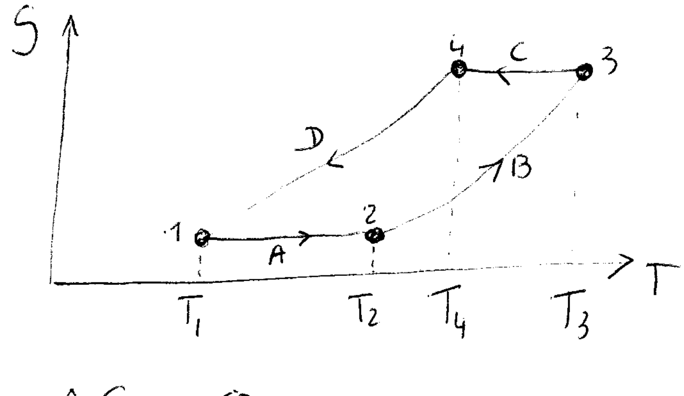
[le calcul direct donne le même résultat] $\rightarrow \eta = 1 - \frac{22,79}{42,05} = 0.458$

(d) Cycle de Carnot :



$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{b}{a^\gamma} = 0,862$$

5/ cycle Diesel dans le diagramme (T,S) :



pour un GP:
$$dS = \frac{C_v}{T}dT + \frac{P}{T}dV$$
et
$$\Delta S = nR \ln\left[\left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \times \left(\frac{V_f}{V_i}\right)\right]$$

$$\Delta S_A = \Delta S_C = 0$$

$$\Delta S_B = nR \ln\left[\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{V_3}{V_2}\right] = \underbrace{nR\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}_{32\ J.K^{-1}} = -\Delta S_D$$