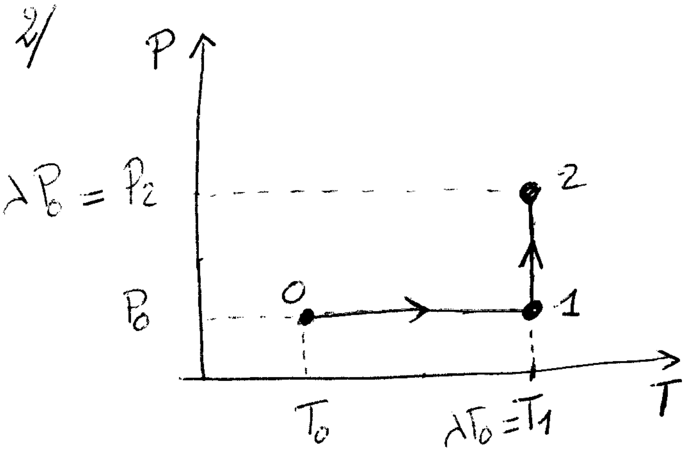
EXAMEN de THERMO ($2^{ème}$ session)

(I) 1/ $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P > 0$ et $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T > 0$.

2/



3/ a/ le long du trajet $0 \to 1$ le solide reçoit $W_1 = -\int_{\text{etat}0}^{\text{etat}1} P\,dV$ ($P_{ext} = P$ car reversible)

donc $W_1 = -P_0(V_1 - V_0)$

or $V_1 - V_0 \simeq \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (T_1 - T_0) = \alpha V_0 T_0 (\lambda - 1)$ et $W_1 = -(\lambda - 1)\alpha P_0 V_0 T_0$

le long du trajet $1 \to 2$ on a $W_2 = -\int_{\text{etat}1}^{\text{etat}2} P\,dV$

le le long de ce trajet :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP \simeq -V_0 \chi_T \, dP \quad \text{et} \quad W_2 = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) V_0 \chi_T P_0^2$$

b/ si on suit la trajectoire de l'espace des etats allant directement de l'etat 0 à l'etat 2 on reçoit un travail :

$$W_3 = -\int_{\text{etat}0}^{\text{etat}2} P\,dV$$

avec $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP = \alpha V_0 \, dT \cancel{+} - \chi_T V_0 \, dP$

et le long de la droite on a $P/P_0 = T/T_0$ donc $dT = \frac{T_0}{P_0} dP$

d'où

$$W_3 = -\int_{P_0}^{P_2 = \lambda P_0} P\left(\alpha V_0 \frac{T_0}{P_0} - \chi_T V_0\right) dP = V_0 P_0 \left(\chi_T P_0 - \alpha T_0\right) \frac{\lambda^2 - 1}{2}$$

à comparer à

$$W_1 + W_2 = P_0 V_0 \left\{ \frac{\lambda^2 - 1}{2} P_0 \chi_T - (\lambda - 1)\alpha T_0 \right\}$$

on a $W_3 \lessgtr W_1 + W_2$ car $\frac{\lambda^2 - 1}{2} > \lambda - 1$

(II) 1/ la chaleur $C_p(T_1 - T_0)$ (où $C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$ avec $n = 1$ et $\gamma = 7/5$) reçue par l'air est ~~utilisée pour~~ prise à l'eau dont une partie se solidifie. Soit M la masse d'eau qui se solidifie, on a :

$$C_p(T_1 - T_0) = ML \quad \text{où} \quad C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} = 29{,}1 \ \mathrm{J.K^{-1}}$$

Soit $M = \frac{1}{L} C_p (T_1 - T_0) = 0{,}732 \ \mathrm{kg}$

2/ $\Delta S_{air} = C_p \ln\left(T_1/T_0\right)$
$= 10.5 \ \mathrm{J.K^{-1}}$

(cela se voit en posant $dH = TdS + VdP$ soit $dS = \frac{dH}{T} + \underbrace{\frac{V}{T} dP}_{\text{nul ici}}$ et $dH = C_p \, dT$)

$$\Delta S_{eau} = -\frac{ML}{T_1}$$

$$= -C_p \frac{T_1 - T_0}{T_1} = -8.85 \ \mathrm{J.K^{-1}}$$

en posant $x = T_0/T_1$

$$\Delta S_{tot} = C_p \ln\left(\frac{1}{x}\right) - C_p(1 - x) = C_p \underbrace{\left\{(x - 1) - \ln x\right\}}_{\text{clairement} > 0} > 0$$

$= 1{,}65 \ \mathrm{J.K^{-1}}$

Machine Tritherme

- le cycle est décrit sans travail : $\begin{cases} 0 = \Delta U = Q_1 + Q_2 + Q_3 & \text{(1}^{\text{er}}\text{ principe)} \\ 0 = \Delta S \geqslant \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \end{cases}$

  (inégalité de Clausius)

- on a $Q_1 > 0$ par construction

- dans la 1ère éq. on a $Q_2 = -(Q_1 + Q_3)$ en reportant dans l'inégalité de Clausius cela donne :

$$\boxed{Q_3\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right) \geqslant \underbrace{Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}_{\text{comme } T_2 > T_1 \text{ et } Q_1 > 0 \text{ ce terme est strictement positif}}}$$

d'où $Q_3 \times \frac{T_3 - T_2}{T_2 T_3} \geqslant 0$ et donc comme $T_3 > T_2$ il est clair que $Q_3 \geqslant 0$.

- donc $\eta = \frac{Q_1}{|Q_3|} = \frac{Q_1}{Q_3}$ avec l'inégalité encadrée ci-dessus cela donne :

$$\boxed{\eta = \frac{Q_1}{Q_3} \leqslant \eta_c = \frac{T_3 - T_2}{T_2 T_3} \times \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}}$$

l'égalité de Clausius est atteinte pour un fonctionnement réversible d'après le cours. Dans ce cas on obtient donc $\eta = \eta_c$

$$\eta_c = \underbrace{\frac{T_3 - T_2}{T_3}}_{\text{efficacité de Carnot d'un moteur fonctionnant entre } T_3 \text{ et } T_2} \times \underbrace{\frac{T_1}{T_2 - T_1}}_{\text{efficacité de Carnot d'un réfrigérateur fonctionnant entre } T_2 \text{ et } T_1}$$

on peut donc analyser cette machine comme le produit de 2 machines dithermes non isolées : (i) un moteur entre T_2 et T_3 qui utilise Q_3 pour produire un travail W et (ii) un frigo entre T_1 et T_2 qui utilise W pour soutirer Q_1 à la source froide.