

Chapitre III

Transition vers le Chaos dans les Systèmes Hamiltoniens

Table des matières

	III.6.2 Disparition du dernier tore de KAM	12
	Résumé	
III Transition vers le Chaos dans les Systèmes Hamiltoniens		1
III.1 Systèmes à une fréquence		1
III.1.1 Les petites oscillations et l'existence d'harmoniques		1
III.1.2 Evolution de la période d'oscillation		2
III.1.3 Structure d'une résonance		3
III.2 Systèmes à deux fréquences		4
III.2.1 Boussole soumise à deux champs		4
III.2.2 Le pendule paramétrique		5
III.2.3 Le mapping standard		5
III.2.4 Critère de stochasticité		5
III.3 Section de POINCARÉ		6
III.3.1 Stroboscopie des trajectoires		6
III.3.2 Coupe de POINCARÉ		6
III.3.3 Allure d'une coupe de POINCARÉ de la boussole		7
III.4 Trajectoires passantes		7
III.4.1 Accrochage 1/2		8
III.4.2 Le spectre de la vitesse		9
III.4.3 Nombre de rotation rationnel		9
III.4.4 Tores de K.A.M.		9
III.5 Trajectoires appartenant à une résonance		9
III.5.1 Résonances secondaires		10
III.5.2 Hiérarchie des résonances		10
III.5.3 Disparition d'une résonance par doublement de période		11
III.6 Stochasticité à grande échelle		11
III.6.1 Allure de l'espace des phases		11

Nous nous proposons ici de décrire l'apparition du chaos dans les *systèmes conservatifs*. Grâce aux études approfondies dont ils ont été les objets, il est possible d'en faire une approche en perturbations. C'est-à-dire, partant d'un système intégrable n'ayant que des solutions régulières, on ajoute une perturbation pondérée par un facteur ϵ et l'on étudie l'apparition des trajectoires chaotiques lorsque l'on augmente ϵ . Nous verrons que dès que la perturbation est suffisamment forte, la structure de l'espace des phases devient très riche. La justification rigoureuse de cette structure dépasse le cadre de notre exposé, mais sa description nous permettra d'introduire des concepts pratiques. Par ailleurs, l'esthétique de l'espace des phases justifie presque à elle seule sa présentation.

III.1 Systèmes à une fréquence

Revenons d'abord sur les exemples réguliers de la particule dans un potentiel à deux puits et du pendule pesant, afin de faire ressortir certains aspects fondamentaux des systèmes non-linéaires, dont les rôles sont cruciaux en présence de trajectoires chaotiques. Particulièrement, l'importance des harmoniques et la notion de résonance.

III.1.1 Les petites oscillations et l'existence d'harmoniques

La particule dans un potentiel à deux puits permet d'illustrer une méthode de perturbation des trajectoires pour les petites oscillations.

La force agissant sur la particule a la forme : $f(q) = q - q^3$; les petites oscillations ont lieu près des deux points d'équilibre stables caractérisés par $q = \pm 1$. Au voisinage du point $q_+ = 1$, en faisant le changement

de variable $u = q - 1$, l'expression de la force devient : $f(u) = -2u - 3u^2 - u^3$. Bien évidemment le terme linéaire en u conduit à une oscillation avec la fréquence $\omega_0 = \sqrt{2}$.

Examinons maintenant séparément le rôle de chacun des termes non-linéaires u^2 et u^3 en les traitant en perturbations. Pour cela nous écrivons :

$$\begin{cases} du/dt = \dot{u} \\ d\dot{u}/dt = -2u - 3\epsilon u^2 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

et nous allons chercher une solution de la forme :

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (\text{III.2})$$

En résolvant ordre par ordre nous obtenons :

A l'ordre 0 :

l'équation linéaire conduisant à $u_0 = A \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = 2$.

A l'ordre 1 :

$$\begin{cases} du_1/dt = \dot{u} \\ d\dot{u}_1/dt = -2u_1 - 3A^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

En développant le terme en $\cos^2(\omega_0 t)$ sous la forme :

$$(A^2/2) [1 + \cos(2\omega_0 t)]$$

on décompose u_1 en deux parties u_{10} et u_{12} correspondant respectivement aux fréquences 0 et $2\omega_0$.

On obtient $u_{10} = -3A^2/4$, qui correspond à un déplacement de la position moyenne d'oscillation, lié à la dissymétrie du potentiel, relativement à la transformation $+u \rightarrow -u$. Plus "raide" du côté des $u > 0$, les excursions sont donc plus faciles du côté $u < 0$.¹

La contribution à la fréquence $2\omega_0$ prend la forme $u_{12} = (A^2/4) \cos(2\omega_0 t)$ et correspond à l'apparition d'un harmonique 2. Comme pour l'harmonique zéro, l'amplitude de l'harmonique deux varie comme A^2 . Ceci justifie donc le traitement en perturbations de ces harmoniques dans la limite des petites oscillations.

Procédons de la même façon pour le terme cubique :

$$\begin{cases} du/dt = \dot{u} \\ d\dot{u}/dt = -2u - \epsilon u^3 \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

L'ordre 0 conduit toujours à la solution linéaire. L'ordre 1 fait apparaître un forçage en $A^3 \cos^3(\omega_0 t) = A^3/4(\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)$, soit une contribution à la fréquence $3\omega_0$ et une à la fréquence ω_0 . Si celle à $3\omega_0$ conduit à la formation d'un harmonique 3 attendu, la

¹ Quoique cet harmonique zéro soit rarement mentionné, il joue souvent un rôle physique important. Pour ne citer qu'un exemple, c'est lui qui permet d'expliquer la dilatation des solides avec la température T où $A^2 \propto k_b T$ ce qui implique $u_0 \propto T$. [4]

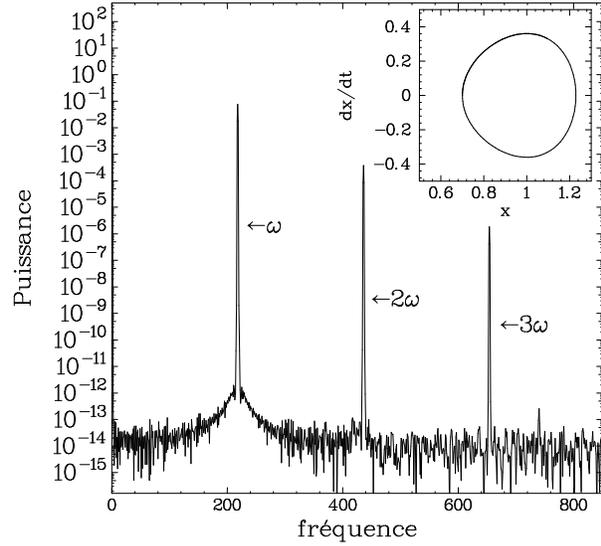


FIG. III.1: Spectre de puissance de la particule oscillant dans un puit non-linéaire. On remarque la présence d'harmoniques de la fréquence d'oscillation

contribution à ω_0 est précisément à la fréquence de résonance du système linéaire. Or elle conduit à un terme en $u_{31} \propto -(3A^3/4)t \sin \omega t$, c'est-à-dire à une contribution dont l'amplitude augmente continûment avec le temps ! Ceci est incompatible avec l'hypothèse de perturbation faite au début du calcul. L'échec de la méthode vient du fait que nous avons implicitement supposé que la fréquence du mouvement restait inchangée.

III.1.2 Evolution de la période d'oscillation

Pour obtenir une approche en perturbation correcte, nous devons supposer que u est une fonction périodique de fréquence ω telle que :

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (\text{III.5})$$

En recherchant la solution sous la forme d'une fonction de la variable $y = \omega t$ et en développant jusqu'à l'ordre 1, nous obtenons :

$$\begin{cases} du/dy = v \\ \omega^2 d\dot{v}/dy = -2u - \epsilon u^3 \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

A l'ordre 0 :

l'équation linéaire conduisant à $u_0 = A \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = 2$

A l'ordre 1 :

On obtient $2\omega_0 \omega_1 \dot{u}_0 + \omega_0^2 \ddot{u}_1 = -2u_1 - (A^3/4)(\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)$ (avec $\ddot{u} = d^2/dy^2$). Le paramètre ω_1 peut

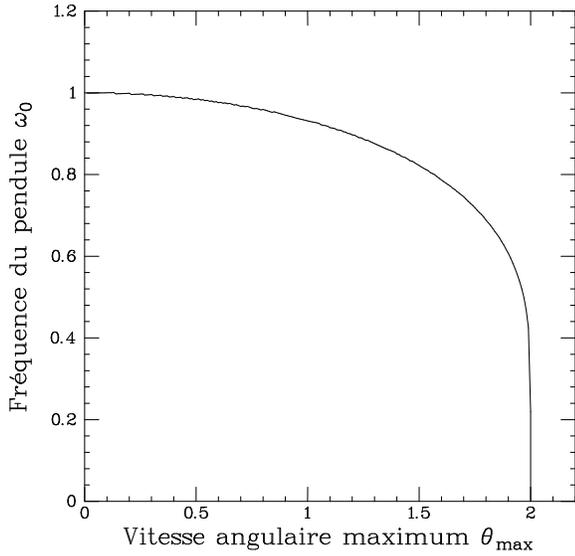


FIG. III.2: Evolution de la fréquence d'oscillation du pendule en fonction de la vitesse de rotation maximum θ_{max} .

être choisit de telle façon que la composante $\cos \omega_0 t$ disparaisse, ce qui évite le problème précédemment rencontré. La valeur de ω_1 est ainsi fixé à :

$$\omega_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0} \quad (\text{III.7})$$

Ainsi la fréquence d'oscillation de la bille dans un potentiel à deux puits va d'abord augmenter comme le carré de l'amplitude des oscillations. Dans le cas du pendule, le signe du terme en θ^3 est opposé, et l'on trouve $\omega_1 = -A^2/(8\omega_0)$: sa fréquence décroît avec l'amplitude.

Le calcul en perturbations, que nous avons esquissé, nous montre l'apparition d'harmoniques dus aux termes non linéaires et surtout l'importance de la variation de la fréquence d'oscillation en fonction de l'amplitude.

Dans le cas particulier des systèmes hamiltoniens dont l'espace des phases est de dimension deux, on peut écrire la période des oscillations sous une forme intégrale en fonction de l'énergie totale du système :

$$\frac{mq^2}{2} + U(q) = E \quad (\text{III.8})$$

qui conduit à :

$$t = \sqrt{2m} \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} \quad (\text{III.9})$$

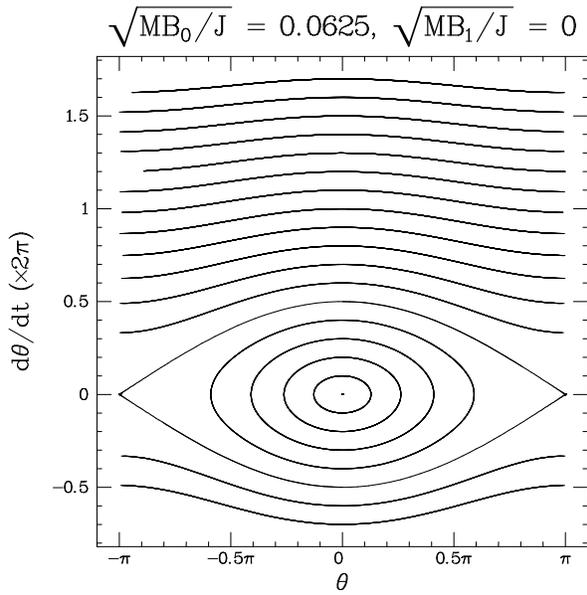


FIG. III.3: Trajectoires d'une boussole dans un champ magnétique ou d'un pendule dans l'espace des phases. Le domaine des oscillations délimité par la séparatrice définit une résonance.

où q_{min} et q_{max} correspondent aux excursions extrêmes de l'oscillation. Notons que l'intégrale de l'équation III.9 est elliptique. Nous avons reproduit le comportement typique de la fréquence d'oscillation du pendule en fonction de sa vitesse maximum de rotation sur la figure III.2.

III.1.3 Structure d'une résonance

Une variante du pendule étudié précédemment est constituée d'une boussole dans un champ magnétique. En faisant varier continûment le champ, on modifie le potentiel agissant sur la boussole. Appelons \vec{M} l'aimantation de la boussole, J son moment d'inertie et \vec{B} le champ magnétique appliqué. Les équations régissant ce système dynamique sont :

$$\begin{cases} d\theta/dt = \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt = -(\mathcal{M}B/J) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Si le champ appliqué est nul, $B = 0$, les trajectoires dans l'espace des phases sont des droites parallèles à l'axe $\theta = 0$ puisque $\dot{\theta} = cte$. Le mouvement correspondant de la boussole est une rotation uniforme dans un sens ou dans l'autre. Observons maintenant l'évolution de ces trajectoires quand nous augmentons le champ magnétique jusqu'à une valeur B_0 . Comme nous l'avons reproduit sur la figure III.3, des trajectoires de type *centre* apparaissent autour de l'origine

et des points *cols* surgissent en $\theta = \pm\pi$ et $\dot{\theta} = 0$. Le domaine des oscillations est délimité par la trajectoire particulière que constitue la *séparatrice*, déjà décrite dans le cas du pendule. Les trajectoires de rotations à vitesse constante existent encore mais voient leur vitesse modulée par la présence de trajectoires d'oscillations. Tout se passe, en quelque sorte, comme si le champ magnétique B_0 avait écarté les trajectoires de rotations pour y insérer un îlot d'oscillations.

Cet îlot de trajectoires oscillantes est appelé *résonance*.

Il est facile de calculer son extension dans l'espace des phases : en effet, la demi-largeur correspond à la vitesse maximale que prend la boussole en décrivant la séparatrice soit :

$$\dot{\theta}_{max} = 2\sqrt{\mathcal{M}B/J} \quad (\text{III.11})$$

Ainsi la demi-largeur de la résonance croît avec le champ magnétique B . Puisque $\dot{\theta}$ est également une pulsation, il est utile de la comparer à la fréquence propre des petites oscillations $\omega_0 = \sqrt{\mathcal{M}B/J}$. On voit que $\dot{\theta}_{max} = 2\omega_0$.

III.2 Systèmes à deux fréquences

Nous nous proposons maintenant d'étudier qualitativement la transition vers le chaos de systèmes hamiltoniens particulièrement simples. Nous avons vu qu'il suffit que leur espace des phases soit de dimension 4 pour qu'ils ne soient pas intégrables. Nous allons introduire trois dispositifs très voisins dans leurs principes, munis d'un paramètre de contrôle qui permet de les faire évoluer depuis une situation intégrable vers une qui ne l'est pas. Par ailleurs nous allons montrer que l'une des dimensions de leurs espaces des phases correspond à un comportement trivial ; on peut donc décrire leur évolution dans un espace des phases plus commode à représenter, car ayant seulement trois dimensions.

III.2.1 Boussole soumise à deux champs

Plaçons une boussole dans un champ magnétique statique B_0 et rapprochons la suffisamment d'une seconde boussole pour qu'existe un couplage magnétique entre elles. Nous venons de construire un système évoluant dans un espace des phases de dimension 4 puisque nous devons utiliser les variables θ et $\dot{\theta}$ pour décrire la première boussole, et ϕ et $\dot{\phi}$ pour la seconde. Ce système est non linéaire et possède suffisamment de degrés de liberté pour présenter des trajectoires chaotiques.

Supposons maintenant que la seconde boussole soit beaucoup plus grosse et beaucoup plus lourde que la

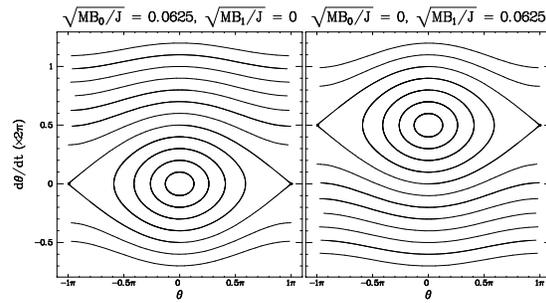


FIG. III.4: Dans les deux cas limites où l'un des champs est nul, l'espace des phases correspond à l'existence d'une résonance centrée en $\theta = 0$ quand $B_1 = 0$ (à gauche) tandis qu'elle est centrée en $\theta = \pi$ dans le cas $B_0 = 0$ (à droite).

première : son moment d'inertie J_ϕ est beaucoup plus grand que celui de la première. Dès lors, les mouvements de la première boussole auront peu d'influence sur la seconde tandis que l'inverse ne sera pas vrai. Dans la limite où le rapport des moments d'inertie tend vers l'infini, les mouvements de la grosse boussole ne sont pas du tout affectés par ceux de la première et ils se réduisent par exemple, à une rotation à vitesse constante $\dot{\phi} = \Omega$. Ce nouvel invariant remplace avantageusement celui de l'énergie du système, puisqu'il permet de ne considérer qu'un espace des phases à trois dimensions : θ , $\dot{\theta}$ et ϕ .

D'un point de vue pratique, le rôle de la grande boussole se résume à imposer un champ magnétique B_1 tournant avec une pulsation Ω . Une façon de réaliser ce dispositif consiste à placer une seule boussole à la fois dans un champ magnétique B_0 fixe et dans un champ B_1 tournant. En notant \mathcal{M} le moment magnétique de la boussole et J son moment d'inertie, les équations de ce système dynamique prennent la forme :

$$\begin{cases} d\theta/dt &= \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt &= -\frac{\mathcal{M}B_0}{J} \sin \theta - \frac{\mathcal{M}B_1}{J} \sin(\theta - \phi) \\ d\phi/dt &= \Omega \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Il est intéressant de remarquer qu'en coupant le champ statique et en ne soumettant la boussole qu'au champ tournant (soit $B_0 = 0$ et $B_1 \neq 0$), on retrouve le problème d'une boussole dans un champ fixe (c'est-à-dire du pendule pesant) en effectuant le changement de variable $\theta_1 = \theta - \Omega t$. Dans ce nouveau référentiel, le champ tournant engendre sur l'axe $\dot{\theta}$ une résonance décalée de la quantité Ω . Quand les deux champs sont non nuls, chacun donne lieu à une résonance : le dispositif est dit à deux résonances.

Avant d'étudier plus avant le cas de la boussole, nous allons analyser le cas classique très voisin du

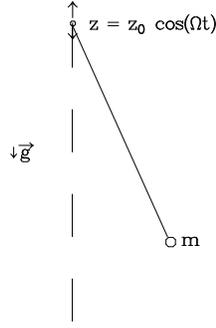


FIG. III.5: Pour réaliser un oscillateur paramétrique, il suffit de monter et descendre le point d'attache d'un pendule de façon périodique

pendule paramétrique.

III.2.2 Le pendule paramétrique

Le pendule paramétrique consiste en un pendule pesant dont le point d'attache est soumis à un mouvement alternatif vertical d'amplitude a et de pulsation Ω . Pour le modéliser, il suffit d'ajouter une composante sinusoïdale au champ de pesanteur. Ainsi la force de rappel s'écrit $(g(1 + a \cos \phi)/l) \sin \theta$ où θ est la position angulaire du pendule. En développant, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} d\theta/dt = \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt = -(g/l) \sin \theta - (ag/2l) \sin(\theta - \phi) \\ d\phi/dt = \Omega \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Sous cette forme, le pendule paramétrique est équivalent à une boussole soumise à trois champs : un champ fixe et deux champs rotatifs d'intensités égales tournant en sens opposés avec les pulsations $\pm\Omega$. Par des arguments analogues à ceux que nous avons utilisés pour la boussole, le pendule paramétrique est un problème à trois résonances, l'une centrée à $\dot{\theta} = 0$, et les deux autres autour de $\dot{\theta} = \pm\Omega$.

Nous verrons bientôt qu'une trajectoire est sensible aux résonances qui lui sont proches. C'est la raison pour laquelle le pendule paramétrique a des caractéristiques très semblables à celles de la boussole soumise à deux champs.

III.2.3 Le mapping standard

Comme troisième système, nous introduisons enfin le *mapping standard*. Il s'agit plutôt d'un modèle numé-

rique, proposé par CHIRIKOV [10], défini non par des équations différentielles mais par des itérations traduisant une forme de discrétisation du temps. Ceci permet une exploration très rapide de ses propriétés. Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Revenons à la boussole et appliquons lui périodiquement un champ magnétique sous forme d'impulsions très brèves et intenses, à la fréquence $\Omega/2\pi$. Les variables θ_n et $I_n/2\pi$ représentent respectivement les position et vitesse angulaires juste avant l'application de la n -ième impulsion. Entre deux impulsions, le champ magnétique est nul et la boussole tourne à vitesse constante $\dot{\theta} = I/2\pi$. L'impulsion de champ est équivalente à un choc, qui fait changer la vitesse angulaire de la boussole d'une quantité dépendant de l'angle θ de la boussole avec le champ. Dans cette situation, les équations différentielles de la boussole sont :

$$\begin{cases} d\theta/dt = \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt = 2\pi M \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2n\pi) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

En écrivant que la somme des impulsions sous forme d'une somme de cosinus, nous obtenons :

$$\begin{cases} d\theta/dt = \dot{\theta} \\ d\dot{\theta}/dt = 2\pi M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(\theta - nt) \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Le mapping standard apparaît donc comme un système ayant une infinité de résonances d'amplitudes égales, centrées en $\dot{\theta} = n$, $n \in \mathcal{Z}$.

III.2.4 Critère de stochasticité

Il peut paraître surprenant qu'un système ayant une infinité de résonances comme le mapping standard puisse se comparer à celui de la boussole soumise à deux champs seulement. Leur comportements sont pourtant similaires tant que les résonances ne sont pas trop fortes. Nous allons quantifier ce que cela signifie.

Dans le cas de la boussole, une résonance correspond à un domaine où ses mouvements sont des oscillations autour du champ magnétique associé. Une résonance correspond à un *domaine de piégeage*. De ce fait il est impossible à une trajectoire d'appartenir à la fois à la résonance associée au champ fixe et à celle du champ tournant. Comme la largeur des résonances varie avec l'amplitude du champ associé, on conçoit aisément qu'en augmentant l'amplitude des champs, un

problème apparaît lorsque les deux résonances viennent en contact ou même se chevauchent. Dans cette situation la boussole ne sait plus quel champ suivre et adopte généralement une trajectoire chaotique, suivant irrégulièrement l'un puis l'autre. Inversement on s'attend à des mouvements réguliers lorsque les amplitudes des champs sont faibles.

Ce raisonnement permet d'obtenir un critère rudimentaire mais simple d'existence de trajectoires chaotiques : le recouvrement des résonances a lieu quand la somme de leurs demi-largeurs est égale à la distance qui les sépare. C'est le **critère de stochasticité** :

$$S = \frac{2\sqrt{\mathcal{M}B_0/J} + 2\sqrt{\mathcal{M}B_1/J}}{\Omega} = \frac{2(\omega_0 + \omega_1)}{\Omega} \quad (\text{III.17})$$

où ω_0 et ω_1 sont respectivement les fréquences propres de la boussole dans le champ fixe et dans le champ tournant.

Nous voyons que le recouvrement des résonances a lieu lorsque $S = 1$, ce qui peut être atteint soit en augmentant l'amplitude des champs, soit en réduisant la fréquence du champ tournant Ω .

Ce critère peut s'appliquer à chacun des trois systèmes que nous avons décrits, où il existe plusieurs résonances décalées les unes des autres suivant l'axe θ d'une quantité égale à la fréquence Ω .

III.3 Section de POINCARÉ

Jusqu'à présent, nous nous sommes bien gardés de donner une représentation de l'espace des phases (tridimensionnel!) de la boussole ou du pendule paramétrique. Nous avons aussi utilisé pour ces systèmes le concept de résonance introduit pour un espace des phases à deux dimensions, sans justifier sa validité dans le cas de trajectoires chaotiques. En fait, à l'aide d'une représentation appropriée de ces espaces des phases, nous allons voir que les résonances existent globalement dans le système de la boussole mais qu'elles peuvent être sujettes à des perturbations importantes.

III.3.1 Stroboscopie des trajectoires

La boussole et le pendule paramétrique sont tous deux perturbés par une composante périodique de fréquence Ω . Une façon naturelle de vérifier si ces dispositifs tournent rond ou oscillent avec la fréquence de la perturbation consiste à les stroboscooper, c'est-à-dire à en observer la position angulaire θ à des intervalles de temps réguliers $t_n = n2\pi/\Omega$. C'est équivalent à faire une coupe de la trajectoire de la boussole dans un plan $\phi = \text{cte}$. Au lieu d'une trajectoire continue, nous avons maintenant une série de points d'intersection

Coupe de Poincaré

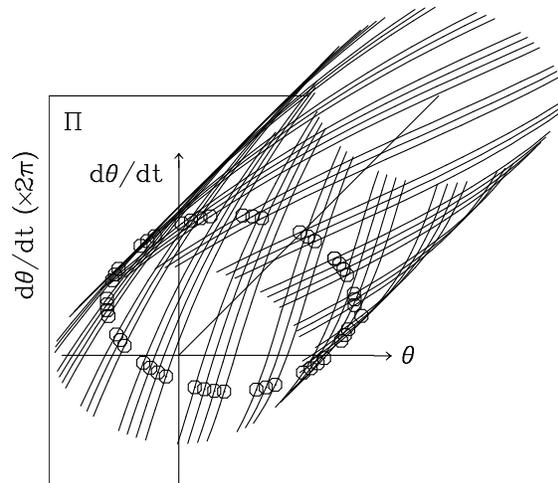


FIG. III.6: Principe de la coupe de POINCARÉ de la boussole.

dans un plan $\theta, \dot{\theta}$: c'est une *coupe de POINCARÉ* (nous avons utilisé la périodicité de ϕ pour ramener la trajectoire dans l'intervalle d'étude $[0, 2\pi]$). La coupe de POINCARÉ est un outil puissant permettant de réduire l'espace des phases d'une dimension.

Dans les cas de la boussole ou du pendule paramétrique, on se ramène donc au plan $\theta, \dot{\theta}$, semblable à celui utilisé pour représenter les trajectoires du pendule simple. Toutefois ici, une trajectoire est représentée non par une courbe continue, mais par une suite discrète de points (En principe il serait judicieux de les numéroter suivant leur ordre d'apparition, quoique cela soit rarement fait en pratique).

Comme le mapping standard correspond directement à la coupe de POINCARÉ d'une boussole soumise à un champ pulsé, ces deux types de diagrammes peuvent être directement comparés.

III.3.2 Coupe de POINCARÉ

Quoique la trajectoire d'un système dynamique quelconque ne présente pas forcément de périodicité imposée par une perturbation extérieure, il est cependant toujours possible de définir une section de POINCARÉ comme l'ensemble des points d'intersection d'une trajectoire avec un plan quelconque de l'espace des phases. On ne retient que les points correspondant à une intersection se faisant dans un sens donné. Cette fois-ci, le temps qui sépare deux intersections consécutives n'est pas forcément constant.

Une coupe de POINCARÉ réduit l'information que contient la trajectoire complète, et il est possible qu'elle

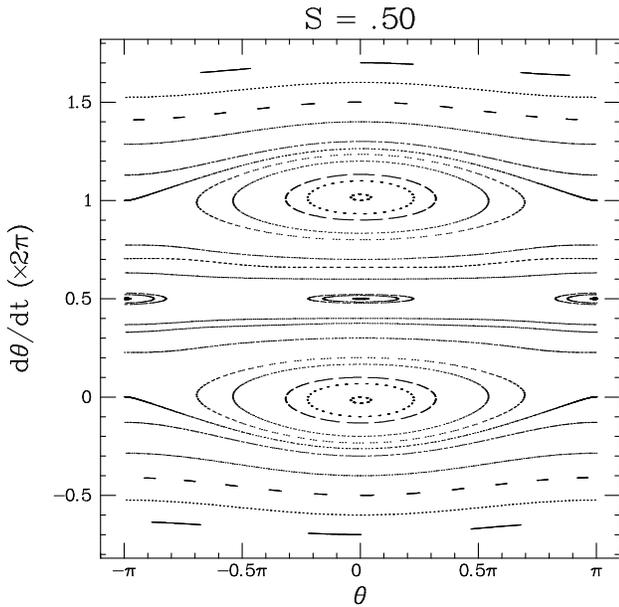


FIG. III.7: Coupe de POINCARÉ de la boussole à $S = 1/2$. En variant les conditions initiales, on distingue différentes régions de l'espace des phases, et notamment les résonances.

ne soit pas représentative de toute la dynamique. Pour avoir une vue réaliste de la trajectoire, il faut faire varier le plan de coupe (c'est-à-dire la phase de la stroboscopie).

III.3.3 Allure d'une coupe de POINCARÉ de la boussole

Pour illustrer ce concept, observons la coupe représentée sur la figure III.7, effectuée à $\phi = 0$, avec des champs magnétiques d'amplitudes égales, et à $S = 1/2$.

Pour certaines conditions initiales, les séries de points s'alignent sur une courbe bien définie. On retrouve ainsi l'allure des deux résonances et des trajectoires de rotations.

III.4 Trajectoires passantes

Nous allons décrire ici l'évolution des trajectoires de rotation situées entre les deux résonances principales. Il est facile d'imaginer que les trajectoires passantes sont peu affectées par les résonances tant que $S \ll 1$, mais qu'elles le deviennent dès que S se rapproche de 1. Si cette image est qualitativement correcte, elle est toutefois altérée par l'existence d'accrochages de fréquences. Il en résulte une structure particulière de l'espace des phases.

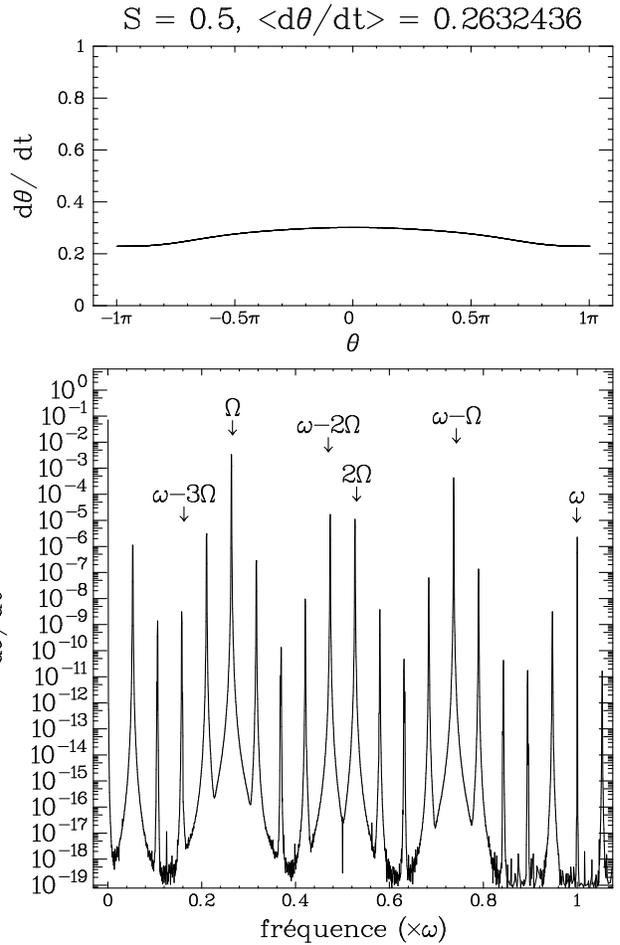


FIG. III.8: Analyse d'une trajectoire passante. En haut section de Poincaré, on remarque que la trajectoire est dense. En bas spectre de Fourier de la vitesse angulaire.

Nous allons chercher à calculer une de ces trajectoires sous la forme d'un développement en ϵ comme nous l'avons déjà fait. Nous supposons que B_0 et B_1 proportionnel à ϵ (donc petit). Nous cherchons ainsi à résoudre :

$$\ddot{\theta} = -\epsilon M \sin \theta - \epsilon P \sin(\theta - \Omega t) \quad (\text{III.18})$$

Où $M = \mathcal{M}B_0/J$ et $P = \mathcal{M}B_1/J$. Nous cherchons une solution de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \epsilon \theta_1(t) + \epsilon^2 \theta_2(t) + \dots \quad (\text{III.19})$$

A l'ordre 0 : nous avons à résoudre : $\ddot{\theta}_0 = 0$, ce qui conduit à :

$$\theta_0(t) = \phi + \omega t + \dots$$

Il s'agit d'une trajectoire de rotation à la vitesse angulaire constante ω ; le terme de phase ϕ correspond à la multiplicité des choix possibles pour l'origine des phases.

A l'ordre 1 : nous avons à résoudre :

$$\ddot{\theta}_1 = -M \sin(\phi + \omega t) - P \sin(\phi + (\omega - \Omega)t)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\theta_1(t) = \frac{M}{\omega^2} \sin(\theta_0(t)) + \frac{P}{\omega'^2} \sin(\theta'_0(t))$$

Où $\theta'_0(t) = (\phi + (\omega - \Omega)t)$. En tournant, la boussole ressent le champ fixe comme une perturbation périodique de fréquence ω . Sa vitesse de rotation est modulée à cette fréquence. De façon analogue, le champ tournant impose une perturbation à la fréquence $\omega' = \omega - \Omega$. Nous venons de montrer que le spectre de fréquence de la vitesse de la boussole est constitué d'au moins deux raies aux fréquences : ω et ω' .

A l'ordre 2 : nous avons à résoudre :

$$\ddot{\theta} = -\epsilon M \sin(\theta_0(t) + \epsilon \theta_1(t)) - \epsilon P \sin(\theta'_0(t) + \epsilon \theta_1(t))$$

En développant les sinus et en gardant les terme en ϵ^2 on a :

$$\ddot{\theta}_2 = -M \cos \theta_0 \left[\frac{M}{\omega^2} \sin \theta_0 + \frac{P}{\omega'^2} \sin \theta'_0 \right] - M \cos \theta'_0 \left[\frac{M}{\omega^2} \sin \theta_0 + \frac{P}{\omega'^2} \sin \theta'_0 \right]$$

Le terme $\cos \theta_0 \sin \theta_0$ conduit à une perturbation en $\sin(2\phi + 2\omega t)$ c'est à dire à un harmonique 2ω ; de même le terme en $\cos \theta'_0 \sin \theta'_0$ conduit à l'harmonique $2\omega'$. Les termes croisés $\cos \theta_0 \sin \theta'_0$ et $\cos \theta'_0 \sin \theta_0$ donnent lieu à des termes $\theta_0 \pm \theta'_0$ et $\theta'_0 \pm \theta_0$ soit à des perturbations de fréquences $\omega \pm \omega'$ et $\omega' \pm \omega$. En général nous pouvons déterminer l'expression de θ_2 et poursuivre le développement aux ordres supérieurs. Cependant dans le cas où $\omega = \Omega/2 = -\omega'$, nous avons à résoudre l'équation : $\ddot{\theta}_2 \sim -\sin(2\phi)$. Ce qui conduit à un terme qui croît en t^2 qui n'est pas petit comme nous l'avions supposé au début du calcul en III.19. Dans le cas $\omega = \Omega/2$ nous avons un accrochage de fréquences.

III.4.1 Accrochage 1/2

Quand deux oscillateurs s'accrochent, il est facile de comprendre que leur différence de phase ne peut pas être quelconque. Dans l'exemple de l'accrochage 1/2, nous venons de montrer que la boussole est soumise à une perturbation en $\sin(2\phi)$. Pour décrire correctement l'accrochage il faut reprendre le calcul en perturbation mais en laissant à la fréquence ω la liberté d'évoluer,

comme nous l'avions fait en III.1.2. Plus précisément, comme une modulation de fréquence n'est autre qu'une modulation de phase, nous allons supposer que ϕ varie dans le temps. Nous allons chercher une solution de la forme :

$$\theta = \frac{\Omega}{2}t + \phi(t) + \dots$$

Nous allons analyser le mouvement correspondant à cet accrochage dans un cas particulier. Si nous choisissons $M = P$, l'équation III.18 devient :

$$\ddot{\phi} = -2\epsilon M \sin \phi \cos(\Omega t/2)$$

Remarquons que dans cette situation, le point correspondant à $\phi = 0$ et $\dot{\theta} = \Omega/2$ est un point fixe tout comme le point correspondant à $\phi = \pi$. Pour appréhender la solution, nous allons supposer que la phase ϕ est voisine de 0 mais peut osciller lentement autour de ce point fixe :

$$\phi = \exp(\epsilon \omega_0 t) [u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + \dots]$$

A l'ordre 0 : on obtient : $\ddot{u}_0 = 0$

A l'ordre 1 : nous avons à résoudre :

$$\ddot{u}_1 - i\omega_0 \dot{u}_1 = -2M u_0 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (\text{III.20})$$

ce qui conduit à :

$$\dot{u}_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{8M}{\Omega^2} u_0 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

A l'ordre 2 : nous avons à résoudre :

$$\ddot{u}_2 - i\omega_0 \dot{u}_2 - \omega_0^2 u_2 = -2M u_1 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

En remplaçant u_1 par son expression III.20, on résoud séparément les termes qui ne dépendent pas explicitement du temps, ceux en $\cos(\Omega t)$ et ceux en $\cos(\Omega/2 t)$. Ceci permet de trouver la forme de ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{8M^2}{\Omega^2}$$

Nous voyons ainsi que la fréquence d'oscillation de la phase est parfaitement définie puisqu'elle vaut $\epsilon \omega_0$. Près des points fixe $\theta = 0, \dot{\theta} = 1/2$ et $\theta = \pm \pi, \dot{\theta} = 1/2$, on assiste à une oscillation de phase qui correspond aux trajectoires elliptiques visibles sur la figure III.7.

Les équations en $\cos(\Omega t)$ et $\cos(\Omega/2 t)$ permettent de décrire la forme de u_2 :

$$\begin{aligned} u_{21} &= i\omega_0 \frac{16M}{\Omega^3} u_0 \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ u_{22} &= -u_0 \frac{32M^2}{\Omega^4} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

III.4.2 Le spectre de la vitesse

Nous pouvons généraliser les résultats du développement en ϵ en considérant le spectre de fréquence de la vitesse de la boussole : tant que les perturbations périodiques ne sont pas de fréquence nulle, les ordres plus élevés en ϵ font apparaître des fréquences du type $p\omega \pm q\omega'$ avec p et $q \in \mathbb{Z}$. Ce spectre est compliqué mais toutes les raies peuvent s'expliquer par des combinaisons des fréquences ω et ω' qui définissent le *nombre de rotation* $\sigma = \omega/\omega'$.

III.4.3 Nombre de rotation rationnel

Chaque fois que ce nombre de rotation σ est rationnel, donc égal à p/q , le développement en ϵ est singulier : il apparaît un *accrochage de fréquences*. La trajectoire de rotation se scinde en un chapelet de q petites résonances. Les q résonances font apparaître q points centres et autant de points cols. On peut voir un exemple de ce phénomène sur la figure III.7. Lors d'un accrochage de fréquences, on pourrait penser que des deux fréquences de départ ω et ω' il n'en subsiste plus qu'une seule; en fait, comme nous l'avons vu dans l'analyse du cas particulier de l'accrochage $1/2$, l'oscillation de phase fait apparaître une nouvelle fréquence $\epsilon\omega_0$ qui peut à nouveau présenter une relation de commensurabilité ou non avec la fréquence fondamentale. Dans le cas générale, deux fréquences subsistent dans le système.

Par ailleurs, l'amplitude des chapelets de résonances est d'autant plus grande que le rationnel est simple, c'est-à-dire que q est petit. A égale distance des deux résonances fondamentales, on observe ainsi un chapelet de deux résonances lié à l'accrochage $1/2$. Celles de l'accrochage $1/3$ sont plus faibles et ainsi de suite.

III.4.4 Tores de K.A.M.

Si le rapport $\sigma = \omega/(\Omega - \omega)$ est un nombre irrationnel, le mécanisme d'accrochage précédent n'a plus lieu et le développement en ϵ peut se construire. Cependant, il est possible que ce développement ne converge pas. La trajectoire subsiste tant que la perturbation liée aux résonances n'est pas trop forte. En introduisant le paramètre de stochasticité \mathcal{S} nous avons montré comment les résonances principales pouvaient perturber les trajectoires passantes. L'apparition de chapelets de résonances secondaires va aussi contribuer à déstabiliser les trajectoires irrationnelles voisines. En d'autres mots, certaines trajectoires vont rester régulières pour un système non intégrable. Cette proposition constitue le *théorème KAM*.

Sa preuve fut un morceau de bravoure et d'ingéniosité mathématiques de la part de KOLMOGOROV, ARNOLD et MOSER. Son importance est capitale car il nous

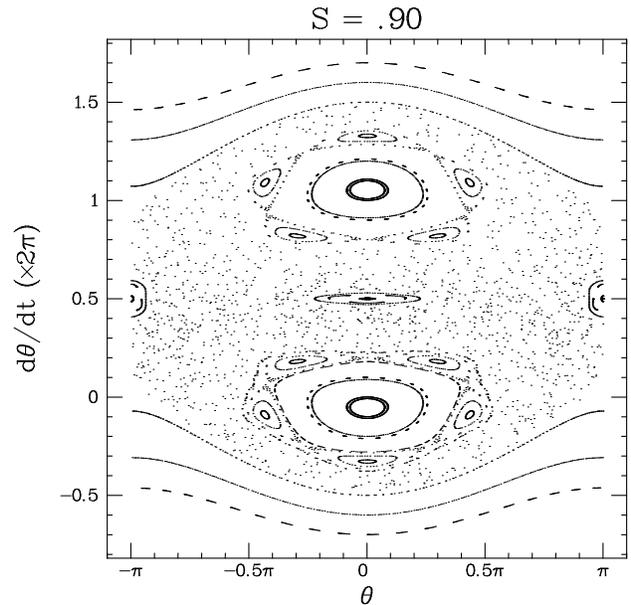


FIG. III.9: Coupe de POINCARÉ de la boussole à $\mathcal{S} = .9$. On remarquera l'apparition des 5 îlots correspondant à un accrochage $1/5$.

permet d'affirmer que certaines trajectoires passantes comprises entre les deux résonances principales resteront rigoureusement régulières jusqu'à une certaine valeur seuil du paramètre de stochasticité. Ce type de trajectoire correspond à des séries de points se plaçant sur les courbes bien définies de la figure III.7. Ce théorème permet de justifier le développement en ϵ que nous avons ébauché. En principe, il permet de dire le domaine du paramètre ϵ pour lequel les trajectoires restent régulières.

III.5 Trajectoires appartenant à une résonance

Nous venons de voir que le rapport σ des deux fréquences qui caractérise une trajectoire passante, détermine la stabilité de cette dernière, au moins pour un paramètre de stochasticité faible. Comme ce rapport change de 0 à 1 quand la vitesse angulaire varie depuis 0, près de la résonance du champ fixe, jusqu'à Ω , près de celle du champ tournant, nous allons observer une alternance de rationnels et d'irrationnels qui conduit à une structure de l'espace des phases très complexe. Examinons la situation au sein d'une des résonances principales.

Sans que cela soit restrictif, considérons le cas de la résonance associée au champ fixe. Au premier ordre, la boussole oscille autour du champ fixe avec la fréquence

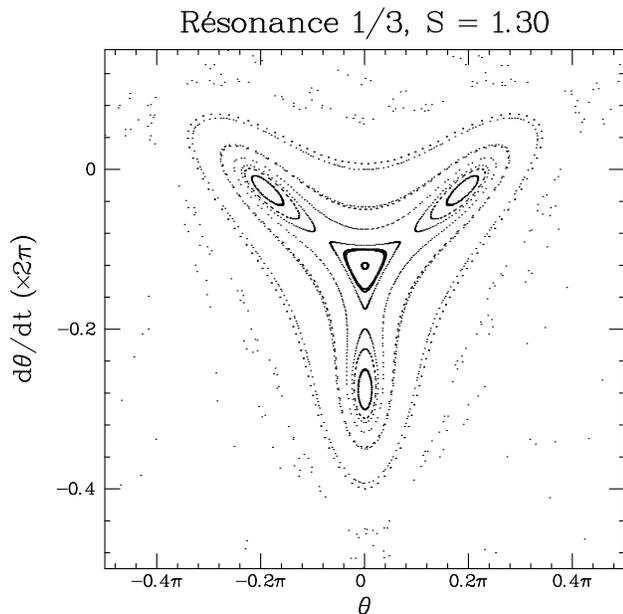


FIG. III.10: Coupe de POINCARÉ de la boussole à $S = 1.30$. Accrochage $1/3$, remarquer que les points cols et les points centres ne sont pas répartis sur une ellipse.

ω . Elle est perturbée par le champ tournant qui induit une composante d'oscillation à la fréquence Ω . Nous sommes donc en présence d'un système ayant deux fréquences, comme pour les trajectoires passantes. De la même façon, la stabilité des trajectoires va dépendre du caractère rationnel ou non du rapport $\sigma = \omega/\Omega$.

III.5.1 Résonances secondaires

C'est à ce stade que le comportement non-linéaire de l'oscillation de la boussole prend toute son importance. Comme nous le montre la figure III.2, la fréquence évolue continûment depuis la fréquence des petites oscillations ω_l jusqu'à 0 pour la résonance. La situation est assez comparable à celle des trajectoires passantes où la vitesse angulaire varie continûment d'une résonance à l'autre. Toutefois, le domaine des oscillations linéaires est un peu singulier puisque la variation de la fréquence ω est du second ordre pour $\omega \approx \omega_l$.

On assiste donc à une alternance d'accrochages et de trajectoires régulières associées à des tores de KAM. Les accrochages font apparaître des chapelets périodiques d'îlots secondaires comme ceux de la figure III.9. Dans le domaine où les oscillations sont presque linéaires, l'amplitude des harmoniques est petite et les accrochages sont très peu marqués. Par contre, au fur et à mesure que l'on s'écarte du centre de la résonance, les accrochages deviennent plus forts et les

îlots secondaires plus larges.

Les différents accrochages ont un rapport de fréquence ω/Ω borné par $\omega_l/\Omega = \sqrt{MB_0/J}/\Omega$. On remarque ainsi que lorsque l'on augmente le champ magnétique B_0 , les îlots d'un accrochage p/q s'écartent du centre de la résonance. Ainsi, l'augmentation de ω_l est compensée par la décroissance de la fréquence d'oscillation avec son amplitude. Comme les accrochages sont d'autant plus intenses que le rationnel qui les caractérise est petit, la perturbation qu'ils apportent est petite pour $\omega_l/\Omega \ll 1$ et devient très importante quand ω_l/Ω approche $1/3$ et $1/2$.

La séparatrice de la résonance correspond à une trajectoire très sensible à toute perturbation (celle du pendule en équilibre instable). C'est également dans son voisinage que la fréquence d'oscillation varie le plus rapidement jusqu'à s'annuler. Elle constitue donc la première région de l'espace des phases à devenir chaotique quand on augmente S , comme on peut le voir sur la figure III.7.

III.5.2 Hiérarchie des résonances

Les accrochages ne sont pas tous de la même nature et les plus forts sont particuliers. Si notre description des accrochages p/q avec $q > 3$ est bonne, alors les accrochages $1/3$ et surtout $1/2$ sont très particuliers. Avant de les détailler, précisons pour quelles valeurs de S on peut s'attendre à les observer. Choisissons une même amplitude pour le champ fixe et le champ tournant. Alors $\omega_l/\Omega = S/4$. Pour atteindre le rapport $1/3$, il faut avoir $S = 4/3$ (2 pour la résonance $1/2$), c'est-à-dire être dans un domaine où les résonances se recouvrent. Dans ce régime, le chaos affecte la plupart des trajectoires, et seule le cœur de la résonance n'est pas chaotique.

L'accrochage $1/3$ montre une première particularité : les trois petits îlots auxquels il donne naissance apparaissent à distance finie du cœur de la résonance et non pas en son centre, comme dans les cas des accrochages $1/5$ ou $1/4$, par exemple. De plus la structure de ces îlots est différente de celle observée pour les autres accrochages (voir fig. III.10).

L'accrochage $1/2$ est encore plus particulier : tandis que les autres accrochages laissent le cœur de la résonance indemne, l'accrochage $1/2$ scinde la résonance en deux. Le point centre du cœur se transforme en un point col tandis que deux nouveaux points centres apparaissent de part et d'autre comme on peut le voir sur la figure III.11.

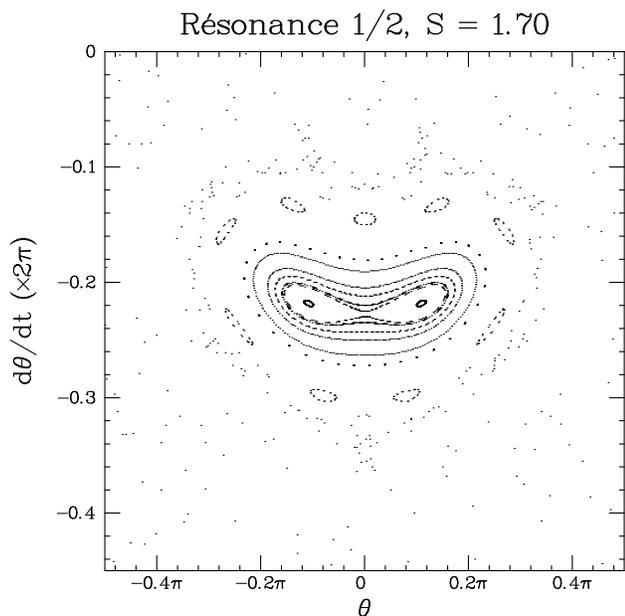


FIG. III.11: Coupe de POINCARÉ de la boussole à $S = 1.70$. Accrochage $1/2$. Remarquer comment cet accrochage scinde la résonance en deux. Les neuf petits îlots qui décorent les deux résonances centrales correspondent à l'accrochage $4/9$.

III.5.3 Disparition d'une résonance par doublement de période

Le scénario que nous venons de décrire se reproduit pour ces résonances secondaires. Au cœur de la résonance, les deux fréquences sont commensurables ; il y a donc accrochage de fréquences entre les mouvements d'oscillation et ceux induits par la perturbation. L'existence d'un accrochage traduit la sensibilité de ces deux mouvements à leur phase relative. Comme celle-ci est différente de la phase au point centre de la résonance, elle va osciller autour cette valeur. Le chapelet d'îlots manifeste cette oscillation.

Quand ces îlots sont très petits, l'oscillation de la différence de phase relative est très lente et le rapport de cette fréquence à celle associée à p/q nous fournit un nouveau nombre de rotation σ_1 . Suivant les valeurs de σ_1 , nous observons de nouveaux accrochages ou des trajectoires régulières. Lorsque S augmente, σ_1 augmente aussi et la résonance secondaire se scinde en deux pour $\sigma_1 \approx 1/2$. Les nouvelles résonances issues de la résonance secondaire vont se comporter de la même façon, et l'on assiste à une cascade de division de résonance par deux.

Nous voyons ainsi que la structure des résonances est hiérarchique : une résonance engendre des résonances qui engendrent elles-mêmes des résonances et

ainsi de suite. On dit que l'espace des phases a une structure *auto-similaire*.

III.6 Stochasticité à grande échelle

Le scénario que nous venons d'explicitier est valable à toute valeur du paramètre S . Des successions de résonances secondaires apparaissent, mais la multiplication des résonances ne consiste pas directement le chaos. Pourtant nous avons dit que les trajectoires stochastiques devenaient plus nombreuses quand S augmente. Par l'accroissement des largeurs relatives des résonance conduit au chaos : l'espace disponible pour les tores de KAM décroît, leurs formes sont de plus en plus torturées et il finissent par se déchirer.

Une façon de quantifier ce résultat consiste à inspecter les résonances aux différents ordres hiérarchiques. Si nous ne considérons que les trajectoires passantes, les deux résonances principales constituent la première génération. Imaginons que nous étudions la trajectoire correspondant au nombre de rotation irrationnel σ , des résonances filles apparaissent de part et d'autre de la trajectoire associée à σ . On peut reprendre ces résonances comme une nouvelle base et répéter l'opération. Se faisant, l'ampleur des résonances filles que l'on trouve soit croît, soit décroît au fur et à mesure des itérations. Dans le deuxième cas, toutes les trajectoires apparaissent lisses aux petites échelles : elles sont régulières. Dans le premier cas les résonances poussent les trajectoires et les déforment à toutes les échelles. C'est ainsi que les trajectoires associées à des σ irrationnels sont détruites. La valeur seuil que nous avons évoquée pour la stabilité des tores de K.A.M. correspond précisément à ce changement de comportement.

III.6.1 Allure de l'espace des phases

L'étude locale de l'espace des phases que nous venons de décrire permet d'entrevoir son allure : une structure imbriquée de résonances, des trajectoires régulières près de leurs cœurs et des trajectoires chaotiques près des séparatrices. Le mécanisme d'amplification des résonances et de destruction des tores de K.A.M. conduit à l'extension des domaines chaotiques.

Notons enfin que deux trajectoires régulières sont toujours nettement séparées dans l'espace des phases, tandis que deux trajectoires chaotiques s'enchevêtrent et forment une mer stochastique, à la condition de ne pas être séparées par une trajectoire régulière qui constitue alors une barrière étanche.

III.6.2 Disparition du dernier tore de KAM

Ainsi tant qu'il reste un seul tore de K.A.M. entre les deux résonances principales de la boussole, les trajectoires chaotiques qui, très vite, sont apparues près de la séparatrice, ne sont pas reliées entre elles et restent localisées autour de leurs résonances. Quand ce dernier tore lâche, les trajectoires chaotiques explorent les voisinages de chacune des résonances : le chaos qui apparaît est dit à *grande échelle*. L'observation des mouvements de la boussole montre son comportement erratique d'un champ à l'autre. Elle oscille quelque peu autour du champ fixe, accélère puis oscille autour du champ tournant, s'arrête brutalement avant d'osciller à nouveau autour du champ fixe et ainsi de suite.

Bibliographie

- [1] L. LANDAU et E. LIFCHITZ *Mécanique* Ed. Mir
- [2] V. ARNOLD *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique* Ed. Mir
- [3] V. ARNOLD *Equations Différentielles Ordinaires* Ed. Mir
- [4] KITTEL *Introduction à la Physique des Solides*, Ed. Dunod.
- [5] P. BERGÉ, Y. POMEAU et C. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*, Ed. Hermann (1984)
- [6] P. MANNEVILLE, *Structures Dissipatives Chaos et Turbulence*, Collection Aléa Saclay, 91 191 Gif-sur-Yvette Cedex, (1991)
- [7] H.G. SCHUSTER, *Deterministic Chaos*, VCH, (1989)
- [8] A.J. LICHTENBERG and M.A. LIBERMAN, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag (1983)
- [9] M. BERRY, *Nonlinear Dynamics* Ed. S. JORNA American Institute of Physics. New-York (1978) p. 16
- [10] B.V. CHIRIKOV *Physics Reports* **52** (1979) p. 263