Licence et Magistère 1ère année 27 mai 2003

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont autorisées. Les deux problèmes sont indépendants.
Barème approximatif : Premier problème 9 points ; deuxième problème 11 points.

1 Semi-métal

Dans un semi-conducteur, il existe une bande interdite entre la bande de valence et la bande de conduction. Dans un semi-métal, la largeur de la bande interdite est nulle et la densité d'états est de la forme :

$$\rho(\varepsilon) = A\,\frac{|\varepsilon - \varepsilon_F|^{1/2}}{\varepsilon_F^{3/2}} \tag{1}$$

où ε varie de 0 à l'∞. ε_F est l'énergie de Fermi, c'est-à-dire le potentiel chimique pour $T = 0\,\mathrm{K}$. A est une constante positive.

1/ Représenter graphiquement $\rho(\varepsilon)$ en fonction de ε.

2/ Rappeler sur le même schéma l'allure de la distribution de Fermi-Dirac à $T = 0\,\mathrm{K}$ et décrire la répartition des électrons entre bande de valence ($\varepsilon < \varepsilon_F$) et bande de conduction ($\varepsilon > \varepsilon_F$). En déduire une expression de A en fonction du nombre d'électrons N.

3/ Calculer l'énergie totale E_0 du gaz d'électrons à $T = 0\,\mathrm{K}$ en fonction de N et ε_F. En quoi ce résultat traduit-il le caractère quantique du comportement des électrons ?

4/ On se place désormais à $T \neq 0\,\mathrm{K}$. Soit $\mu(T)$, noté μ, le potentiel chimique à température T. Soit N_e le nombre d'électrons dans la bande de conduction. Exprimer N_e sous la forme d'une intégrale (sans la calculer).

5/ Soit N_t le nombre de trous dans la bande de valence. Justifiez en quelques lignes l'expression suivante :

$$N_t = \int_0^{\varepsilon_F} \mathrm{d}\varepsilon\,\rho(\varepsilon)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}\right)\ , \tag{2}$$

où $\beta = 1/(k_B T)$.

6/ Quelle relation permet de déterminer μ ?

7/ On se place désormais dans la limite des basses températures $\boldsymbol{k_B T \ll \varepsilon_F}$.

(a) Montrer qu'il est alors possible d'écrire (2) sous la forme :

$$N_t = A\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^{3/2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{x}}{\xi^{-1}\mathrm{e}^{x} + 1}\ , \tag{3}$$

où l'on a posé $x = \beta(\varepsilon_F - \varepsilon)$. Définir ξ.

(b) Réécrire l'expression donnant N_e en fonction d'une intégrale de la variable $y = -x$.

(c) Montrer que μ est indépendant de la température et donner son expression.

(d) En déduire les expressions de N_e et N_t en fonction de N, T et de la température de Fermi T_F, dont on rappellera la définition. On exprimera le résultat à l'aide de l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_0^\infty dx \, \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x + 1} \,, \tag{4}$$

(en particulier $I(\frac{1}{2}) = 0,678$ et $I(\frac{3}{2}) = 1,153$).

8/ On se propose maintenant de calculer l'énergie totale $E(T)$ des électrons pour une température $T \ll T_F$. On calcule dans un premier temps la contribution $E_c(T)$ des électrons de la bande de conduction. Exprimer $E_c(T)$ en fonction de T, T_F et N.

9/ Un calcul similaire, qui ne vous est pas demandé, montre que la contribution de la bande de valence est :

$$E_v(T) = \frac{2}{5} N \varepsilon_F + \frac{3N}{2} \left(\frac{T}{T_F} \right)^{3/2} \left[k_B T \, I(\frac{3}{2}) - \varepsilon_F \, I(\frac{1}{2}) \right] \,. \tag{5}$$

En déduire l'expression de l'énergie totale $E(T)$.

10/ Donner l'expression de la chaleur spécifique du semi-métal. Comparer ce résultat avec celui obtenu pour un métal. Quelle est l'origine de la différence ?

2 Fraction normale dans l'hélium II

L'hélium (^{4}He) liquide en dessous de 2,17 K subit un changement de phase qui le fait passer dans une nouvelle phase (toujours liquide) dite hélium II. Les propriétés très particulières (très faible viscosité) de cette substance sont bien décrites par un modèle où l'on considère que l'hélium II est un mélange de deux fluides : une 'composante, dite superfluide, correspond à la partie non visqueuse, l'autre, dite normale fait l'objet de cet exercice.

Dans l'hélium II, les excitations de grandes longueur d'onde (faible impulsion) sont des ondes sonores, des "phonons". Un phonon d'impulsion $\vec{p}$ a une énergie

$$\varepsilon_{\vec{p}} = c \, |\vec{p}\,| \,, \tag{1}$$

où $c = 238$ m/s est la vitesse du son dans l'hélium II.

Dans tout ce qui suit on s'intéresse à un volume V d'hélium II à la température T et on va considérer que le spectre des excitations consiste en une unique branche décrite par (1).

Ces excitations, dues à l'agitation thermique, forment un "gaz de phonons" qui constitue la partie normale de l'hélium II : ce gaz est responsable des propriétés thermodynamiques à basse température (question **3/**) et également de la disparition graduelle de la superfluidité lorsque la température augmente (question **4/**).

1/ On rappelle que, dans un liquide, les phonons sont des modes longitudinaux n'ayant qu'une seule polarisation possible. Justifier brièvement (mais complètement) l'équation suivante qui donne le nombre moyen de phonons ayant une position et une impulsion données (à d^3r et d^3p près) :

$$d^6 N(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{d^3r \, d^3p}{h^3} \, n(\varepsilon_{\vec{p}}) \,, \quad \text{où} \quad n(\epsilon) = \frac{1}{\exp(\beta\epsilon) - 1} \,,$$

h étant la constante de Planck, k_B la constante de Boltzmann et $\beta = (k_B T)^{-1}$,

2/ Soit $\bar{E}$ l'énergie moyenne du système. Écrire $\bar{E}$ sous forme d'une intégrale dans l'espace des phases, puis calculer $\bar{E}$ en fonction de V, T et c (cf. annexe en fin de problème).

3/ On définit la chaleur spécifique par unité de masse :

$$c_V = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_V \ ,$$

où $M = \rho V$, ρ étant la masse volumique de l'hélium : $\rho = 0,1455$ g/cm^3.

Calculer explicitement c_V et comparer avec les résultats expérimentaux pour $0 < T < 0,6$ K : $c_V = (0,0204 \pm 0,0004)\, T^3$ (où T est exprimé en K et c_V en J.g^{-1}.K^{-1}).

4/ Dans l'hélium II, on considère donc qu'il y a une partie superfluide et une partie "normale" constituée par le gaz de phonons. Des expériences de mesure de viscosité permettent de déterminer la masse volumique du superfluide ρ_s et celle du fluide normal ρ_n.

Pour déterminer ρ_n théoriquement, on considère une configuration où les phonons sont tous animés d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport au superfluide (qui est lui au repos). On écrit alors leur impulsion totale sous la forme :

$$\vec{P} = M_n\, \vec{v}\,. \tag{2}$$

Cette équation est une définition de M_n : la masse totale du fluide normal est la masse inertielle du gaz de phonons. Elle permet de déterminer $\rho_n = M_n/V$.

(a) Des considérations d'ordre général montrent (et nous l'admettrons ici) que l'énergie d'un phonon d'impulsion $\vec{p}$ dans un système en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}$ est :

$$\varepsilon^*_{\vec{p}} = \varepsilon_{\vec{p}} - \vec{p}.\vec{v}\ .$$

L'impulsion totale du gaz de phonons est alors donnée par :

$$\vec{P} = V \int \frac{d^3p}{h^3}\, \vec{p}\, n(\varepsilon^*_{\vec{p}}) \simeq -V \int \frac{d^3p}{h^3}\, \vec{p}\, (\vec{p}.\vec{v}\,)\, \left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon_{\vec{p}}} \ . \tag{3}$$

Justifier l'approximation dans le membre de droite de (3). Dans quel régime de vitesse est-elle valable ?

(b) On prend désormais $\vec{v} = v\, \vec{e}_z$. Montrer que pour une fonction $f(|\vec{p}\,|)$ ne dépendant que du module de $\vec{p}$, les intégrales

$$\int d^3p\ p_x\ p_z f(|\vec{p}\,|) \quad \text{et} \quad \int d^3p\ p_y\ p_z f(|\vec{p}\,|)$$

sont nulles. En déduire que $\vec{P}$ peut se mettre sous la forme (2), où l'on exprimera M_n sous forme d'une intégrale dans l'espace des impulsions.

(c) Calculer explicitement l'intégrale définissant M_n (on travaillera en coordonnées sphériques). Comparer avec les résultats expérimentaux donnant, pour $0 < T < 0,6$ K : $\rho_n/\rho = 1,24 \times 10^{-4}\, T^4$ (où T est exprimé en K).

Annexe:

- Intégrales utiles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3\, dx}{\exp(x) - 1} = \frac{\pi^4}{15}\ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^4\, e^x\, dx}{[\exp(x) - 1]^2} = \frac{4\,\pi^4}{15}\ , \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos^2\theta = \frac{2}{3}\ .$$

- $h = 6,63 \times 10^{-34}$J.s et $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K.