

## EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE

*Durée : 3 heures**Les calculatrices sont autorisées.**Barème approximatif : Premier exercice 2 points ; deuxième exercice 8 points ; troisième exercice 10 points .*

L'hélium existe sous la forme de deux isotopes :  ${}^3\text{He}$  qui est un fermion et  ${}^4\text{He}$  qui est un boson. À basse température ces deux isotopes sont liquides, et à faible concentration d' ${}^3\text{He}$  dans une solution de mélange  ${}^3\text{He}/{}^4\text{He}$ ,  ${}^3\text{He}$  "flotte" à la surface, formant, en première approximation, un gaz parfait de fermions à deux dimensions. L'ensemble des exercices de cette épreuve traite des diverses propriétés d'un tel système. Ils doivent être traités dans l'ordre (exercice I, puis II, puis III).

**Exercice I : Calcul de la densité d'états.**

On considère donc un gaz constitué de  $N$  fermions indépendants ( $N \gg 1$ ), de masse  $m$  et de spin  $1/2$ , libres mais astreints à se déplacer sur une surface d'aire  $A$ . Les dimensions macroscopiques de cette surface autorisent l'approximation continue et l'on admet, de plus, que les degrés de translation peuvent être décrits classiquement. Soit  $\Phi(\varepsilon)$  le nombre d'états **individuels** dont l'énergie est inférieure à  $\varepsilon$ .

1/ Quelle est la dimension de l'espace des phases pour une particule ? Quel est le volume d'une cellule élémentaire de l'espace des phases ?

2/ Montrer que  $\Phi(\varepsilon) = m A \varepsilon / (\pi \hbar^2)$  si  $\varepsilon \geq 0$  et  $\Phi(\varepsilon) = 0$  sinon.

3/ En déduire l'expression de la densité d'états individuels  $\rho(\varepsilon)$ . Que vaut  $\rho(\varepsilon)$  si  $\varepsilon < 0$  ?

**Exercice II : Énergie et capacité calorifique.**

On suppose désormais que le gaz bidimensionnel de  $N$  fermions est en équilibre thermique avec un thermostat à la température  $T$ , et que  $N$  est assez grand pour que la limite thermodynamique soit atteinte.

1/ Rappeler sans démonstration l'expression du nombre moyen  $\overline{N}^F(\varepsilon_\lambda)$  de fermions occupant un état individuel  $|\varphi_\lambda\rangle$  d'énergie  $\varepsilon_\lambda$ .

2/ Écrire la relation (implicite) qui permet de déterminer le potentiel chimique  $\mu(T)$  à l'approximation de la densité d'états continue (déterminée en I.3/).

3/ On suppose, dans un premier temps, que l'approximation de température nulle est valable.

(a) Calculer le potentiel chimique  $\mu(0)$  et la température de Fermi  $T_F = \mu(0)/k_B$  en fonction de  $m$ ,  $N$  et  $A$ .

(b) Calculer l'énergie  $E(T = 0)$  du gaz. En déduire l'énergie moyenne d'un atome d' ${}^3\text{He}$  à 0 K.

4/ On se place maintenant à température  $T$  non nulle et on pose  $\mu \equiv \mu(T)$ .

(a) En utilisant l'intégrale donnée en annexe, montrer que

$$N = \frac{m A k_B T}{\pi \hbar^2} \ln[1 + \exp(\beta \mu)] .$$

(b) Montrer que  $\mu$  est alors donné par  $\exp\{\beta \mu\} = \exp\{T_F/T\} - 1$ . Exprimer  $\mu$  en fonction de  $T$  et  $T_F$ .

5/ On se place, dans un premier temps à  $T \gg T_F$ .

(a) Que vaut  $E(T)$  ? (Cette question n'appelle aucun calcul).

(b) Soit  $C_A(T)$  la capacité calorifique à surface et nombre de particules constants. Donner son expression pour le domaine  $T \gg T_F$ .

6/ On se place dans cette question dans la limite  $T \ll T_F$ .

(a) Donner l'expression de  $E(T)$  en négligeant les termes d'ordre  $e^{-T_F/T}$  (on utilisera les résultats de l'annexe).

(b) En déduire le comportement de  $C_A(T)$  dans le domaine  $T \ll T_F$ .

(c) Des mesures de chaleur spécifique ont donné, à basse température, et pour une densité surfacique d' $^3\text{He}$ ,  $N/A = 3 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-2}$  :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{C_A(T)}{A k_B T} = 0,1 \pm 0,01 \text{ K}^{-1} \text{ \AA}^{-2} . \quad (1)$$

On a spécifié la valeur de  $N/A$  car l'expérience montre que le résultat dépend de la densité surfacique. On donne pour l' $^3\text{He}$  :  $\hbar^2/(m k_B) = 16,1 \text{ K} \cdot \text{\AA}^2$ . Peut-on comprendre le résultat (1) dans le cadre de notre modèle ? Nous reviendrons sur ce point plus tard.

**Exercice III : Magnétisme d'un gaz bi-dimensionnel d' $^3\text{He}$** [Dans la direction définie par l'axe  $Oz$ ]

On applique à présent au gaz de fermions un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  avec  $B > 0$ . Chaque atome possède un moment magnétique  $\vec{m} = 2 \mu_B \vec{S}/\hbar$  où  $\vec{S}$  est l'observable de spin et  $\mu_B$  le magnéton de Bohr (avec  $\mu_B < 0$ ). Les énergies d'un atome sont déplacées d'un facteur  $|\mu_B| B$  pour les spins parallèles à  $\vec{B}$  et de  $-|\mu_B| B$  pour les spins anti-parallèles à  $\vec{B}$ .

1/ Justifier rapidement cette proposition.

2/ Soient  $\bar{N}_+$  et  $\bar{N}_-$  les nombres moyens d'atomes respectivement dans l'état de spin  $|+\rangle_z$  et l'état  $|-\rangle_z$ . Justifier les définitions suivantes :

$$\bar{N}_\pm = \frac{N}{2 k_B T_F} \int_0^{+\infty} d\varepsilon \frac{1}{\exp\{\beta[\varepsilon \pm |\mu_B| B - \tilde{\mu}]\} + 1} ,$$

où  $\tilde{\mu} \equiv \mu(B, T)$  est le potentiel chimique en présence du champ magnétique.

3/ On définit alors l'aimantation  $M(T)$  comme le moment magnétique total selon  $Oz$  des  $N$  atomes. Donner sa définition en fonction de  $\bar{N}_+$ ,  $\bar{N}_-$  et  $|\mu_B|$ .

4/ On se place tout d'abord à *température nulle*.

- (a) Montrer que  $\mu(B, T = 0) = \mu(B = 0, T = 0)$ , potentiel chimique déterminé en l'absence de champ magnétique.
- (b) Calculer  $M(T = 0) \equiv M_0$  en fonction de  $B$ ,  $A$ ,  $\mu_B$  et  $m$ .

5/ On se place désormais à une température  $T \neq 0$  quelconque. En utilisant le résultat établi en II-4-a montrer que

$$\bar{N}_+ = \frac{N}{2} \frac{T}{T_F} \ln\{1 + \exp[\beta(\tilde{\mu} - |\mu_B|B)]\}.$$

Donner l'expression correspondante de  $\bar{N}_-$ .

6/ Rappeler l'équation qui permet de déterminer  $\tilde{\mu}$ . On suppose désormais que  $\beta|\mu_B|B \ll 1$  (approximation des champs faibles).

- (a) Montrer que les développements limités à l'ordre un de  $\bar{N}_+$  et  $\bar{N}_-$  s'écrivent :

$$\bar{N}_\pm = \frac{N}{2} \frac{T}{T_F} \left[ \ln(1 + e^{\beta\tilde{\mu}}) - (\pm) \frac{\beta|\mu_B|B}{1 + e^{-\beta\tilde{\mu}}} + \mathcal{O}(B^2) \right].$$

- (b) Montrer qu'au premier ordre en  $|\mu_B|B/\tilde{\mu}$ , le potentiel chimique n'est pas déplacé par la présence du champ magnétique :  $\mu(B, T) \simeq \mu(0, T)$  calculé en II-4-b. Dans tout ce qui suit, on reste en champ faible et on pourra donc remplacer (partout où il apparaît)  $\tilde{\mu}(T)$  par  $\mu(T)$ .

7/ En déduire l'expression de  $M(T)$  (valable en champ faible) :

$$M(T) = M_0 \left[ 1 - e^{-T_F/T} \right]. \quad (2)$$

Écrire les comportements asymptotiques de  $M(T)/M_0$  dans les domaines des hautes [ $T \gg T_F$ ] et basses [ $T \ll T_F$ ] températures.

8/ Comparaison avec l'expérience. Des expériences de résonance magnétique nucléaire ont permis de mesurer, en fonction de la température, l'aimantation du gaz d' $^3\text{He}$  flottant à la surface d'un film d' $^4\text{He}$ . Les résultats pour le rapport  $M(T)/M_0$  sont représentés sur la figure 1 en fonction de  $1/T$ .

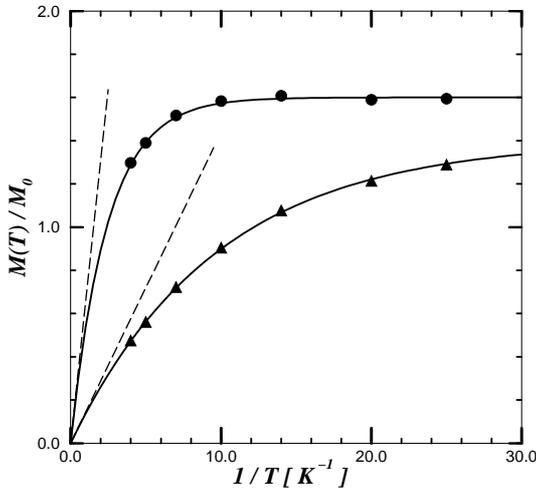


Figure 1 : Aimantation de l'échantillon en fonction de  $1/T$ . Les cercles noirs et les triangles sont des résultats expérimentaux correspondant à des densités surfacique d' $^3\text{He}$   $N/A$  différentes. Les courbes en trait plein représentent  $M^*(T)/M_0$  calculé d'après (2) avec une masse effective ajustée pour coller à l'expérience. Les droites en tirets sont leurs tangentes à l'origine.

On observe un écart à l'unité de  $M(T)/M_0$  aux basses températures que l'on interprète en introduisant une masse effective pour les atomes d' $^3\text{He}$  : la masse  $m$  est remplacée partout (y compris dans l'expression de  $T_F$ ) par une masse effective  $m^*$ . On notera désormais avec un astérisque toutes les données calculées avec la masse effective :  $T_F^* = T_F(m^*)$ ,  $M^*(T)$ ,  $M_0^*$ ... Attention, sur la figure, les données sont normalisées avec  $M_0$  calculée avec la masse réelle, il convient donc de comparer les résultats expérimentaux avec  $M^*(T)/M_0$ .

- (a) Donner la limite de  $M^*(T)/M_0$  quand  $T \rightarrow 0$  et montrer que d'après les résultats expérimentaux, la masse effective  $m^*$  dépend de la densité superficielle  $N/A$  de  $^3\text{He}$ .
- (b) Les deux courbes en trait plein représentent  $M^*(T)/M_0$  calculé d'après l'équation (2) rectifiée par l'introduction d'une masse effective. On constate qu'elle reproduit bien les résultats expérimentaux sur toute la gamme des températures à condition de considérer  $m^*$  comme un paramètre ajustable. Estimer, d'après l'allure des courbes expérimentales, le rapport  $m^*/m$  dans les deux expériences représentées sur la figure 1.
- (c) Montrer que la pente à l'origine de  $M^*(T)/M_0$  en fonction de  $x = 1/T$  ne dépend pas de  $m^*$  et permet donc de déterminer la densité superficielle  $N/A$ .
- (d) Les pentes à l'origine des courbes d'aimantation relevées sur la figure 1 sont  $M^*(T)/M_0 \simeq 0.67/T$  et  $0.14/T$  (où  $T$  est exprimé en K). Évaluer alors d'après les résultats des deux expériences les densités superficielles utilisées (on rappelle que pour  $^3\text{He}$ ,  $\hbar^2/(m k_B) = 16,1 \text{ K}\cdot\text{Å}^2$ ). Exprimer les résultats en  $\text{m}^{-2}$ .
- (e) Vous avez certainement trouvé en analysant les données de la figure 1, que pour une densité superficielle d' $^3\text{He}$  de l'ordre de  $N/A \simeq 3 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-2}$ , la masse effective vaut  $m^*/m \simeq 1,4$ . Reprenez alors la question II-6-c.
- (f) Commentez la validité du modèle décrivant  $^3\text{He}$  comme un système de fermions libres avec une masse effective. Quelle est d'après vous l'origine de cette masse effective ?

### ANNEXE :

Soit  $z$  un réel positif, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + z^{-1} \exp(x)} = \ln(1 + z) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + z^{-1} \exp(x)} = \frac{1}{2} [\ln(z)]^2 + \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right).$$