L3 et Magistère 1ère année 23 mai 2006

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Durée : 3 heures

Les documents et téléphones portables sont interdits.
Les valeurs numériques de certaines constantes fondamentales sont rappelées en fin d'énoncé.
Barème approximatif : Partie A = 7 points ; partie B = 5 points ; partie C = 8 points.

Effets thermo-électronique et photo-électrique

Pour interpréter l'émission d'électrons par un métal, nous considérons un modèle dans lequel les N électrons libres forment un gaz de particules sans interaction, les ions du cristal créant un puits de potentiel uniforme, de profondeur V_0 (cf. figure 1). Les électrons ayant une énergie suffisante peuvent quitter le métal.

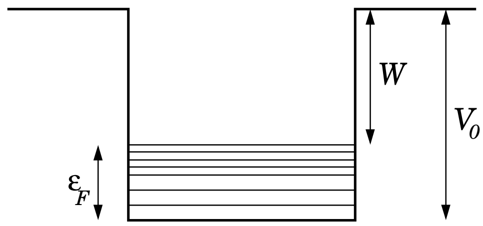

FIG. 1 –

Après une partie consacrée à des calculs préparatoires, la partie B traitera du phénomène thermo-électronique et la partie C portera sur le rôle de la température dans l'effet photo-électrique.

Partie A. Calculs préparatoires.

On considère donc un gaz d'électrons (de masse m et de charge q) contenus dans une boîte de volume V à la température T. La limite thermodynamique est supposée valide.

1/ Justifier brièvement l'expression suivante qui donne le nombre d'électrons $\mathrm{d}^6N(\vec{r},\vec{p})$ ayant une impulsion égale à $\vec{p}$ (à d^3p près) et une position $\vec{r}$ (à d^3r près) :

$$\mathrm{d}^6N(\vec{r},\vec{p}) = 2\,\frac{\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3p}{h^3}\,\frac{1}{\exp[\beta(\frac{p^2}{2m}-\mu)]+1}\ , \tag{1}$$

où h est la constante de Planck et $\beta = (k_BT)^{-1}$ (k_B étant la constante de Boltzmann). Dans la suite du problème on admettra que la variation du potentiel chimique μ avec T est négligeable, et on posera $\mu(T) \simeq \mu(0) = \varepsilon_F$ (énergie de Fermi).

2/ En déduire l'expression du nombre d'électrons $\mathrm{d}^3n(\vec{v})$ par **unité de volume** ayant une vitesse égale à $\vec{v} = \vec{p}/m$ à d^3v près (on portera une attention particulière à la relation entre les élements d'intégration d^3v et d^3p).

3/ Soit $\mathrm{d}n(v_z)$ le nombre d'électrons par unité de volume dont la composante v_z de la vitesse selon Oz est comprise entre v_z et $v_z + dv_z$. Calculer $\mathrm{d}n(v_z)$.

Indication : Pour intégrer sur v_x et v_y, on passera en coordonnées polaires $\rho = (v_x^2+v_y^2)^{1/2}, \varphi$ (cf figure 2 ci-contre). On pourra poser $u = \frac{\beta m}{2}\rho^2$ et remarquer que

$$\frac{1}{Ce^u+1} = \frac{e^{-u}}{C+e^{-u}}\ ,$$

dont la primitive est évidente.

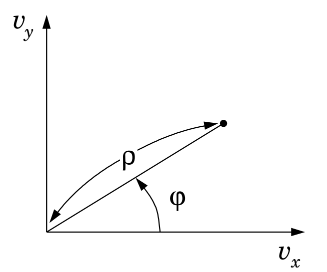

FIG. 2 –

4/ Montrer que le nombre $d^6N(\vec{v}\,)$ d'électrons ayant une vitesse $\vec{v}$ (à d^3v près) et qui traversent une surface d^2S normale à Oz pendant la durée dt est donné par

$$d^6N(\vec{v}\,) = d^3n(\vec{v}\,)\, v_z\, d^2S\, dt\ . \tag{2}$$

Exprimer alors la densité de courant élémentaire dJ_z associée aux électrons dont la composante normale de la vitesse est comprise entre v_z et $v_z + dv_z$ en fonction de $dn(v_z)$, q et v_z[1]. Dans toute la suite on ne s'intéressera qu'à la valeur absolue de la densité de courant et pas à son signe (ce qui revient à remplacer désormais q par $|q| = e$ dans l'expression de dJ_z).

5/ En déduire l'expression de dJ_z :

$$dJ_z = \frac{4\pi\, m\, e\, k_B T}{h^3}\ \ln\left[1 + e^{-\beta(\varepsilon_z - \varepsilon_F)}\right]\ d\varepsilon_z\ , \tag{3}$$

où l'on a posé $\varepsilon_z = \frac{1}{2} m v_z^2$. Cette expression servira de point de départ aux parties B et C du problème.

Partie B. L'émission thermo-électronique.

On étudie dans cette partie l'émission d'électrons par une cathode métallique chauffée.

1/ On suppose que les seuls électrons pouvant quitter le métal sont tels que $\varepsilon_z > V_0$.

(a) Écrire sous forme d'une intégrale l'expression de la densité de courant total $J_0 \equiv J_z$ des électrons pouvant quitter le métal.

(b) Calculer J_0 en admettant que le travail de sortie $W = V_0 - \varepsilon_F$ est très grand devant $k_B T$.

2/ Montrer que le résultat final peut se mettre sous la forme (loi de Richardson-Dushman)

$$J_0 = A\, T^2\, e^{-W/k_B T}\ . \tag{4}$$

Donner l'expression de A. Calculer sa valeur numérique (on précisera les unités).

3/ La figure 3 ci-contre représente l'émission thermo-électronique d'un filament de tungstène en fonction de la température [d'après A. J. Ahearn, Phys. Rev. **44**, 277 (1933)]. Le symbole U.S.I. signifie "unités du système international". Montrer que la loi de Richardson-Dushman est en accord qualitatif avec les données et déterminer la valeur du travail de sortie en eV. Comparer la valeur que vous obtenez avec celle qui est donnée dans le tableau page suivante. Commentaires.

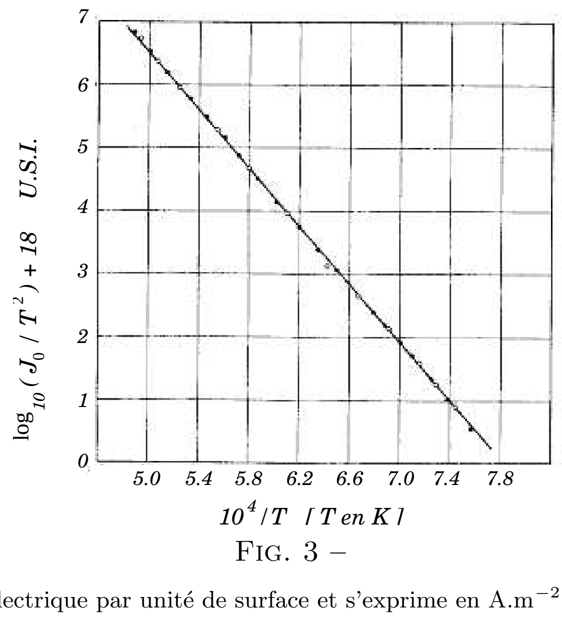

FIG. 3 –

[1] On rappelle qu'une densité de courant est un courant électrique par unité de surface et s'exprime en $A.m^{-2}$.

Le tableau ci-contre donne quelques résultats expérimentaux issus de l'étude de $J_0(T)$ pour quelques systèmes. Les valeurs pour A sont systématiquement inférieures à la valeur théorique que vous venez d'obtenir (question B.2). Quel(s) mécanisme(s) pourrai(en)t expliquer ces écarts ?

cathode	Palladium	Tungstène	LaB_6	Tantale
A (U.S.I.)	$6{,}0\times10^5$	$7{,}5\times10^5$	4×10^5	$3{,}7\times10^5$
W (eV)	4,97	4,5	2,4	4,13

4/ L'hypothèse faite en B.1.b est-elle justifiée, sachant que les mesures ont été faites pour des températures inférieures à 1500 K ?

Partie C. Influence de la température sur l'effet photo-électrique.

Dans cette dernière partie, on étudie l'effet photo-électrique et l'on suppose que le métal reçoit un faisceau incident de photons d'énergie $h\nu$ dont l'absorption va permettre aux électrons du métal de franchir la barrière de potentiel qui représente la surface du métal (que l'on supposera normale à Oz).

I. Approximation de température nulle. Dans un premier temps, comme $k_BT \ll \varepsilon_F$, on fait l'approximation $T = 0$.

1/ Montrer que $\mathrm{d}J_z$ [équation (3)] est donné par

$$\mathrm{d}J_z = \begin{cases} \frac{4\pi me}{h^3}\,(\varepsilon_F - \varepsilon_z)\,\mathrm{d}\varepsilon_z & \text{si} \quad \varepsilon_z < \varepsilon_F \ , \\ 0 & \text{si} \quad \varepsilon_z > \varepsilon_F \ . \end{cases} \tag{5}$$

2/ On supposera dans toute cette partie C que seule la composante ε_z de l'énergie d'un électron est modifiée par l'absorption d'un photon. Comme dans la partie B, seuls les électrons ayant acquis une énergie supérieure à V_0, (ici grâce à l'absorption d'un photon), pourront quitter le métal. En déduire qu'il existe une fréquence seuil ν_0 (que l'on définira) telle que des photons d'énergie $h\nu < h\nu_0$ ne peuvent pas "déclencher" un effet photo-électrique.

3/ On se place donc dans le cas $\nu > \nu_0$. Calculer la densité de courant totale $J_0(\nu)$ des photo-électrons en supposant que chaque électron absorbe un et un seul photon. Exprimer le résultat en fonction de ν, de ν_0 et de diverses constantes fondamentales.

II. On suppose désormais $T \neq 0$.

1/ Donner, sous forme d'une intégrale, l'expression de $J_T(\nu)$, densité de courant de photo-électrons.

2/ Montrer qu'il est possible de mettre ce résultat sous la forme

$$J_T(\nu) = A\,T^2\,\phi(\delta) \ , \tag{6}$$

où A a été calculé à la question B.2, et où $\phi(\delta)$ est une fonction définie par

$$\phi(\delta) = \int_0^\infty \mathrm{d}x \, \ln\left[1 + e^\delta\, e^{-x}\right] \ . \tag{7}$$

On définira δ.

3/ En intégrant par parties, montrer que

$$\phi(\delta) = \int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x}{\exp(x-\delta)+1} \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, f(x,\delta) \ . \tag{8}$$

La fonction $f(x, \delta)$ a la même “structure mathématique” que le facteur de Fermi dont vous avez étudié les propriétés. À partir de cette remarque, il est possible d'étudier quelques régimes asymptotiques du courant de photo-électrons.

4/ On suppose $\delta \gg 1$. Montrer que ceci correspond à l'approximation de température nulle, et retrouver le résultat obtenu en C.I.3 [indication: après avoir représenté $f(x, \delta)$ en fonction de x pour $\delta \gg 1$, calculer $\phi(\delta)$ à ce niveau d'approximation].

5/ On suppose que $\nu = \nu_0$. Calculer $J_T(\nu_0)$. On rappelle que $\int_0^\infty x(e^x + 1)^{-1}\mathrm{d}x = \pi^2/12$.

6/ On suppose $\nu < \nu_0$ avec $h|\nu - \nu_0| \gg k_B T$.

(a) Montrer que dans ces conditions $\phi(\delta) \simeq \exp(\delta)$ [indication : il pourra être plus facile ici de travailler avec l'expression (7) qu'avec (8)].

(b) En déduire l'expression de $J_T(\nu)$.

(c) Pouvez-vous expliquer brièvement pourquoi il est possible d'obtenir un courant photo-électrique en dessous du seuil photo-électrique ?

7/ La figure 4 ci-dessous [d'après L.A. DuBridge et W.W. Roehr, Phys. Rev. **39**, 99 (1932)] représente le courant photo-électrique issu d'une plaque de Palladium, mesuré pour diverses fréquences ν et diverses températures [diagramme de Fowler]. La courbe en trait continu correspond à un ajustement obtenu à partir de l'équation (6).

(a) La théorie vous semble-t-elle rendre compte de ces mesures ?

(b) On peut en déduire par un ajustement de la courbe, la valeur du travail de sortie W pour le Palladium. On obtient $W = 4,97$ eV. Commentaire.

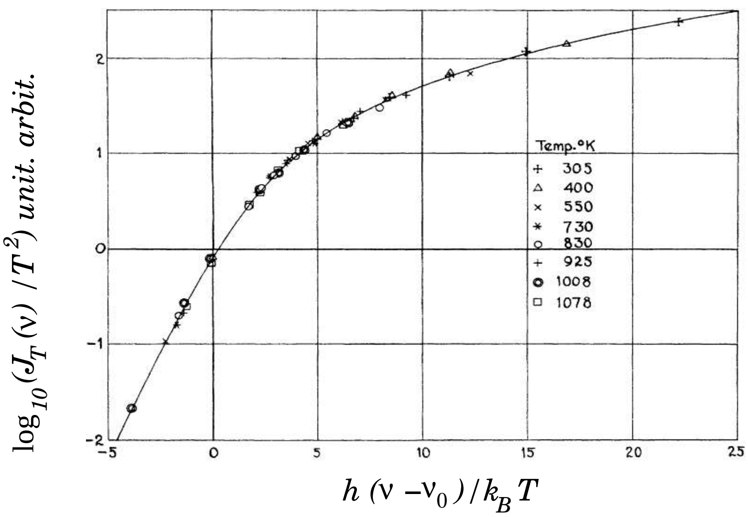

FIG. 4 –

Données:
$m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C, $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s,
$k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, 1 eV$/k_B$ = 11600 K, $\log_{10}(x) = \ln(x)/\ln(10)$.