Licence et Magistère 1ère année 2 septembre 2005

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Durée : 2 heures 30

Les portables, documents ne sont pas autorisés.

On considère, dans un premier temps un semi-conducteur pur, de volume V dont la densité d'état $\rho(\varepsilon)$ est donnée sur la Figure 1. Elle est constante et égale à g_0 aussi bien dans la bande de valence que dans la bande de conduction. Ces bandes sont séparées par une énergie ε_g, et ont pour largeurs respectives ε_v et ε_c. Soit N le nombre total d'électrons du système et T la température. On suppose atteinte la limite thermodynamique.

A - Etude à température nulle

1. Rappeler l'allure à $T = 0K$ et le sens physique du facteur de Fermi-Dirac.
2. Donner la répartition des électrons entre les bandes de valence et de conduction à température nulle, et montrer que, dans ces conditions, $N = g_0\varepsilon_v$.

B - Etude à température non nulle

On admettra, a priori, que dans le domaine de température considéré :

$$\varepsilon_g - \mu \gg k_B T \quad \text{et} \quad \mu \gg k_B T \tag{1}$$

où $\mu = \mu(T)$ est le potentiel chimique à la température T.

1. On considère tout d'abord les électrons de la bande de conduction (BC).
   (a) Sous quelle forme simplifiée peut-on écrire le facteur de Fermi ?
   (b) Exprimer sous forme d'une intégrale, le nombre d'électrons N_c dans la bande de conduction.
   (c) Soit $n_c = N_c/V$ la densité volumique d'électrons dans cette bande. Montrer que
   $$n_c \simeq \mathcal{N}_e \; e^{-\beta(\varepsilon_g - \mu)}.$$
   On définira $\mathcal{N}_e$ en fonction de g_0, β, V et ε_c.
2. On considère maintenant la bande de valence (BV).
   (a) Montrer que le nombre moyen d'électrons occupant un microétat de cette bande est donné par :
   $$\overline{N}_\lambda \simeq 1 - e^{\beta(\varepsilon - \mu)}.$$

(b) Soit N_v le nombre d'électrons dans la bande de valence. Calculer N_v en fonction de N, g_0, β, μ et ε_v.

C - Dans cette partie, on considère un cristal de Silicium qui serait absolument pur.

1. Quelle relation relie N_c, N_v et N ?
2. En déduire l'expression du potentiel chimique μ en fonction de T, ε_g, ε_v et ε_c.
   Où se trouve le potentiel chimique à $T = 0K$?
3. Exprimer n_c en fonction de g_0, β, V, ε_c, ε_v et ε_g.
4. Applications numériques. On se place à $T = 300$ K(ce qui correspond à $k_B T = 0,026$ eV)

   (a) - Calculer le potentiel chimique μ (exprimer le résultat en eV).
   - Calculer $\mathcal{N}_e$ puis n_c.
   On donne pour cela

$$\varepsilon_c = \varepsilon_v = 5 \text{ eV} \quad ; \quad \varepsilon_g = 1,1 \text{ eV} \quad n = \frac{N}{V} = 5\ 10^{27} \text{ m}^{-3} .$$

   (b) Vérifier, a postériori, que les approximations faites ci-dessus étaient bien justifiées.

D - Dans cette dernière partie, on admet qu'en réalité, le semi-conducteur contient des impuretés et qu'il est représenté par le modèle suivant :

- La bande de conduction est décrite par le même modèle que précédemment. L'expression obtenue en B-1-c) est toujours valable (les équations (1) sont toujours vérifiées) avec la valeur numérique de $\mathcal{N}_e$ obtenue en C-4-a).
- L'effet des impuretés est de créer un niveau donneur d'électrons. Ce niveau unique, d'énergie ε_d, est dégénéré N^* fois. Il est situé près du bas de la bande de conduction [cf. figure 2]. ε_d est donc très proche de ε_g. On suppose que le nombre d'électrons apportés par les impuretés est juste égal à N^*. Au zéro absolu, les N^* électrons se trouvent donc sur le niveau d'impureté et la bande de conduction est vide.
- La bande de valence, située très en dessous du niveau d'impureté, reste complètement pleine et a un effet négligeable.

1. Soit N_d le nombre moyen d'électrons occupant à $T \neq 0$ K le niveau d'impureté. Justifier brièvement l'expression suivante :

$$N_d = \frac{N^*}{e^{\beta(\varepsilon_d - \mu)} + 1} .$$

2. Les N^* électrons apportés par les impuretés se répartissent à $T \neq 0K$ entre le niveau d'impureté et la bande de conduction qui contient alors N_c électrons . En déduire la relation qui existe entre N^*, N_c et N_d.

3. On va en déduire l'expression de $z = e^{\beta\mu}$. Montrer qu'il résulte de la question précédente une équation du second degré en z dont on ne retiendra que la solution physique (on posera $n^* = N^*/V$).

4. On définit alors le cas limite des faibles dopages par la condition :

$$4 \, \frac{n^*}{\mathcal{N}_e} \, e^{\beta(\varepsilon_g - \varepsilon_d)} \ll 1 \ .$$

   (a) Montrer que cette hypothèse entraîne :

$$z = e^{\beta\mu} \approx \frac{n^*}{\mathcal{N}_e} \, e^{\beta\varepsilon_g} \ .$$

   On rappelle que $(1+x)^{1/2} \simeq 1 + x/2$ quand $x \to 0$.

   (b) Que devient alors la concentration n_c en électrons dans la bande de conduction ?

5. Applications numériques : $T = 300$ K(ce qui correspond à $k_B T = 0,026$ eV). On considère du silicium dopé à l'arsenic, à savoir que chaque atome d'arsenic fournit 1 électron. On donne :

$$n^* = 10^{17} \text{ électrons/m}^3 = 10^{17} \text{ impuretés/m}^3 \text{ et } \varepsilon_g - \varepsilon_d = 20 \text{ meV}.$$

   (a) L'approximation des dopages faibles faite en D.4) est-elle licite ?

   (b) Calculer n_c. Comparer ce résultat à celui obtenu en C.4.a) pour le cristal pur. Sachant qu'il est technologiquement difficile, voire impossible, d'obtenir un cristal contenant moins de 10^{17} impuretés/m^3, quelle remarque vous suggère cette comparaison ?

   (c) Finalement, l'utilisation de la formule donnée en B.1.c) pour n_c était-elle justifiée dans le cas présent ?

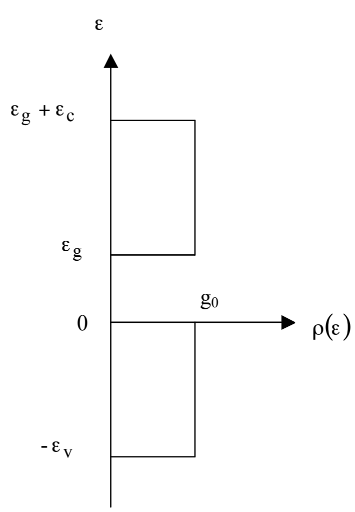

Figure 1

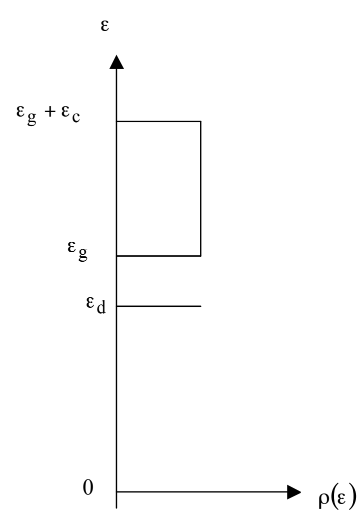

Figure 2