

TD de Physique Statistique n° 10
Physique Statistique du Rayonnement

Formule utile :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = \frac{\pi^4}{15}. \quad (1)$$

1 Rayonnement fossile.

Après le big-bang, la chaleur était si intense que les photons interagissaient continuellement avec la matière, empêchant la formation d'atomes et de molécules. Avec l'expansion de l'Univers, la température a diminué et les photons n'ont plus été suffisamment énergétiques pour ioniser la matière. Le rayonnement, qui jusque là était en équilibre thermique avec la matière, cessa pratiquement d'interagir avec elle et devint indépendant (on parle de "découplage" de la matière et du rayonnement). L'objet de ce problème est d'étudier l'évolution ultérieure de ce rayonnement que l'on qualifie de "fossile".

1/ On considère un gaz de photons occupant un cube d'arête L .

- (a) Chaque photon a une impulsion \vec{p} , une énergie $c|\vec{p}|$ (c est la vitesse de la lumière), une pulsation $\omega = c|\vec{p}|/\hbar$ et **deux** états possibles de polarisation. Déterminer la densité d'états $\rho(\omega)$ correspondante en fonction de ω , L et c .
- (b) On se place à la température T . Soit dN le nombre de photons dont la pulsation est comprise entre ω et $\omega + d\omega$. Montrer que

$$dN(L, \omega) = \frac{L^3}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{\exp\{\beta \hbar \omega\} - 1}, \quad (2)$$

2/ L'expansion de l'Univers induit une dilatation de toutes les distances. Ainsi, on a une loi d'échelle avec $L \rightarrow L' = \alpha L$ ($\alpha > 1$) et les longueurs d'onde évoluant selon la même loi, on a $\omega \rightarrow \omega' = \omega/\alpha$. Le nombre dN de photons qui était contenu dans le volume L^3 avec une pulsation comprise entre ω et $d\omega$ est alors contenu dans un volume L'^3 avec une pulsation comprise entre ω' et $\omega' + d\omega'$ (dN ne change plus, car après le découplage il n'y a plus d'absorption ou de création de photons par la matière). La vitesse de la lumière reste également constante. Montrer alors que $dN(L', \omega')$ obéit toujours à la loi (2) avec une température $T' = T/\alpha$.

On peut donc considérer (ce que l'on fera désormais) que le rayonnement, bien qu'isolé, évolue en restant dans des conditions d'équilibre thermique, avec une température qui décroît.

3/ Donner l'expression formelle de la grande fonction de partition des photons contenus dans le volume L^3 . En déduire que leur grand potentiel J se met sous la forme [utiliser (1)]

$$J = -\frac{\pi^2}{45} L^3 \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}. \quad (3)$$

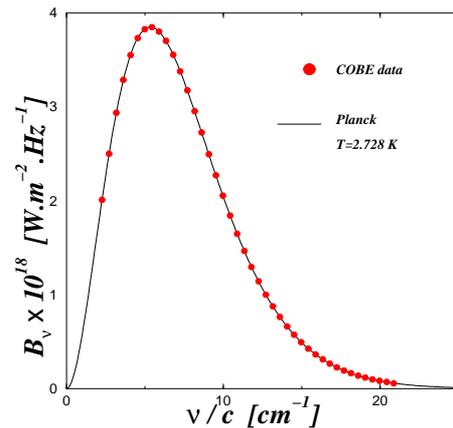
En déduire l'entropie des photons et montrer que cette entropie reste constante lors de l'expansion de l'Univers (c.a.d. lors d'une évolution $L \rightarrow L' = \alpha L$, $T \rightarrow T' = T/\alpha$).

4/ Soit $u(\omega)$ la densité d'énergie par unité de volume et de pulsation du gaz de photons (c'est à dire que $u(\omega)L^3d\omega$ est l'énergie des dN photons considérés précédemment).

- (a) Donner l'expression de $u(\omega)$ en fonction de T et ω .
- (b) Tracer l'allure de u en fonction de ω .

5/ On sait actuellement mesurer avec une grande précision la distribution $u(\omega)$ du rayonnement fossile (cf. figure ci-contre). On peut donc en déduire sa température comme suit.

- (a) Soit δ le réel solution de : $e^{-\delta} = 1 - \delta/3$ ($\delta = 2,82144\dots$). Donner l'expression de la pulsation ω_m qui rend $u(\omega)$ maximale en fonction de $k_B T$ et δ .
- (b) Les mesures donnent $\omega_m = 1,01 \times 10^{12}$ rad.s⁻¹. En déduire la température actuelle du rayonnement fossile.



Données du satellite COBE pour la quantité $B_\nu = \frac{c}{4\pi}u(\nu)$ en fonction de la fréquence ν

2 Chaleur spécifique des solides.

Le hamiltonien décrivant les vibrations d'un solide peut être écrit comme une somme d'oscillateurs harmoniques correspondants aux modes normaux de vibration du réseau cristallin. Chaque mode normal est une onde de déformation harmonique ; une fois quantifiés ces modes normaux donnent lieu à des quanta que l'on appelle phonons.

Comme un phonon est le quantum d'un certain oscillateur harmonique, il a une fréquence caractéristique ω et une énergie $\hbar\omega$. L'état du réseau où un phonon est présent correspond, dans la limite classique, à une onde de déplacement des atomes par rapport à leur position d'équilibre qui est de la forme : $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{U} \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)\}$ avec $k = \omega/c$ (c étant la vitesse du son).

1/ Déterminer la densité d'états $n(\omega)$ correspondante. Attention il y a un facteur 3 qui vient de la polarisation, car l'amplitude \vec{U} du vecteur déplacement peut prendre 3 directions.

2/ Le modèle de Debye fixe une fréquence de coupure ω_D telle que la densité d'états devienne : $n_D(\omega) = n(\omega)\Upsilon(\omega_D - \omega)$ (où Υ est la fonction de Heavyside). ω_D est fixée par la contrainte

$$\int_0^{\omega_D} n(\omega) d\omega = 3N . \tag{4}$$

Discuter cette contrainte, calculer la valeur de ω_D correspondante et montrer que l'on obtient (à des facteurs numériques sans dimension près) la même valeur en demandant que la longueur d'onde de vibration minimale des ondes sonores soit la distance interparticules.

3/ En déduire l'énergie E du solide et sa chaleur spécifique C_V en fonction de sa température. On tracera la courbe $C_V(T)$ et on fera apparaître la température de Debye $\Theta_D = \hbar\omega_D/k_B$ (dont on donnera l'ordre de grandeur) et la fonction de Debye $D(x)$:

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x dt \frac{t^4 e^t}{[\exp(t) - 1]^2} = \begin{cases} 1 - x^2/20 + \dots & (x \ll 1) \\ 4\pi^4/(5x^3) + \mathcal{O}(e^{-x}) & (x \gg 1) \end{cases} \quad (5)$$

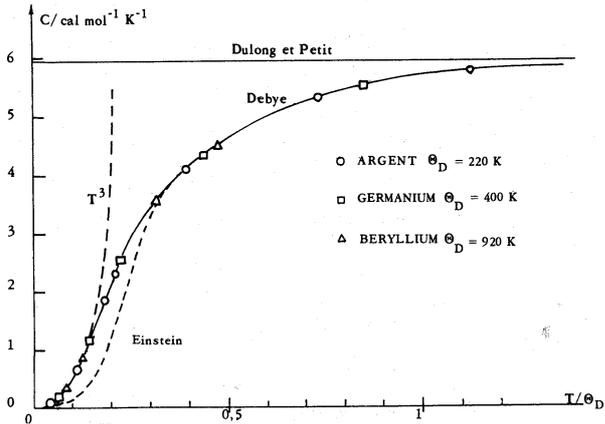


Figure 1. Résultats expérimentaux pour quelques matériaux ayant une structure cristalline assez simple pour que le spectre des phonons soit bien décrit par l'approximation de Debye.

Les valeurs de Θ_D qui permettent le meilleur ajustement entre théorie et expérience sont égales, à quelques % près, à celles que l'on calcule à partir des vitesses du son. Voici quelques résultats :

cristal	Pb	Ag	Zn	Cu	Al	NaCl	KCl
Θ_D [K] à partir de C_V	88	215	308	345	398	308	233
Θ_D [K] à partir de c	73	214	305	332	402	320	240

3 Hélium liquide.

Le modèle des phonons utilisé ci-dessus pour les solides est également valable pour l'hélium liquide. Cette substance est la seule qui reste liquide à basse température et c'est le seul liquide pour lequel le comportement en T^3 de $C_V(T \rightarrow 0)$ peut être testé.

1/ Déterminer c_V , la chaleur spécifique *par unité de masse* de l'hélium à basse température. On prendra garde que dans un liquide il n'existe que des phonons longitudinaux, et pas d'onde de cisaillement : d'où un facteur 1/3 dans $n(\omega)$ par rapport au cas des solides. En outre on se place à basse température et la notion de coupure de Debye est inutile dans ce cas.

On donne la masse volumique de l'hélium liquide $\rho = 0.1455 \text{ g/cm}^3$ et la vitesse du son $c = 238 \text{ m/s}$. Comparer avec les résultats expérimentaux de Wiebes *et al.* (1957) pour $0 < T < 0.6 \text{ K}$: $c_V = (0.0204 \pm 0.0004) T^3 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (où T est exprimée en K).

Estimer grossièrement la température de Debye pour l'hélium sachant que sa densité est $2.18 \times 10^{-2} \text{ atome.Å}^{-3}$. Sur quelle plage de température s'attend-on à ce que la loi en T^3 reste valable ?

2/ Contrairement à ce qui a été supposé dans la question précédente, l'hélium liquide n'a pas une relation de dispersion exactement linéaire, elle a l'allure suivante :

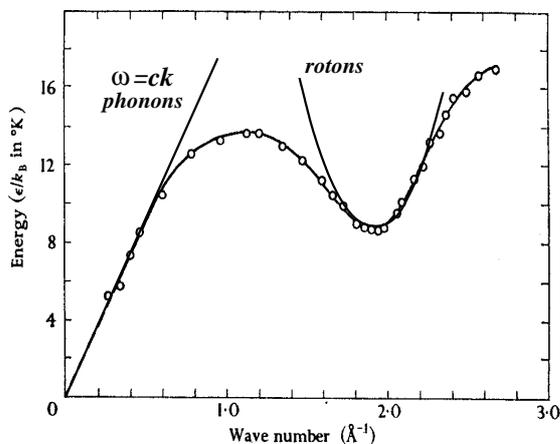


Figure 2. Relation de dispersion des excitations dans l'hélium liquide. Les cercles blancs reliés par une ligne continue sont les résultats des expériences de diffusion de neutrons de Henshaw et Woods (1961). Les courbes "phonons" et "rotons" correspondent au modèle schématique présenté dans le texte.

Le modèle "à la Debye" ne pourra pas s'appliquer pour toutes les gammes de température : bien que la relation de dispersion corresponde bien à grande longueur d'onde à un spectre de phonons (avec la pente correcte), elle est très altérée pour des longueurs d'ondes de l'ordre de l'espacement inter-atomique (cf. fig. 2), et une partie du spectre correspond à ce que l'on appelle des *rotons* avec localement :

$$\hbar\omega = \Delta + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m^*} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta/k_B = 8.65 \pm 0.04 \text{ K} , \\ k_0 = 1.92 \pm 0.01 \text{ \AA}^{-1} , \\ m^*/m = 0.16 \pm 0.01 . \end{cases} \quad (6)$$

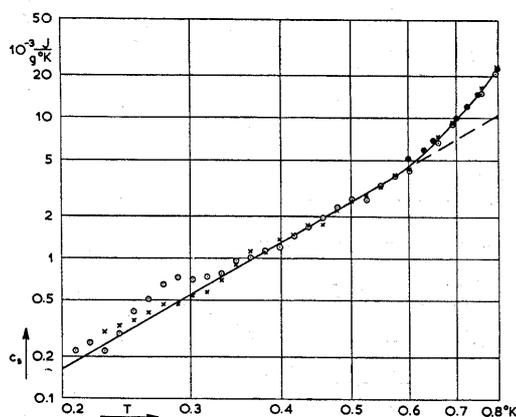
On remplace donc le spectre exact par un spectre schématique ayant deux branches, une branche de phonons et une branche de rotons (cf. figure 2).

On se place à des températures T suffisamment faibles pour que $k_B T \ll \Delta$ et $\hbar^2 k_0^2 / (2m^*)$. Montrer alors que la contribution des rotons à l'énergie interne est :

$$E_{\text{rot}}(T) \simeq \frac{V}{2\pi^2} e^{-\Delta/(k_B T)} \int_{-\infty}^{+\infty} dq (q + k_0)^2 \left(\Delta + \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} \right) e^{-\beta \hbar^2 q^2 / (2m^*)} . \quad (7)$$

En déduire que la contribution dominante des rotons à la capacité calorifique se comporte comme $T^{-3/2} \exp\{-\Delta/(k_B T)\}$.

Le modèle "phonons+rotons" explique bien l'écart à la loi en T^3 : à partir des valeurs de Δ , k_0 et m^* déterminées sur la figure ci-contre on obtient pour $C_V(T)$ la courbe en traits pleins ci-contre qui décrit bien les données expérimentales sur la chaleur spécifique de J. Wiebes *et al.* (1957).



4 Température des planètes.

Déterminer la température externe T_s du soleil, en admettant qu'il rayonne comme un corps noir, sachant que la puissance reçue sur terre est de 1.2 kW/m^2 , que la distance terre-soleil est de 8 minutes-lumière et que le rayon du soleil=109 rayons terrestres. On donne également la valeur de la constante de Stefan : $\sigma = \pi^2 k_B^4 / (60 \hbar^3 c^2) = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$.

En admettant que les planètes se comportent comme des corps noirs exposés au rayonnement du soleil, et que la puissance qu'elles rayonnent est exactement égale à celle qu'elles reçoivent du soleil, calculer leur température. Comparer aux résultats observés suivants :

	Mercure	Vénus	Terre	Lune	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Température [K] (côté éclairé)	600	740	295	400	250	120	90	65	50
Distance relative au Soleil	0.4	0.7	1	1	1.5	5.2	9.5	19.2	30

5 Rendement d'une lampe à incandescence.

1/ Rappeler la loi de Planck qui caractérise la façon dont l'énergie du champ électromagnétique se distribue à l'intérieur d'un corps noir en fonction des fréquences des ondes. En déduire la loi de Stefan-Boltzmann donnant la puissance rayonnée vers l'extérieur par un trou d'aire unité [utiliser (1)].

2/ Le filament d'une lampe à incandescence est porté à une température $T = 2500 \text{ K}$. Evaluer son rendement, c'est à dire la portion d'énergie rayonnée dans le visible. On donne les longueurs d'onde extrêmes du visible $\lambda_1 = 0.8 \mu\text{m}$ (à la limite de l'infra-rouge) et $\lambda_2 = 0.4 \mu\text{m}$ (à la limite de l'ultra-violet). On rappelle que $\int x^3 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$.

Quel est l'intérêt d'augmenter la température du fil ?