

TD de Physique Statistique n° 6
Introduction à la Théorie Cinétique

1 Pression d'un gaz

On considère un gaz en équilibre à la température T dans une enceinte de volume V . Sa densité dans l'espace des phases est $f(\vec{r}, \vec{p})$, elle est normalisée de telle sorte que $\int d^3r d^3p f = N$. On suppose que cette densité se met sous la forme $f(\vec{r}, \vec{p}) = n f(p)$ où $n = N/V$ est la densité dans l'espace physique et $p = |\vec{p}|$.

1/ Discuter la forme choisie pour $f(\vec{r}, \vec{p})$ et préciser la normalisation de $f(p)$. En déduire que $f(p)$ est la distribution de probabilité dans l'espace des impulsions.

2/ On veut calculer la force moyenne \vec{F} qui s'exerce sur un élément d'aire \mathcal{A} d'une paroi plane située en $x = 0$ (le gaz étant contenu du côté des x négatifs). Justifier que si l'on appelle $d\vec{\Pi}^{(+)}$ (resp. $d\vec{\Pi}^{(-)}$) la quantité de mouvement qui traverse en moyenne la paroi dans le sens des x croissants (resp. décroissants) pendant un temps dt on a :

$$\vec{F} = \frac{1}{dt} \left(d\vec{\Pi}^{(+)} - d\vec{\Pi}^{(-)} \right). \quad (1)$$

3/ Montrer que

$$d\vec{\Pi}^{(+)} = \frac{n \mathcal{A} dt}{m} \int_{p_x > 0} d^3p p_x \vec{p} f(p). \quad (2)$$

Calculer également $d\vec{\Pi}^{(-)}$ et en déduire l'expression de \vec{F} sous forme d'une intégrale dans l'espace des impulsions.

4/ Montrer que seule la composante de \vec{F} normale à la paroi est non nulle. En déduire que la force exercée sur la paroi est une force de pression et que la pression P est reliée à la vitesse moyenne $\langle \vec{v}^2 \rangle$ et à l'énergie cinétique E_c du gaz par :

$$P = \frac{1}{3} n m \langle \vec{v}^2 \rangle \quad \text{et} \quad P V = \frac{2}{3} E_c. \quad (3)$$

5/ Montrer que pour un gaz idéal $f(p) = (2\pi m k_B T)^{-3/2} \exp\{-\beta p^2/(2m)\}$. En utilisant (3) déterminer alors l'équation d'état du gaz.

6/ On considère à présent un gaz de *photons*. On rappelle que les photons d'impulsion \vec{p} ont une vitesse c et une énergie $\omega = c|\vec{p}|$. Comme précédemment on considère que les photons ont une densité uniforme et sont caractérisés par leur distribution d'impulsion $f(p)$. En suivant pour le gaz de photons les mêmes étapes que celles qui viennent d'être suivies pour le gaz classique, montrer que l'on obtient :

$$P V = \frac{1}{3} U_0,$$

où U_0 est l'énergie du système.

2 Effet Thermo-ionique

On considère N électrons sans interaction mutuelle, occupant un volume V à une température T . On veut décrire le gaz d'électrons en tenant compte d'un seul effet quantique : la dégénérescence de spin.

1/ Justifier alors que la fonction de partition canonique du système s'écrit :

$$Z = \frac{z^N}{N!} \quad \text{où} \quad z = 2 \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} \exp \left\{ -\frac{p^2}{2m k_B T} \right\}.$$

En déduire l'expression de l'énergie libre F et du potentiel chimique $\mu = (\partial F / \partial N)_{T,V}$. Tracer la variation de μ en fonction de la température. On fera intervenir la température T_0 à laquelle μ change de signe, on montrera que $k_B T_0 = [N/(2V)]^{2/3} h^2 / (2\pi m)$. Estimer l'ordre de grandeur de T_0 . On rappelle que dans un métal, la distance moyenne entre électrons est de l'ordre de quelques Å. On donne également $\hbar c = 200 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$ et $m c^2 = 0.5 \text{ MeV}$.

2/ La densité électronique dans l'espace des phases est notée $f(\vec{r}, \vec{p})$. On choisit de la normaliser comme suit : $\frac{1}{h^3} \int d^3r d^3p f = N$. montrer qu'ici $f(\vec{r}, \vec{p}) = 2 \exp\{\beta(\mu - \epsilon)\}$ où $\epsilon = p^2/(2m)$. Tracer l'allure de cette courbe en fonction de ϵ et discuter la validité de notre traitement des effets quantiques. En particulier, en dessous de quelle température viole-t-on le principe de Pauli ?

3/ Afin d'étudier l'émission d'électrons par une cathode métallique chauffée, on schématise le métal par une boîte. Le potentiel de boîte, supposé nul à l'intérieur du métal, n'est pas infini comme on l'a supposé précédemment, mais constant et égal à W . Bien que la température soit inférieure à T_0 , on admet que notre description reste valable et que les électrons atteignant la paroi avec une vitesse suffisante quittent le métal selon les lois de la dynamique classique (ces électrons sont ensuite remplacés, afin que le métal reste neutre).

- Donner l'expression du nombre d'électrons qui frappent un élément de la surface $x = 0$ durant le temps dt .
- Donner la valeur de J , densité de courant émis, sous forme d'une intégrale.
- Calculer cette intégrale. En supposant que μ tend vers une valeur finie lorsque $T \ll T_0$ ^a, vérifier la loi empirique de Richardson :
 $J = A T^2 \exp\{-B/T\}$.
- Comment expliquer le succès de notre approche ?

^aCe qui n'est pas vrai dans notre approche, mais découle naturellement d'un traitement quantique, cf. la suite du cours.

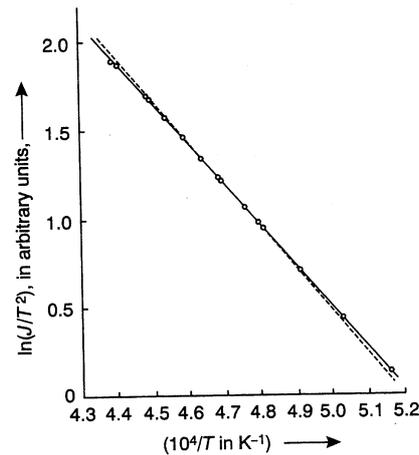


FIG. 8.6. Thermionic current from tungsten as a function of the temperature of the metal. The continuous line corresponds to $r = \frac{1}{2}$ while the broken line corresponds to $r = 0$, r being the reflection coefficient of the surface.

3 Effusion

Un gaz (monoatomique pour simplifier) est contenu dans un récipient de volume V . Un petit trou de surface δS est fait dans une paroi, par lequel les atomes du gaz peuvent s'échapper. Le trou est suffisamment petit pour que l'on puisse supposer que le gaz se trouve dans un état d'équilibre thermodynamique qui évolue lentement (on discutera cette hypothèse à la fin des questions 2 et 4). Cette hypothèse permet en particulier de définir une température et une pression, qui pourront dépendre "lentement" du temps.

1/ On suppose que le gaz est à température T . Les vitesses des atomes sont distribuées par la loi de Maxwell. Quel est alors le nombre d'atomes sortant du récipient pendant un intervalle de temps dt ? Discuter la dépendance de dN/dt en fonction de la densité N/V et de la température.

2/ **Effusion depuis une enceinte thermostatée.** Une enceinte se trouvant en contact avec un thermostat à température T est percée d'un trou. Les atomes s'échappent dans le vide.

- Comment le nombre N d'atomes contenus dans le récipient varie-t-il au cours du temps?
- Considérons un gaz d'Helium dans un récipient de 1 litre à température ambiante et initialement à 1 atm. Le trou a une surface de $\delta S = 1 \mu\text{m}^2$. Au bout de combien de temps le récipient aura-t-il perdu la moitié de ses atomes?

3/ **Enrichissement de l'Uranium.** On considère un gaz de molécules d'hexafluorure d'Uranium UF_6 contenu dans un récipient de volume V percé d'un petit trou. Les deux isotopes de l'uranium, ^{238}U et ^{235}U , sont naturellement dans des proportions 99.3% et 0.7%. On appelle N_1 (resp. N_2) le nombre de molécules contenant l'isotope ^{238}U (resp. ^{235}U).

- Montrer que la proportion des isotopes n'est pas la même dans le gaz ayant quitté le récipient par effusion.
- Comment faut-il procéder pour obtenir une proportion de 2.5% d' ^{235}U ? (sachant que la masse molaire du fluor est de 19 g).

4/ **Effusion depuis une enceinte adiabatique.** On souhaite reprendre la question 2 lorsque l'enceinte a des parois adiabatiques. On va voir qu'en perdant des atomes, le gaz perd également de l'énergie et sa température décroît.

- Calculer l'énergie perdue par le gaz pendant un intervalle de temps dt . On note dE/dt le taux d'énergie perdue par le gaz par unité de temps. Que vaut l'énergie perdue par atome, $(dE/dt)/(dN/dt)$? Commenter ce résultat.
- On pose $\lambda = \frac{\delta S}{V} \sqrt{k_B/(2\pi m)}$. Montrer que les évolutions de la température et du nombre de particules sont gouvernées par le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\lambda}{3} T^{3/2}, \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N T^{1/2}.$$

- Résoudre ces équations différentielles. Comparer le comportement à grand temps de N avec celui trouvé à la question 2.

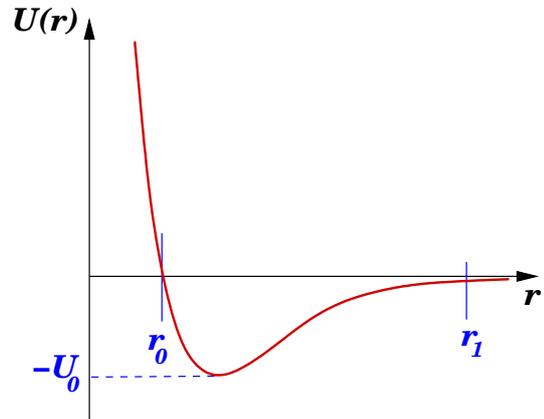
5/ **Effusion entre deux enceintes thermostatées.** Deux enceintes (1 et 2) contenant un gaz monoatomique de même nature sont séparées par une paroi adiabatique percée d'un petit trou. L'enceinte 1 (resp. 2) est en contact avec un thermostat à température T_1 (resp. T_2). Les pressions dans les enceintes sont notées P_1 et P_2 .

- (a) À quelle condition sur les températures et les pressions le système se trouve-t-il dans un état stationnaire ?
- (b) On se place dans la configuration stationnaire. On note I_N la valeur commune du courant de particules de l'enceinte 1 vers l'enceinte 2 et de l'enceinte 2 vers l'enceinte 1. Justifier qu'il existe alors un courant d'énergie I_E de la source chaude (disons l'enceinte à la température T_2) vers la source froide (l'enceinte à la température T_1). Exprimer I_E en fonction de I_N et $T_2 - T_1$.

4 Équation de van der Waals

On va ici illustrer l'intérêt pratique de l'interprétation cinétique de la pression (Eq. (3) ci-dessus) en dérivant de manière très empirique l'équation d'état de Van der Waals. On considère un gaz contenu dans une enceinte et on le sépare arbitrairement en une partie "paroi" (qui comprend les particules "proches" de la paroi) et une partie "volume" (les autres). Ces deux systèmes échangent perpétuellement de l'énergie et des particules, et sont en équilibre l'un avec l'autre.

Sur la base de l'allure générale du potentiel d'interaction à deux corps $U(r)$, justifier que pour un gaz non parfait, la valeur moyenne de l'énergie d'interaction par particule dans le volume (soit $\langle \varepsilon_{\text{int}} \rangle_{\text{vol}}$) est plus faible que celle de l'énergie d'interaction près de la paroi (soit $\langle \varepsilon_{\text{int}} \rangle_{\text{paroi}}$). Exprimer l'ordre de grandeur de la différence entre ces deux quantités en fonction de $n = N/V$, r_1 (portée du potentiel) et U_0 (valeur typique du potentiel dans sa région attractive, cf. dessin ci-contre).



En déduire alors que la valeur moyenne de l'énergie cinétique par particule loin d'une paroi (soit $\langle \varepsilon_{\text{cin}} \rangle_{\text{vol}}$) est plus faible que celle de l'énergie cinétique près d'une paroi (soit $\langle \varepsilon_{\text{cin}} \rangle_{\text{paroi}}$). Montrer qu'en ce qui concerne les ordres de grandeur, on a :

$$\langle \varepsilon_{\text{cin}} \rangle_{\text{vol}} \approx \langle \varepsilon_{\text{cin}} \rangle_{\text{paroi}} + n r_1^3 U_0 .$$

En reliant $\langle \varepsilon_{\text{cin}} \rangle_{\text{paroi}}$ à la pression (penser à l'équation de Bernoulli, formule (3) ci-dessus) et $\langle \varepsilon_{\text{cin}} \rangle_{\text{vol}}$ à la température, retrouver la forme générale de l'équation d'état de van der Waals :

$$(P + a \frac{N^2}{V^2})(V - Nb) = N k_B T .$$

Indiquer les dimensions et les ordres de grandeur typiques des paramètres a et b .

5 Annexe

On donne les intégrales suivantes (α est un réel positif) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}} , \quad \int_0^{+\infty} dx x e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha} , \quad \int_0^{+\infty} dx x^3 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha^2} .$$