TD de Physique Statistique n^o 8
Fermions

1 Gaz de fermions libres

On considère un gaz d'électrons "libres" (c'est à dire sans interaction mutuelle), placé dans une enceinte de volume V (gaz parfait de fermions pouvant représenter les électrons de conduction dans un métal par exemple).

1/ Rappeler l'expression de la densité d'états $\rho(E)$ d'une des particules du gaz. Quel est le nombre moyen de particules dans un état dont l'énergie est E ?

2/ En déduire l'équation (implicite) permettant de calculer le potentiel chimique puis l'énergie totale du gaz. On pourra introduire les intégrales de Fermi :

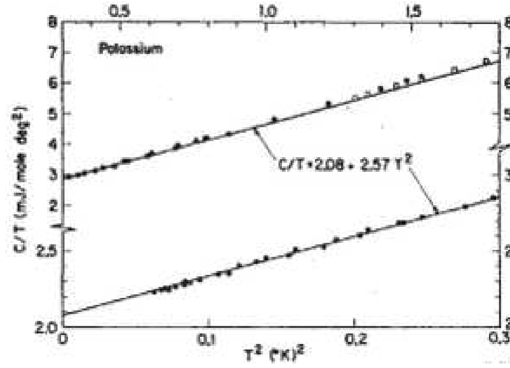
$$I_\nu(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\nu \,\mathrm{d}x}{\exp(x-\alpha)+1}$$

3/ On se place à température nulle (gaz de Fermi dégénéré). Calculer le potentiel chimique (énergie de Fermi) du gaz, son énergie. Comparer le comportement d'un GP de fermions à température nulle à celui d'un GP classique. Application numérique : pour le Cuivre on a $n \simeq 10^{29}$ électrons de conduction par m^3. Calculer l'énergie de Fermi E_F et l'ordre de grandeur de la vitesse d'un électron à $T = 0$ K.

4/ On se place maintenant à température faible mais non nulle. Calculer le potentiel chimique du gaz, puis son énergie. En déduire la capacité calorifique à basse température. Commenter. On utilisera les approximations au second ordre en $1/\alpha$:

$$I_{\frac{1}{2}}(\alpha) \simeq \frac{2}{3}\,\alpha^{3/2}\left(1+\frac{\pi^2}{8\alpha^2}\right) \;,$$

$$I_{\frac{3}{2}}(\alpha) \simeq \frac{2}{5}\,\alpha^{5/2}\left(1+\frac{5\pi^2}{8\alpha^2}\right) \;.$$



Capacité calorifique du potassium (W.H. Lien et N.E. Phillips, Phys. Rev. **133***, A1370 (1964)) dans un diagramme C/T en fonction de T^2. La partie linéaire de la dépendance de C selon T correspond à une masse effective électronique $m^* = 1{,}25\,m$. Savez-vous d'où vient le terme cubique ?*

2 Paramagnétisme de Pauli

On considère le gaz parfait d'électrons précédent mais cette fois plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On note $\vec{\mu}$ le moment magnétique d'un électron et on rappelle que $\vec{\mu} = g\mu_B\,\vec{S}/\hbar$ où $\mu_B = \frac{q\hbar}{2m} < 0$ est le magnéton de Bohr et $g \simeq 2$ pour un électron libre.

1/ Montrer que la densité d'états en énergie $\rho_\pm(E)$ des électrons de spin "up" et "down" ($S_z = \pm\hbar/2$) est

$$\rho_\pm(E) = \frac{1}{2}\rho(E \mp \mu B) \;\text{ avec }\; E \geq \pm\mu B\ ,$$

où $\mu = |g\,\mu_B/2|$ et $\rho(E)$ est la densité d'états en énergie calculée dans l'exercice 1.

2/ Calculer le niveau de Fermi E_F et le nombre d'électrons de spin "up" (resp. "down") $N_\pm$ à température nulle. On se placera, dans cette question et la suivante, dans la limite $\mu\,B \ll E_F(B=0)$ (souvent très bien vérifiée en pratique car $\mu_B = -5,8 \times 10^{-5}$ eV/tesla). On montrera en particulier que, dans cette limite, E_F est indépendant de B.

3/ En déduire que l'aimantation M à température nulle se met sous la forme

$$M = \frac{3\,N}{2}\,\mu\,\frac{\mu\,B}{E_F}\ .$$

Comparer avec le résulat équivalent pour des particules *discernables*, expliquer en particulier l'origine de l'énorme réduction de la magnétisation.

4/ Ecrire (formellement) les expressions de $N_\pm$ pour T quelconque puis celle de l'aimantation M. Discuter le comportement de M si $T \to \infty$ (plus présisément $T \gg T_F$). Montrer que dans cette limite le potentiel chimique μ_{ch} est donné par

$$\exp\{\beta\,\mu_{\text{ch}}\} = \frac{4(\beta\,E_F)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}\,\mathrm{ch}(\beta\,\mu\,B)} = 2\,N\,\frac{\lambda_T^3/V}{\mathrm{ch}(\beta\,\mu\,B)}\ ,$$

et que l'aimantation s'écrit $M = \mu\,N\,\mathrm{th}\,(\beta\,\mu\,B)$ comme on s'y attend (cf. TD5, section 1.2). Il est à noter que dans cette question, le spin des électrons est traité quantiquement (on n'a pas fait d'hypothèse sur les valeurs relatives de $k_B T$ et $\mu\,B$), mais le principe de Pauli n'est pas pris en compte ($T \gg T_F$).
Rappel : On donne l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\,\exp(-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3 Gaz de fermions relativistes

On considère un gaz de fermions de spin 1/2 relativistes, d'énergie $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, et totalement dégénéré ($T = 0$ K).

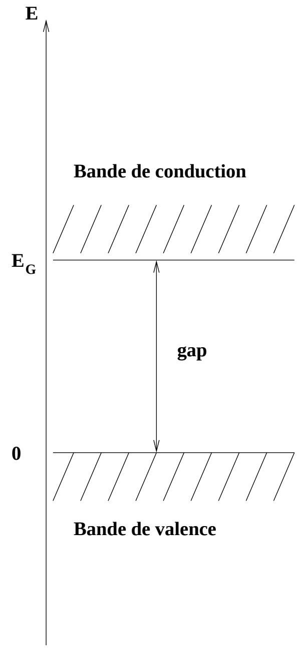
1/ Evaluer le moment de Fermi p_F du gaz sous l'approximation semi-classique (cf. TD2). Quel est le domaine de validité de cette expression ? Retrouver l'énergie de Fermi E_F dans le cas non relativiste et dans le cas ultra-relativiste.

2/ Calculer l'énergie du gaz dans le cas relativiste. Quelle est la limite dans le cas non relativiste ($p_F \ll mc$) et dans le cas ultra-relativiste ? On rappelle :

$$\int_0^X x^2\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left\{X(2X^2+1)\sqrt{1+X^2} - \ln\left(X + \sqrt{1+X^2}\right)\right\} = \begin{cases} \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{10} + \ldots & X \ll 1 \\[2ex] \frac{X^4}{4} + \frac{X^2}{4} + \ldots & X \gg 1 \end{cases}$$

3/ Déterminer la pression du gaz, puis déterminer l'équation d'état dans le cas ultra-relativiste et dans le cas non relativiste.

4 Semi conducteur intrinsèque



Un semi conducteur est un matériau dont la bande de valence est remplie et la bande de conduction vide à température nulle. Si la température augmente, certains électrons de la bande de valence peuvent, sous l'action de l'agitation thermique, franchir le "gap" séparant la bande de valence de la bande de conduction. Le matériau devient (faiblement) conducteur. On considère donc un matériau semi conducteur dont les bandes d'énergie sont modélisées comme sur la figure ci-contre.
Les bandes de valence (BV) et de conduction (BC) sont supposées semi infinies. L'origine des énergies est choisie au sommet de la BV. L'énergie minimale de la BC E_g est donc l'énergie de "gap".
Quand un électron quitte la BV et va occuper un état de la BC, on suppose qu'il se comporte comme un fermion libre de spin 1/2 et de masse effective m_e^*. De même, on admet que le trou laissé dans la BV est une quasi-particule qui se comporte comme un fermion de spin 1/2 de masse effective m_t^* et de charge opposée à celle de l'électron.

0/ Donner un encadrement rapide de l'énergie de Fermi E_F.

1/ Ecrire les densités d'état en énergie pour les électrons de la BC $\rho_c(E)$ et pour les trous de la BV $\rho_v(E)$.

2/ Montrer que le nombre moyen de trous occupant un état d'énergie E de la BV est

$$<n_t>= \frac{1}{\exp[-\beta(E-\mu)]+1} \; .$$

3/ Donner les expressions générales du nombre d'électrons dans la BC N_e et du nombre de trous dans la BV N_t.

4/ Si $\beta\mu \gg 1$ et $\beta(E_g-\mu) \gg 1$, déterminer explicitement N_e et N_t.

5/ On a bien sûr $N_e = N_t$ pour le semiconducteur intrinsèque. En déduire la densité $n = N_e/V$ des porteurs de charges dans la BC puis le potentiel chimique $\mu(T)$. Dans les conditions de température considérées (approximations du 4), où se situe $\mu(T)$?

6/ Applications numériques. On donne pour le Silicium : $E_g \simeq 1.12$eV, $m_e^* \simeq 1.13 m_e$ et $m_t^* \simeq 0.55 m_e$ et pour le Germanium : $E_g \simeq 0.67$eV, $m_e^* \simeq 0.55 m_e$ et $m_t^* \simeq 0.29 m_e$. On se place à $T = 300$K. Calculer le potentiel chimique $\mu(T)$ puis n pour chacun des matériaux. Comparer n_{Si} et n_{Ge} entre eux et à la densité d'électrons libres dans le Cuivre par exemple. Vérifier que les approximations du (4) sont bien justifiées.

5 Étoile à neutrons

Une étoile à neutrons est le résidu du phénomène de supernova, effondrement du coeur de Fer d'une étoile massive ayant épuisé tout son carburant nucléaire. Si l'étoile initiale n'est pas trop massive, l'effondrement s'arrête quand la pression du gaz de neutrons formés par captures électroniques peut compenser l'attraction gravitationnelle. On considère donc une étoile à neutrons, étoile de masse $M \simeq 1.4 M_\odot$, où $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$kg est la masse du soleil, et de rayon de l'ordre de 10km. Le température de l'étoile est au plus de l'ordre de 10^8 K à l'équilibre. On supposera tout d'abord que l'étoile est effectivement constituée exclusivement de neutrons. On rappelle : masse d'un neutron $\simeq 940$ MeV/c^2, masse d'un électron $\simeq 0.5$ MeV/c^2 et $\hbar c \simeq 200$ MeV.fm.

1/ Calculer le nombre de neutrons N dans l'étoile.

2/ En utilisant les résultats de l'exercice précédent, déduire que l'on peut considérer le gaz de neutrons comme un gaz de Fermi non relativiste et complétement dégénéré.

3/ Calculer l'énergie puis l'énergie libre de l'étoile. En déduire la pression du gaz de neutrons.

4/ Le neutron est en fait une particule instable qui se désintègre selon la réaction n $\to$ p+e$^-$ + $\bar{\nu}_e$. Cette réaction est exothermique et libère environ 0.8 MeV.

-a- Si tous les neutrons étaient désintégrés, on aurait donc un gaz de N électrons dans l'étoile. Quelle serait alors l'énergie de Fermi de ce gaz et l'énergie moyenne par électron ?

-b- En déduire que tous les neutrons ne peuvent pas se désintégrer.

-c- Evaluer le nombre maximal d'électrons présents dans l'étoile à neutrons et en déduire le taux de désintégration des neutrons. Conclusion ?

6 La thermo-ionisation électronique revisitée

En utilisant "la bonne statistique" et les ordres de grandeur donnés dans le TD 6, expliquer pourquoi le modèle (semi-classique) utilisé était effectivement suffisant pour décrire le phénomène de thermo-ionisation.

7 Digression mathématique

Pour illustrer la méthode itérative que l'on a utilisée au premier exercice afin de déterminer $\mu(T)$ pour un gaz de Fermi dégénéré, on pourra s'amuser à déterminer la racine réelle de l'équation

$$x^3 + 3\,\epsilon\, x - 1 = 0$$

en ordres successifs en ϵ dans la limite où $|\epsilon| \ll 1$. Comparer avec la racine exacte qui s'écrit (pour $\epsilon > -4^{-1/3} = -0,63...$)

$$x = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \epsilon^3}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \epsilon^3}\right)^{1/3} = 1 - \epsilon + \frac{\epsilon^3}{3} + \frac{\epsilon^4}{3} - \frac{4\,\epsilon^6}{9} + \cdots$$