Remplissage d'un ballon

1/ on a $P_0(\omega_0+\Omega_0) = P_1\Omega_1$ (Boyle-Mariotte)

et $\dfrac{\Omega_1-\Omega_0}{\Omega_0} = \alpha\,\dfrac{P_1-P_0}{P_0}$

en combinant les 2 eqs : $\dfrac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1 = \alpha\left(\dfrac{\omega_0+\Omega_0}{\Omega_1} - 1\right)$

cela conduit à l'eq du second degré en Ω_1 :

$0 = \Omega_1^2 + (\alpha-1)\Omega_0\Omega_1 - \alpha(\omega_0+\Omega_0)\Omega_0$ qui a pour discriminant :
$\Delta = \Omega_0^2\left[(\alpha+1)^2 + 4\alpha\dfrac{\omega_0}{\Omega_0}\right]$

la seule racine positive est : $\dfrac{\Omega_1}{\Omega_0} = \dfrac{1}{2}\left[1-\alpha+\sqrt{(\alpha+1)^2+4\alpha\dfrac{\omega_0}{\Omega_0}}\right]$

l'application numérique donne $\dfrac{\Omega_1}{\Omega_0} = 2$

puis $P_1/P_0 = \dfrac{1}{\alpha}\left(\Omega_1/\Omega_0 - 1\right) + 1 = 3$

2/ $\delta W = -P\,dV$ pour une transf. infinitésimale réversible.
(remarque : ici $V = \omega + \Omega$)

on utilise le fait que la transformation est isotherme ~~réversible~~ : $dV = \dfrac{-nRT}{P^2}dP$

donc $\delta W = nRT\dfrac{dP}{P}$ et $W = nRT\displaystyle\int_{P_0}^{P_1}\dfrac{dP}{P} = nRT\ln\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)$

soit $W = P_1\Omega_1\ln\left(P_1/P_0\right)$

si $\omega_0 = 2{,}5\,\ell$ alors $P_1 = 3$ atm et $\Omega_1 = 2\Omega_0 = \dfrac{2}{5}\omega_0 = 1\,\ell$

donc $P_1\Omega_1 \simeq 300$ J et $W = 330$ J

remarque : la formule pour Ω_1/Ω_0 est bornée par les deux valeurs :

$$1 \leq \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \leq 1 + \frac{\omega_0}{\Omega_0}$$

1 : obtenu pour $\alpha = 0$: ballon très rigide

$1 + \dfrac{\omega_0}{\Omega_0}$: obtenu pour $\alpha \to \infty$: ballon très élastique

Pile hydro électrique

1/ comme la transf. est réversible $\delta Q = TdS$ et $dU = \delta Q + \delta W = TdS + \phi dq$
ensuite $F = U - TS \Rightarrow dF = -SdT + \phi dq$
l'égalité des dérivées croisées donne : $\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_T = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)_q = -\beta\phi_0$ (avec l'éq d'état)

2/ $\delta Q = C_q\, dT + a\, dq$ et $\delta Q = TdS$ (fonctionnement réversible).
donc $a = T\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_T = -\beta\phi_0 T$ (en utilisant la formule (2)).

3/ on charge de manière isotherme donc $dS = \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_T}_{-\beta\phi_0} dq$
cela donne immédiatement

$$\Delta S = -\beta\phi_0 \Delta q$$

on a $dU = TdS + \phi dq \overset{ici}{=} (-\beta\phi_0 T + \phi)\, dq \underset{\text{avec}(1)}{=} \phi_0(1 - \beta T_0)\, dq$

d'où :

$$\Delta U = \phi_0(1 - \beta T_0)\Delta q$$

puis $W = \int \phi\, dq$ ici on est isotherme donc ϕ reste constant : $W = \phi\, \Delta q$

et $Q = \Delta U - W = -\beta T\phi_0\, \Delta q$ (remarque : on a bien $\Delta S \overset{rév}{=} \frac{Q}{T}$)

<u>AN</u> : $\Delta q = 100\,C$ $\quad W = \phi_0 \Delta q = 120\,J$ $\quad Q = -144\,J$
$\Delta U = -24\,J$ $\quad \Delta S = -0{,}48\,J\,K^{-1}$

4/ si on est adiabatique $\delta Q = 0$ donc $dT = -\frac{a}{C_q} dq$
(a) on fait l'approximation
$$\Delta T = -\frac{a}{C_q(T_0)}\Delta q = \frac{\beta\phi_0 T_0}{C_q(T_0)}\Delta q = -0{,}36\,K$$
ici $\Delta q = -100\,C < 0$

(effectivement petit devant T_0)

(b) $T = T_0 \exp\left[\frac{\beta\phi_0}{C_q(T_0)}\Delta q\right]$