EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Les calculatrices sont autorisées.
Les deux problèmes sont indépendants.
Barème : Premier problème 7,5 points ; deuxième problème 12,5 points (plus 2 points de bonus).

1 Premier problème. Torsion d'une tige d'acier.

Une tige d'acier, initialement à la température T_0, a une extrémité fixe alors que l'autre est soumise à un couple de moment Γ variable. Il en résulte une torsion de la tige mesurée par l'angle θ.

Le travail du moment Γ au cours d'une rotation élémentaire $d\theta$ s'écrit $\delta W = \Gamma\, d\theta$. Lorsque la température varie de dT et le moment appliqué de $d\Gamma$, la chaleur δQ reçue de façon réversible par la tige s'écrit : $\delta Q = C_\Gamma\, dT + k\, d\Gamma$.

1/ Donner les expressions des différentielles dU et dS de l'énergie interne et de l'entropie.

2/ On introduit l'enthalpie libre $G = U - \Gamma\,\theta - T\,S$.

(a) Écrire la différentielle dG et en déduire la relation de Maxwell $(\partial S/\partial\Gamma)_T = (\partial\theta/\partial T)_\Gamma$.

(b) En utilisant le résultat de la question 1/, exprimer alors k en fonction de T et $(\partial\theta/\partial T)_\Gamma$.

(c) L'équation d'état de la tige est la suivante : $\Gamma = C\,\theta$, C étant le coefficient de torsion, a priori fonction de la température T, *mais indépendant de* θ *et* Γ. Montrer que

$$k = -\frac{\Gamma\,T}{C^2}\,\left(\frac{dC}{dT}\right).$$

3/ C_Γ et $C^{-2}(dC/dT)$ sont désormais supposés constants. On fait varier de façon isentropique le moment Γ depuis zéro jusqu'à sa valeur maximale Γ_m. Calculer la variation de température $T_1 - T_0$ de la tige.

Faire l'application numérique avec $T_0 = 295$ K, $\Gamma_m = 18$ N.m, $C_\Gamma = 22{,}7$ J/K, $C = 39{,}2$ N.m/rad et $C^{-1}(dC/dT) = -0{,}23 \times 10^{-3}$ K^{-1}.

4/ On applique cette fois brusquement le moment Γ_m, la transformation étant adiabatique. La tige atteint la température T_2. Dans cette question, pour simplifier les calculs, on fait l'approximation que $(dC/dT) = 0$ et donc que $k = 0$.

(a) Exprimer la variation d'énergie interne ΔU_2 en fonction de Γ_m et C en considérant qu'au cours de cette transformation le moment appliqué est constant et égal à Γ_m.

(b) Afin de déterminer l'écart de température $T_2 - T_0$ on considère une transformation réversible entre l'état initial $(T = T_0, \Gamma = 0)$ et l'état final $(T = T_2, \Gamma = \Gamma_m)$. En calculant le travail et la chaleur reçus au cours de cette transformation, exprimer ΔU_2 en fonction de Γ_m, C, C_Γ et $T_2 - T_0$.

(c) En déduire la variation de température $T_2 - T_0$ (on donnera l'expression littérale et la valeur numérique). Discuter ce résultat en le comparant avec la valeur obtenue en 3/.

2 Deuxième problème : Titre massique en vapeur.

Un cylindre de capacité thermique négligeable a une longueur totale $L = 1$ m et une section $\sigma = 1$ m^2. Une paroi fixe le divise en deux compartiments A et B de longueurs égales.

A et B étant initialement vides, on introduit $m_A = 180$ g d'eau dans A et $m_B = 1800$ g d'eau dans B. On appelle x_A et x_B le titre en vapeur dans chaque compartiment. Ainsi x_A est le rapport de la masse de vapeur d'eau contenue dans A sur la masse totale m_A.

1/ Le cylindre est maintenu dans un thermostat à $T = 373$ K (100 ^{o}C).

(a) Quel est le volume massique v_v de la vapeur d'eau à sa limite de saturation à la température T ? On supposera que la vapeur d'eau est un gaz parfait, et on exprimera le résultat en fonction de la constante des gaz parfaits R, de la masse molaire de l'eau $\mathcal{M}$, de la température T et de la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T, soit $P_S(T)$.

(b) On donne $R = 8,31$ J.K^{-1}.mol^{-1}, $\mathcal{M} = 18$ g.mol^{-1} et $P_S(T = 100\,^o\text{C}\,) = 1$ bar. Calculer v_v. L'eau liquide a une masse volumique $\rho_\ell = 10^3$ kg.m^{-3} indépendante de la température. Quel est son volume massique v_ℓ ?

(c) De la comparaison des volumes massiques dans chaque compartiment (soient v_A et v_B) avec v_v et v_ℓ, indiquer quel est l'état de l'eau dans chaque compartiment (vapeur uniquement, mélange liquide/vapeur ou eau liquide uniquement ?). Que vaut x_A ?

(d) Lorsqu'on a coexistence liquide/vapeur, le titre massique x_α (α = A ou B) est déterminé par le "théorème des moments" : $v_\alpha = x_\alpha\, v_v + (1 - x_\alpha)\, v_\ell$. Déterminer x_B.

2/ On porte brutalement le cylindre dans un autre thermostat à $T' = 150$ ^{o}C, puis on attend l'équilibre. On donne $P_S(T') = 5$ bar.

(a) Déterminer les nouveaux titres x'_A et x'_B.

(b) Représenter dans un diagramme (P, v) l'allure de la courbe de saturation et des isothermes d'Andrews aux températures T et T'. Quelle est l'allure grossière du chemin effectué par le fluide contenu dans le compartiment B lors de la transformation ? Et pour le fluide contenu dans le compartiment A ?

3/ On se propose de calculer la chaleur totale $Q = \Delta U_A + \Delta U_B$ reçue par le système dans la transformation. On utilisera les données suivantes :

- Chaleur latente massique de vaporisation de l'eau : $L_v(T = 100\,^o\text{C}\,) = 2240$ kJ.kg^{-1} et $L_v(T' = 150\,^o\text{C}\,) = 2090$ kJ.kg^{-1}.
- Capacité thermique massique à volume constant de la vapeur d'eau $c_v = 1,46$ kJ.kg^{-1}.K^{-1} et de l'eau liquide à la saturation $c_\ell = 4,18$ kJ.kg^{-1}.K^{-1} (*toutes deux indépendantes de la température*).

(a) Que vaut ΔU_A ? (donner l'expression littérale et la valeur numérique).

(b) Pour calculer ΔU_B on décompose la transformation subie par le fluide dans le compartiment B en 3 étapes : (1) liquéfaction isotherme (à la température T) et isobare (à la pression $P_S(T)$) qui amène le système sur la courbe de saturation, (2) un réchauffement de $T \to T'$ le long de la courbe de saturation et enfin (3) une vaporisation partielle (isotherme et isobare) qui amène le système à son état final $(T', P_S(T'), x'_B)$.

- Représenter les 3 étapes de la transformation sur le diagramme (P, v).
- Montrer que lors de la première étape $\Delta U_B^{(1)} = x_B m_B [-L_V(T) + P_S(T)\,(v_v - v_\ell)]$.
- Calculer de même $\Delta U_B^{(2)}$ et $\Delta U_B^{(3)}$.
- Que vaut Q ? (donner la valeur numérique).

(c) *question bonus (hors barême) :* Calculer la variation d'entropie ΔS du système ainsi que celle ΔS_s de la source (thermostat à 150 ^{o}C). Conclusion ?