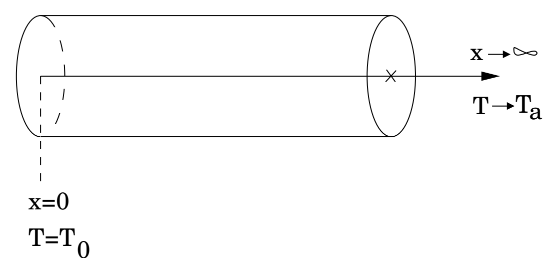
EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE
Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.
Barème approximatif : Premier problème 8 points ; deuxième problème 12 points.
Les deux problèmes sont indépendants.

1 Expérience d'Ingen Housz.



Un tige cylindrique de rayon R et d'axe $0x$ est constituée d'un métal de conductivité thermique κ. Cette tige est encastrée par l'une de ses extrémités (en $x = 0$) dans un récipient contenant de l'eau bouillante, de telle sorte qu'elle est à une température $T_0 = 373$ K. Le reste de la tige est en contact avec l'atmosphère de température $T_a = 293$ K.

On se place dans une configuration où la température T de la barre est une fonction de la coordonnée x le long de l'axe de la tige et du temps t. On admettra que les pertes thermiques sur la surface latérale de la tige (elle est en contact avec l'atmosphère) sont données par l'expression

$$\frac{d\mathcal{P}}{dS} = h\left(T(x,t) - T_a\right) . \tag{1}$$

où $d\mathcal{P}/dS$ est la puissance perdue par élément d'aire latérale, et h une constante positive, caractéristique des échanges thermiques entre la tige et l'atmosphère.

1/ On considère une tranche de la tige comprise entre les abscisses x et $x + dx$. Établir le bilan énergétique et montrer qu'il conduit à l'équation

$$\kappa\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\,h}{R}\left(T(x,t) - T_a\right) = \mu\, c\,\frac{\partial T}{\partial t} , \tag{2}$$

où μ est la masse volumique du métal considéré, et c sa capacité thermique par unité de masse. *Si vous trouvez cette question trop difficile, vous pouvez admettre le résultat (2) et passer à la suite.*

2/ On se place en régime permanent. On considère que l'extrémité qui n'est pas en contact avec l'eau bouillante se situe à $x = +\infty$ et a une température T_a (cf. figure). Écrire l'équation différentielle vérifiée par la variable $\theta(x) = T(x) - T_a$, montrer que sa solution pour $x \in \mathbb{R}^+$ est de la forme $\Theta_0 \exp(-x/\delta)$ où δ est une grandeur caractéristique que l'on exprimera en fonction de R, h et κ (on vérifiera l'homogénéité de la formule). On précisera également la valeur de Θ_0.

3/ On compare, dans les conditions précédentes, le comportement de deux barres de dimensions identiques, l'une en cuivre, l'autre en étain. Chaque barre est recouverte par une fine couche de paraffine dont la température de fusion est 333 K. On suppose que dans ces conditions, le paramètre h (Eq. (1)) prend la même valeur dans les deux cas. Sur la barre de cuivre, la paraffine fond à une abscisse $x_1 = 15,6$ cm. Sur la barre en étain, cela se produit à $x_2 = 6,4$ cm. Exprimer alors la conductivité thermique κ_2 de l'étain et fonction de celle du cuivre ($\kappa_1 = 390$ W.m^{-1}.K^{-1}), de x_1 et de x_2. Faire l'application numérique.

2 Congélation de l'eau à l'aide d'un réfrigérateur.

Un réfrigérateur est schématisé par une machine ditherme. Le liquide réfrigérant effectue des transferts thermiques avec une source chaude et une source froide. La source chaude est l'atmosphère à la température T_2 et la source froide est l'échantillon d'eau à congeler (on notera T sa température).

1/ Dans l'état initial, la source froide est une masse M d'eau liquide à la température $T = T_0 = 273$ K, l'état final est de la glace à la même température T_0. L'échantillon d'eau évolue à température constante, tous les processus sont réversibles. La puissance moyenne du moteur est égale à $\mathcal{P}$.

(a) La chaleur massique de fusion de la glace est notée L. Quelle quantité de chaleur Q faut-il **retirer** à l'eau pour la congeler ?

(b) Le fonctionnement de la pompe est réversible. Au cours d'un cycle effectué par le fluide de la pompe, celui-ci reçoit les transferts thermiques q_2 de la source chaude, q de l'échantillon d'eau, et le travail w du moteur (ces quantités sont algébriques).

Montrer que q_2, q, w, T_0 et T_2 sont reliés par deux équations. Écrire ces équations puis exprimer q en fonction de w, T_0 et T_2.

(c) Quel travail W le moteur doit-il fournir pour congeler toute l'eau ?

(d) En déduire la durée τ de l'opération en fonction de L, M, $\mathcal{P}$, T_2 et T_0. Donner sa valeur numérique en utilisant les données fournies en fin d'énoncé.

2/ La température initiale de l'eau liquide est égale à la température extérieure T_2. La mise en marche du réfrigérateur sert d'abord à refroidir l'eau jusqu'à la température T_0 (l'eau restant liquide). Pour un cycle unique du fluide réfrigérant, la diminution de température est très faible : pour chaque cycle, on a donc une machine ditherme, mais d'un cycle à l'autre la température de la source froide évolue. La capacité thermique massique de l'eau est c, elle peut être considérée comme constante dans tout le domaine de température utile.

(a) Le fonctionnement du réfrigérateur est réversible. On examine le stade du processus où la température de l'eau est égale à T ($T_0 < T < T_2$). Durant un intervalle de temps dt, le moteur fournit l'énergie $\delta W = \mathcal{P}\,dt$, la température de l'eau varie de dT ($dT < 0$). On admettra que dt est assez petit pour que la variation de température soit faible et assez grand pour que le fluide effectue un nombre entier de cycles. Calculer la quantité de chaleur δQ **retirée** à l'échantillon d'eau pendant un temps dt en fonction de T, T_2 et δW, puis exprimer δW en fonction de T, T_2, M, c et dT.

(b) En intégrant l'expression précédente, déterminer le travail total W, puis le temps t, nécessaires pour refroidir l'eau de la température T_2 à la température T_0. Donner la valeur numérique de t.

(c) Les temps obtenus dasns le cadre de notre modèle pour le refroidissement et la congélation d'un litre d'eau vous semblent-ils réalistes ? Commentez.

Données :

$L = 0,344 \times 10^6$ J.kg^{-1}; $M = 1$ kg; $\mathcal{P} = 100$ W; $T_2 = 298$ K; $T_0 = 273$ K, $c = 4,18$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}.