EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.
Barème approximatif : 1$^{\text{er}}$ problème : 10 points ; 2$^{\text{ème}}$ problème : 10 points.
Les deux exercices sont indépendants.

1 Déchets nucléaires.

On s'intéresse à un système formé par un mélange homogène de déchets nucléaires et de béton, modélisé par un cylindre de section S, de longueur l et d'axe Ox. On suppose qu'on est en **régime permanent** et que la température dans le cylindre est une fonction de x seulement. À cause des réactions nucléaires en son sein, le matériau dégage une puissance thermique volumique σ répartie uniformément dans le système.

1/(a) Rappeler la loi de Fourier reliant la température T au vecteur densité de courant thermique $\vec{J}$. On notera λ la conductivité thermique du milieu.

(b) En faisant le bilan pendant dt sur une tranche $[x, x + \mathrm{d}x]$ entre les quantités de chaleur (algébriques) entrante en x, en $x+\mathrm{d}x$ et la chaleur créée par les réactions nucléaires, démontrer que la température dans le système est régie par une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + a = 0 \,.$$

On donnera l'expression de la constante a en fonction des paramètres σ et λ. Vérifier l'homogénéité de la formule.

2/ Les faces $x = 0$ et $x = l$ du cylindre sont maintenues à une température fixe T_0 par une circulation d'eau froide.

(a) Donner alors l'expression de $T(x)$ pour $x \in [0, l]$ et tracer la courbe correspondante. Quelle est la valeur de la température maximale T_{max} dans le système ?
Faire l'application numérique avec les paramètres : σ =3,0 kW.m^{-3}, l =0,5 m, λ =1,2 W.m^{-1}.K^{-1}, $T_0 = 15$ °C.

(b) Donner l'expression du flux de chaleur $\Phi(x)$ dans le système. Tracer son allure. Vérifier que toute la puissance créée au sein du cylindre est évacuée par ses faces avant et arrière.

3/ La face en $x = 0$ est toujours maintenue à la température T_0. La face en $x = l$ n'est plus arrosée et les échanges thermiques ne s'y font plus qu'avec l'air ambiant (par rayonnement et convection), lui aussi à la température T_0. On admet que le flux thermique à travers cette face s'écrit $\Phi(l) = h\, S\, [T(l) - T_0]$ où h est une constante positive qui décrit empiriquement les échanges thermiques de la face en $x = l$ avec l'air ambiant.

(a) Déterminer la nouvelle expression de $T(x)$ pour $x \in [0, l]$ et tracer rapidement la courbe correspondante. Quelle est la valeur de la température $T(l)$?
Faire l'application numérique en prenant : $h = 5$ W.m^{-2}.K^{-1}.

(b) Comparer la valeur du flux $\Phi(l)$ avec celle obtenue en 2.b. Toute la puissance créée au sein du cylindre est elle évacuée par les deux faces (avant et arrière) ?

(c) Discuter la limite $h \to \infty$. On identifiera le petit paramètre sans dimension pertinent et on donnera une interprétation physique des résultats.

2 Traction sur un fil.

On considère un fil métallique tendu grâce à une force de traction $\mathcal{F}$. La longueur L du fil s'exprime en fonction de la température T et de la traction $\mathcal{F}$ selon l'équation d'état

$$L = L_0 \Big\{ 1 + \lambda(T - T_0) + \alpha \, \mathcal{F} \Big\} \,. \qquad (1)$$

Dans cette expression, λ, α, L_0 et T_0 sont des constantes : $L_0 = 1$ m, $\lambda = 24 \times 10^{-6}$ K^{-1}, $\alpha = 5 \times 10^{-6}$ N^{-1} et $T_0 = 273{,}15$ K.

1/ Quel est le travail de traction δW reçu par le fil lorsqu'il s'allonge de dL sous l'action de $\mathcal{F}$? Vérifier que le signe de votre expression correspond à l'intuition physique.

2/ Au cours d'une transformation infinitésimale réversible le fil reçoit une quantité de chaleur $\delta Q_{\rm rev}$ qui s'écrit :

$$\delta Q_{\rm rev} = C_L \mathrm{d}T + \ell \, \mathrm{d}L = C_{\mathcal{F}} \, \mathrm{d}T + k \, \mathrm{d}\mathcal{F} \,. \qquad (2)$$

(a) Exprimer C_L et ℓ en fonction de T et des dérivées partielles appropriées de l'entropie S.

(b) En introduisant l'énergie libre $U - TS$, démontrer la relation de Maxwell : $-(\partial S/\partial L)_T = (\partial \mathcal{F}/\partial T)_L$. Calculer cette dernière quantité grâce à l'équation d'état (1) et démontrer alors que $\ell = \lambda T/\alpha$.

(c) En remplaçant dans (2) dL par son expression en dT et d$\mathcal{F}$ [tirée de (1)] donner l'expression de $C_{\mathcal{F}} - C_L$ et de k en fonction de L_0 λ, T et α. Par la suite **on supposera que $C_{\mathcal{F}}$ est une constante**, indépendante de T, L ou $\mathcal{F}$.

(d) À $T = T_0$ et $\mathcal{F} = 0$, on a $C_L = 3,60$ J.K^{-1}. Déterminer $C_{\mathcal{F}}$.

3/ À la température T_0, sous traction nulle, l'énergie interne du fil est U_0 et son entropie S_0.

(a) Déterminer $S(T, \mathcal{F})$.

(b) Donner l'expression de la variation dU de l'énergie interne au cours d'une transformation infinitésimale et montrer qu'elle est consistante avec la formule

$$U = U_0 + C_{\mathcal{F}}(T - T_0) + \lambda \, L_0 \, T \, \mathcal{F} + \alpha \, L_0 \, \frac{\mathcal{F}^2}{2} \,.$$

4/ À partir d'un état $T = T_0$ et $\mathcal{F} = 0$ on augmente de manière adiabatique réversible la traction subie par le fil jusqu'à une valeur $\mathcal{F}_1$. Soit T_1 la température finale. Déterminer la variation de température $T_1 - T_0$. Faire l'application numérique en prenant $\mathcal{F}_1 = 100$ N.

5/ Le fil étant tendu sous traction $\mathcal{F}_1$ à la température T_1 on relâche brutalement la traction. La traction $\mathcal{F}_1$ étant obtenue grâce à un poids tirant sur le fil, ceci est par exemple réalisé en coupant, **sans fournir de travail**, la corde reliant le fil au poids. La transformation étant très rapide, on peut considérer qu'elle est adiabatique. Soit T_2 la température juste après qu'on a coupé la corde. Calculer la variation de température $T_2 - T_1$. Faire l'application numérique.

Montrer que $T_2 \simeq T_0 + \alpha \, L_0 \, \mathcal{F}_1^2/(2 \, C_{\mathcal{F}})$.