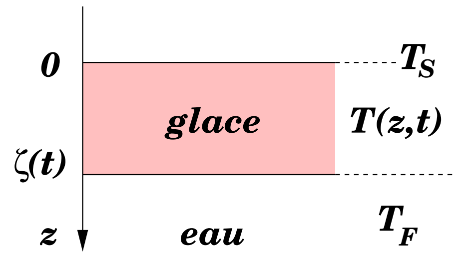
EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.
Barème approximatif : 1er problème : 8 points ; 2ème problème : 12 points.
Les deux problèmes sont indépendants.

1 Le problème de Stefan (1891)

La surface d'un volume d'eau initialement à la température de fusion T_F est mise en contact à $t = 0$ avec une paroi plane maintenue en position fixe et à température $T_S < T_F$. Un couche de glace se développe alors au sein du fluide et occupe l'espace $0 \leq z \leq \zeta(t)$ (cf. figure). Soit $T(z,t)$ le champ de température de la glace (supposé unidimensionnel).



1/ Questions de cours:

(a) Exprimer la loi de Fourier reliant la densité de courant d'énergie thermique au sein de la glace au gradient de température (on notera λ le coefficient de conductivité thermique de la glace).

(b) Effectuer un bilan énergétique sur une épaisseur élémentaire de glace pour obtenir l'équation de la chaleur (on notera ρ la masse volumique et c la capacité calorifique massique de la glace).

2/ *Question (un peu) plus ardue. En cas de difficulté admettre le résultat (1) et passer à la suite.*

(a) En raisonnant sur un cylindre de section S, exprimer la masse d'eau $\mathrm{d}m$ qui s'est transformée en glace entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de $\dot{\zeta} = \mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}t$, S et ρ.

(b) Effectuer le bilan de chaleur de cette masse entre ces deux instants. On notera L la chaleur massique de fusion à la température T_F et on justifiera que le flux thermique de l'eau liquide (à la température uniforme T_F) vers la glace est nul. En déduire la relation :

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=\zeta(t)} = \rho\, L\, \dot{\zeta}(t)\ . \tag{1}$$

3/ On suppose que $\dot{\zeta}$ est suffisamment faible pour considérer que la distribution de température dans la glace est à tout instant infiniment voisine de celle d'un état stationnaire (approximation quasi-stationnaire où on s'autorise à faire $\partial/\partial t \equiv 0$ dans l'équation de la chaleur, bien que $\dot{\zeta} \neq 0$).

(a) Pourquoi n'a-t-on jamais rigoureusement de régime permanent ?

(b) Que devient l'équation de la chaleur dans l'approximation quasi-stationnaire ? En déduire le profil de température au sein de la glace et la valeur de $\partial T/\partial z|_{z=\zeta(t)}$.

(c) En utilisant l'équation (1) montrer alors que ζ obéit à l'équation différentielle $\zeta\,\dot{\zeta} = \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est une constante qu'on exprimera en fonction des données du problème.

(d) On donne $\rho = 915$ kg.m^3, $L = 0,333 \times 10^6$ J.kg^{-1}, $\lambda = 2,215$ W.m^{-1}.K^{-1}, $T_F = 0$ °C et $T_S = -30$ °C. Calculer l'épaisseur de glace $\zeta(t)$ après 1 jour, une semaine, un mois.

2 Équilibre liquide-vapeur de l'eau

Dans tout le problème la vapeur d'eau sera considérée comme un gaz parfait, et le liquide comme incompressible (masse volumique $\rho_\ell = 10^3$ kg.m^{-3}). La masse molaire de l'eau est $\mathcal{M}_{\rm E} = 18$ g.mol^{-1}. À la température T, la pression de vapeur saturante de l'eau sera notée $P_S(T)$, et sa chaleur latente massique de vaporisation $L_v(T)$. Pour $T_0 = 373$ K on a $P_S(T_0) = 10^5$ Pa et $L_v(T_0) = 2240$ kJ.kg^{-1}.

1/ On rappelle la relation de Clapeyron :

$$L_v(T) = (v_v - v_\ell)\, T \,\frac{\mathrm{d}P_S}{\mathrm{d}T} \,. \tag{2}$$

(a) Donner la condition d'applicabilité de (2) et la signification de ses différents termes.

(b) Donner l'expression du volume massique de la vapeur d'eau à la saturation en fonction de P_S, T, $\mathcal{M}_{\rm E}$ et R (constante des gaz parfaits).

(c) À l'aide des données numériques, montrer qu'au voisinage de T_0 on peut négliger le terme v_ℓ dans (2).

(d) On fait en outre l'hypothèse que $L_v(T)$ peut être supposée constante dans la gamme de température que nous allons considérer (on la notera simplement L_v). En déduire l'expression analytique suivante

$$P_S(T) = P_S(T_0)\, \exp\left[\frac{\mathcal{M}_{\rm E} L_v}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right] \,. \tag{3}$$

2/ On considère un cylindre vertical (section $S = 10^{-2}$ m^2, hauteur $h = 0,2$ m) perméable à la chaleur, séparé en deux enceintes par un piston mobile sans frottement. Le compartiment supérieur (hauteur $h_{\rm A}$) est rempli d'air et le compartiment inférieur (hauteur $h_{\rm E}$) d'eau (dont une partie peut être sous forme liquide). On se place dans une configuration d'équilibre à la température $T = 380$ K où les deux enceintes ont même volume. Dans le compartiment du bas on note que l'eau est sous forme de liquide et de vapeur et que la hauteur d'eau liquide est $d = 2$ mm.

(a) Calculer la pression d'équilibre (littéralement puis numériquement).

(b) Calculer la masse d'air $m_{\rm A}$ contenue dans le compartiment supérieur (on donne la masse molaire de l'air : $\mathcal{M}_{\rm A} = 29$ g.mol^{-1}).

(c) Calculer la masse totale d'eau $m_{\rm E}$ contenue dans le compartiment inférieur et le titre massique x de vapeur d'eau.

3/ Le même cylindre est mis au contact d'un thermostat à la température $T' = 390$ K. Le système atteint un nouvel état d'équilibre.

(a) Montrer que l'eau ne peut se trouver ni sous forme totalement liquide (*facile*) ni sous forme totalement gazeuse (*plus dur, penser à comparer la pression dans cette hypothèse avec* $P_S(T')$).

(b) Calculer la pression d'équilibre et la hauteur $h'_{\rm A}$ du compartiment rempli d'air.

(c) Calculer la masse volumique de la vapeur d'eau puis la hauteur de la zone vapeur et celle de la zone liquide (soit d') dans le compartiment inférieur. En déduire le titre massique x' de vapeur d'eau.

(d) *Question hors barème :* Calculer la variation d'entropie de l'eau lors de la transformation de l'équilibre de la question 2/ à celui de la question 3/. La capacité calorifique massique à volume constant de l'eau liquide sera supposée constante : $c_{V,\ell} = 4180$ J.kg^{-1}.K^{-1}, et entre T et T' on approximera la courbe d'ébullition dans le diagramme de Clapeyron par une verticale. *Indication :* décomposer la transformation en 3 étapes bien choisies.