PARTIEL DE THERMODYNAMIQUE
Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.
Barème approximatif : 1$^{\text{er}}$ exercice = 9 points ; 2$^{\text{ème}}$ exercice = 11 points.
Les deux exercices sont indépendants.

1 Cycle d'Ericsson

On considère un cycle parcouru par n moles d'un gaz parfait se décomposant en 4 transformations réversibles :
1– une compression isotherme de l'état A ($P_{\rm A} = P_1$, $V_{\rm A}$, $T_{\rm A} = T_1$) vers l'état B ($P_{\rm B} = P_2$, $V_{\rm B}$, $T_{\rm B}$).
2– Un échauffement isobare de l'état B vers l'état C ($P_{\rm C}$, $V_{\rm C}$, $T_{\rm C} = T_2$).
3– Une détente isotherme de l'état C vers l'état D.
4– Un refroidissement isobare de l'état D vers l'état A.

On donne les valeurs suivantes : $R = 8,314$ J.K^{-1}.mol^{-1}, $\gamma = 1,4$, $V_{\rm A} = 50\ \ell$, $P_1 = 1$ bar, $P_2 = 5$ bar, $T_2 = 1200$ K et $n = 2$ moles.

1/ Représenter ce cycle sur un diagramme de Clapeyron.

2/ Déterminer les valeurs numériques de T_1 et du volume pour chacun des états B, C et D.

3/ Calculer les expressions des travaux et quantités de chaleur reçus par le système au cours des 4 transformations. On exprimera les résulats en fonction de $x = P_2/P_1$, T_2, T_1, n, R, et γ.

(a) Donner la valeur numérique du travail total et de la quantité de chaleur totale reçus par le système au cours du cycle.

(b) Pensez-vous que l'on pourrait utiliser cette machine thermique comme réfrigérateur, comme pompe à chaleur ou comme moteur thermique ?

(c) Définir puis calculer le rendement de cette machine.

(d) Définir et calculer le rendement d'une machine de Carnot réversible [utilisée dans le même but que celui identifié à la question **3/**(b)] fonctionnant entre deux sources de températures respectives T_1 et T_2.

(e) Comparer ce rendement à celui de la machine d'Ericsson. Discuter.

2 Âge du soleil

On admettra que le soleil est constitué d'un mélange de deux gaz, protons et électrons, que l'on peut traiter comme un mélange idéal de gaz parfaits. On supposera que la distribution de masse dans le soleil est homogène et on notera ρ la masse volumique (indépendante de la position). On notera R_S le rayon du soleil, M_S sa masse totale et k_B la constante de Bolztmann ($k_B = R/\mathcal{N}_A$).

1/ L'énergie potentielle de gravitation du soleil vaut $E_{\rm pot} = -\mathcal{G}\int_0^{R_S} \frac{\rho M(r)}{r} 4\pi r^2 {\rm d}r$, où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle et $M(r)$ est la masse contenue dans une sphère de rayon r.

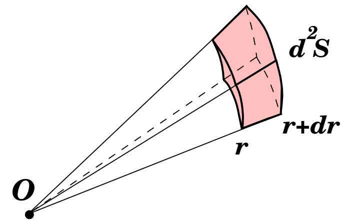
Donner l'expression de $M(r)$ et montrer que E_{pot} se met sous la forme

$$E_{\text{pot}} = -\alpha\, \mathcal{G}\, \frac{M_S^2}{R_S} \,, \tag{1}$$

où α est une constante sans dimension dont vous donnerez la valeur. Commenter la forme du résultat (1).

2/ On considère une tranche infinitésimale d'épaisseur $\mathrm{d}r$, de section d^2S, qui est en équilibre sous l'effet des forces de pression et de l'attraction gravitationnelle (que l'on peut, grâce au théorème d'Ostrogradsky, calculer comme si la masse $M(r)$ était concentrée au centre de la sphère[a]). Montrer que l'équation d'équilibre hydrostatique s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\mathcal{G}\, \rho\, \frac{M(r)}{r^2} \,. \tag{2}$$



[a]La (facile) démonstration de ce point n'est pas demandée.

3/ On définit la pression moyenne comme $\bar{P} = \frac{1}{V}\int_0^{R_S} P(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Donner l'expression du produit $\bar{P}V$ en fonction des paramètres du système (on pourra utiliser (2) grâce à une intégration par parties en admettant que $P(r)$ s'annule en $r = R_S$). En déduire une relation simple entre $\bar{P}V$ et E_{pot}.

4/ La pression $P(r)$ et la température dépendent de la distance r au centre. Cependant, on peut écrire l'équation d'état localement puis moyenner sur toute la sphère solaire. Tout se passe alors comme si l'on pouvait utiliser l'équation d'état des gaz parfaits reliant la pression moyenne $\bar{P}$, le volume total V et la température moyenne $\bar{T}$.

(a) Écrire cette équation. On désignera par N le nombre de protons (c'est aussi le nombre d'électrons).

(b) Quelle est l'énergie cinétique moyenne d'une particule à la température $\bar{T}$? En déduire l'expression de l'énergie cinétique totale E_{cin} du soleil.

(c) Montrer alors que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle vérifient $E_{\text{cin}} = -\frac{1}{2}E_{\text{pot}}$.

5/ On admettra que le soleil s'est contracté à partir d'un état initial de gaz très dilué et au repos dont l'énergie totale ($E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}}$) est négligeable.

(a) Quelle est l'énergie perdue par le soleil depuis cette configuration initiale ?

(b) On suppose que toute cette énergie a été perdue sous forme de rayonnement. En admettant que ce rayonnement a été émis au taux actuel L, calculer l'âge du soleil en années. Commentez votre résultat.

On donne : $L = 4 \times 10^{26}$ W, $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ U.S.I, $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg, $R_S = 7 \times 10^8$ m.

6/ Question facile. En fait, ce qui a été noté plus haut E_{tot} est exactement l'énergie interne U du soleil dans notre modèle (puisqu'il n'y a pas d'autre force en jeux que la gravitation).

(a) Donner l'expression de U en fonction de la température (pour simplifier on fera désormais l'identification $\bar{T} = T$, c'est à dire que l'on supposera que la température du soleil est homogène).

(b) Rappeler l'expression générale de la capacité thermique à volume constant C_V en fonction de la dérivée partielle appropriée de U.

(c) Que vaut C_V pour le soleil ? Discuter le résultat.