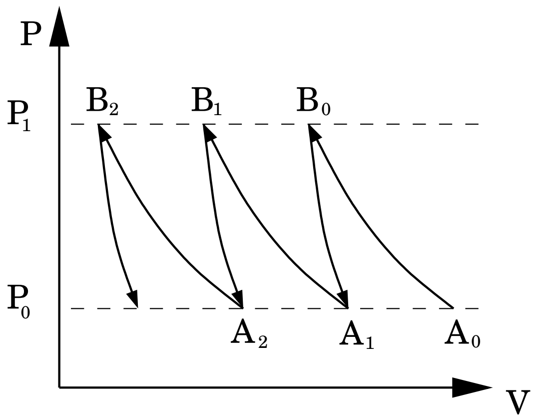
S4 SMR 2 septembre 2004

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE
Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.
Les deux problèmes sont indépendants.
Barème approximatif : Premier problème 13 pts ; deuxième problème 5 pts ; rédaction 2 pts.

1 Premier problème : liquéfaction de l'azote.

On considère un gaz parfait caractérisé par un coefficient $\gamma = c_p/c_v$ indépendant de la température. On effectue sur n moles de ce gaz une succession de compressions isothermes réversibles ($A_i \rightarrow B_i$) et de détentes adiabatiques réversibles ($B_i \rightarrow A_{i+1}$) entre les pressions P_0 et P_1. Cette succession de transformations est représentée sur le diagramme de Clapeyron ci-contre. Le système étant originellement dans l'état A_0, il se trouve en A_i après i itérations de ce processus.



On note V_i le volume du système dans l'état A_i et T_i la température de l'isotherme ($A_i \rightarrow B_i$).

1/ Exprimer le volume $V(B_i)$ du système dans l'état B_i en fonction de V_i, P_0 et P_1.

2/ Exprimer V_{i+1} en fonction de V_i, P_0, P_1 et γ. En déduire T_{i+1} en fonction de T_i, P_0, P_1 et γ.

3/ Donner l'expression de la température T_i en fonction de i, T_0, P_0, P_1 et γ. Tracer rapidement l'allure du graphe de T_i en fonction de i.

4(a) *Question de cours* : montrer que, lors d'une transformation élémentaire, l'accroissement d'entropie dS des n moles de gaz parfait s'écrit (R étant la constante des gaz parfaits) :

$$dS = n\,R\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{dT}{T} - \frac{dP}{P}\right) .$$

Donner alors l'expression de l'entropie du système en fonction de sa température et de sa pression (on choisira un état de référence arbitraire caractérisé par sa température T^*, sa pression P^* et son entropie S^*).

(b) Soit S_i l'entropie du système dans l'état A_i. Exprimer $S_i - S_0$ en fonction de i, n, R et $\ln(P_1/P_0)$.

(c) Comment cette différence évolue-t-elle lorsque i tend vers l'infini ? Commentaire ?

5/ (*Cette question peut être traitée même si l'on n'a pas su répondre à la question 4/.*) En réalité, les cycles successifs permettent de refroidir le gaz jusqu'à la température critique T_c en dessous de laquelle la liquéfaction peut se faire par simple compression isotherme.

(a) Dans le diagramme de Clapeyron placer la courbe de saturation et tracer schématiquement trois isothermes : $T > T_c$, $T = T_c$ et $T < T_c$.

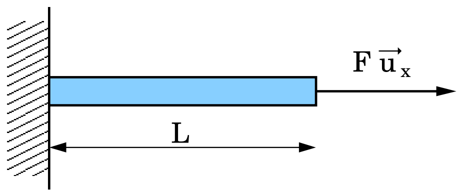
(b) Tracer l'évolution du système sur un autre diagramme de Clapeyron : i itérations du processus amenant à $T_i < T_c$ (alors que $T_{i-1} > T_c$) sont suivies d'une compression isotherme jusqu'à liquéfaction totale.

(c) En sachant que $P_1/P_0 = 5$ et que pour l'azote $T_c = 126$ K, combien de cycles sont nécessaires (à partir de la température ambiante $T_0 = 300$ K) pour liquéfier l'azote par compression isotherme ? On rappelle que l'azote est un gaz diatomique, ce qui fixe $\gamma = 1,4$.

2 Deuxième problème : longueur d'une barre.

Dans cet exercice on s'intéresse aux variations de longueur produites sur une barre métallique par les variations de température et par la force de traction (ou de compression) qu'on lui applique.

La barre est considérée comme un système thermodynamique dont les variables d'état sont la longueur L, la température T et la mesure algébrique F de la force appliquée à une extrémité (l'autre extrémité étant fixe). F est négative dans le cas d'une compression. Ces trois variables sont reliées par une équation d'état du type $f(L, T, F) = 0$ (la fonction f n'étant pas explicitée).



On définit les trois coefficients thermoélastiques suivants :
– coefficient de dilatation linéaire à force constante : $\alpha = \frac{1}{L}(\partial L/\partial T)_F$.
– coefficient d'augmentation de la force à longueur constante : $\beta = (\partial F/\partial T)_L$.
– coefficient d'élasticité isotherme : $\epsilon = \frac{1}{L}(\partial L/\partial F)_T$.

1/ Établir la relation entre α, β et ϵ qui découle de l'existence de l'équation d'état (on pourra utiliser l'équation de chaîne sans démonstration). Vérifier son homogénéité. Quels sont, à votre avis, les signes des quantités α, β et ϵ (justifier votre réponse) ?

2/ La barre est en fait un rail de chemin de fer en acier. Ce rail est fixé à ses deux extrémités. Pour $T = T_0$, la longueur du rail est L et la force appliquée est nulle. On veut déterminer la force F qu'il faut appliquer aux extrémités pour maintenir la longueur du rail constante et égale à L lorsque la température devient égale à $T = T_0 + \Delta T$. On admet que les coefficients α et ϵ peuvent être considérés comme constants dans le domaine de variation des paramètres d'état.

Exprimer F en fonction de ΔT, α, et ϵ. Calculer sa valeur numérique avec les données suivantes : $\alpha = 1,5 \times 10^{-5}$ K^{-1}, $\epsilon = 0,5 \times 10^{-9}$ N^{-1}, $\Delta T = 20$ K.