EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE
Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : préambule 2 points ; première partie 6 points ; deuxième partie 3 points ; troisème partie 3 points ; quatrième partie 6 points.
Les trois premières parties sont indépendantes.

Formation des nuages

Préambule : Rappeler sans démonstration la relation (dîte de Laplace) entre la pression P et la température T d'une quantité fixée d'un gaz parfait subissant une évolution adiabatique réversible. Donner la version différentielle de cette expression sous la forme d'une relation entre γ, $\mathrm{d}P/P$ et $\mathrm{d}T/T$.

1 Profil de pression et de température

• Soit g l'accélération de la pesanteur, $\rho_a(z)$ la masse volumique de l'air à l'altitude z, et $P(z)$ sa pression. Montrer (en considérant par exemple une tranche d'air de section S comprise entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$) que

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho_a\, g\ . \tag{1}$$

• Soit $T(z)$ la température à l'altitude z. Écrire l'équation d'état de l'air (considéré comme un gaz parfait) sous la forme d'une relation entre $P(z)$, $\rho_a(z)$ et $T(z)$ faisant intervenir la constante R des gaz parfaits et la masse molaire $\mathcal{M}_a$ de l'air.

• On suppose que g est indépendante de z et que la température décroît avec l'altitude selon une loi affine caractérisée par le paramètre constant α tel que

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathcal{M}_a\, g}{R\,\alpha}\ . \tag{2}$$

(a) Quelle est la dimension de α ? Calculer sa valeur en sachant que $\mathcal{M}_a = 29$ g.mol^{-1}, que $g = 9,80$ m.s^{-2} et que la température atmosphérique décroît de 6,5 K par km.

(b) Déduire de ce qui précède l'expression de $\mathrm{d}P/dz$ en fonction de P, T, $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ et α.

(c) Montrer alors que $P(z) = P_0\,[T(z)/T_0]^\alpha$, où T_0 et P_0 sont la température et la pression au niveau du sol ($z = 0$).

(d) Dans le cas d'une atmosphère adiabatique, l'air en s'élevant se refroidit sans échange de chaleur. Par quoi est causé ce refroidissement ? Que vaut alors α ? Commenter.

Dans la suite, on prendra pour α la valeur déterminée à la question 1.a. La température et la pression dépendront donc de l'altitude selon les lois (2) et 1.c.

2 Pression partielle de vapeur d'eau

L'air est un mélange gazeux. Une mole d'air correspond à x_{O_2} moles de O_2, x_{N_2} moles de N_2 etc... avec $\sum x_i = 1$ (les x_i sont indépendants de z et de T).

• On suppose que ce mélange obéit à la loi de Dalton, et que tous ses constituants sont des gaz parfaits. Soit P_i la pression partielle du i^{eme} constituant. Justifier que $P_i = x_i\, P$ où P est la pression de l'air.

• Un des constituants de l'air est l'eau (H_2O). Expliquer pourquoi on aura formation de nuage lorsque $P(T)$ sera supérieure à une valeur que l'on exprimera en fonction de x_{H_2O} et de $P_s(T)$, la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T.

Dans la suite, pour alléger l'écriture, on notera simplement x au lieu de x_{H_2O}.

3 Relation de Clapeyron

On rappelle la formule de Clapeyron reliant la chaleur massique de vaporisation L_{v} et la pente $\mathrm{d}P_s/\mathrm{d}T$ de la courbe de pression de vapeur saturante :

$$L_{\mathrm{v}} = T(v_{\mathrm{v}} - v_\ell)\,\frac{\mathrm{d}P_s}{\mathrm{d}T}\ . \qquad (3)$$

(a) Que représentent v_{v} et v_ℓ dans cette formule ? Dans la suite on négligera v_ℓ devant v_{v}. Faut-il être près ou loin du point critique pour valider cette approximation ?

(b) On traite désormais la vapeur d'eau comme un gaz parfait de masse molaire $\mathcal{M}_{\mathrm{v}}$. Exprimer alors $\mathrm{d}P_s/\mathrm{d}T$ en fonction de $\mathcal{M}_{\mathrm{v}}$, R, T, $L_{\mathrm{v}}(T)$ et $P_s(T)$.

4 Altitude de formation des nuages

On cherche à résoudre l'équation $xP(T) = P_s(T)$ de manière approchée. Pour cela on fait l'hypothèse (que l'on vérifiera a posteriori) que l'équation admet une solution que l'on peut écrire sous la forme $T_0 + \delta T$ avec $\delta T \ll T_0$.

(a) Calculer $\delta T/T_0$ grâce à des développements limités appropriés. On donnera son expression en fonction de x, P_0, T_0, $P_s(T_0)$, $\mathcal{M}_{\mathrm{v}}$, $L_{\mathrm{v}}(T_0)$, R et α.

(b) On donne $\mathcal{M}_{\mathrm{v}} = 18$ g.mol^{-1}, $P_0 = 1,013$ bar, $T_0 = 288$ K, $L_{\mathrm{V}}(T_0) = 3148,2$ J.g^{-1}, $P_s(T_0) = 0,017$ bar. Calculer $\delta T/T_0$ pour $x = 0,015$ (atmosphère relativement humide) et $x = 2,5 \times 10^{-4}$ (atmosphère relativement sèche). En déduire l'altitude de formation des nuages pour chacune de ces valeurs de x.

(c) On veut refaire le même calcul pour étudier la formation des nuages sur Vénus. Ils sont constitués d'acide surfurique (H_2SO_4) avec $\mathcal{M}_{\mathrm{v}} = 98$ g.mol^{-1}. Dans les conditions qui existent sur Vénus on a $P_s(T_0) \gg x\,P(T_0)$ (où x est ici la concentration d'acide sulfurique). Montrer alors que l'expression analytique obtenue à la question (a) ci-dessus conduit à

$$\frac{\delta T}{T_0} = -\frac{R\,T_0}{\mathcal{M}_{\mathrm{v}}\,L_{\mathrm{v}}(T_0)} \qquad (4)$$

Sachant que $T_0 = 735$ K, que $L_{\mathrm{v}}(T_0) = 850$ J.g^{-1} et que la température décroît de 7,7 K par km, déterminer l'altitude de formation des nuages. En réalité, les nuages sur Vénus se forment à une hauteur d'environ 40 km. Voyez-vous l'origine de notre erreur ?