

**TD de thermodynamique n° 4**  
*Irréversibilité - Second Principe - Entropie*

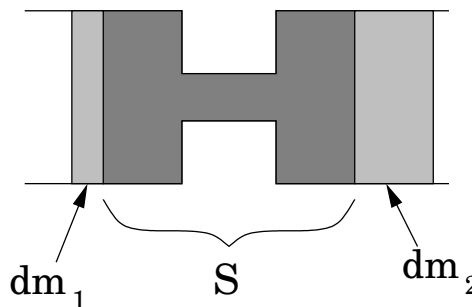
## 1 Détente de Joule-Kelvin.

On parle aussi détente de Joule-Thomson. Il s'agit de la même personne : William Thomson, anobli, a choisi de devenir lord Kelvin of Largs, du nom d'une rivière écossaise.

On considère le dispositif suivant : un fluide s'écoule lentement dans une canalisation horizontale calorifugée qui présente un étranglement<sup>1</sup>. Un régime stationnaire est supposé atteint. En amont de l'étranglement, l'état du fluide est décrit par la pression  $P_1$ , la température  $T_1$ , le volume massique  $v_1$ , l'énergie interne massique  $u_1$  et la vitesse  $c_1$ . En aval, les mêmes grandeurs sont affublées d'un indice 2. On a toujours  $P_2 < P_1$ , c'est pourquoi on parle de détente<sup>2</sup>.

On considère le système  $S$  représenté sur la figure. C'est un système ouvert (il échange des particules avec l'extérieur). Nous notons  $M(t)$  sa masse,  $U(t)$  son énergie interne et  $E(t)$  son énergie mécanique à l'instant  $t$ . Le régime étant stationnaire, ces trois quantités sont indépendantes de  $t$ .

On isole à l'instant  $t$  le système  $\Sigma$  constitué du fluide contenu dans  $S$  et de la masse  $dm_1$  qui va entrer dans  $S$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . À l'instant  $t + dt$  ce système fermé  $\Sigma$  est constitué du fluide contenu dans  $S$  et de la masse  $dm_2$  de ce fluide qui en est sortie entre  $t$  et  $t + dt$ .



- Quelle relation lie  $dm_1$  et  $dm_2$  ?
- Soit  $dU_\Sigma = U_\Sigma(t + dt) - U_\Sigma(t)$  la variation d'énergie interne de  $\Sigma$ . Montrer que  $dU_\Sigma = dm_2 u_2 - dm_1 u_1$ .
- Montrer également que  $dE_\Sigma = \frac{1}{2}dm_2 (c_2)^2 - \frac{1}{2}dm_1 (c_1)^2$ .
- En considérant qu'en aval et en amont le système  $\Sigma$  est délimité par deux pistons imaginaires, calculer le travail total  $\delta W$  des forces de pression.

En utilisant les résultats précédents et en appliquant au système  $\Sigma$  le premier principe sous sa forme généralisée :

$$dU_\Sigma + dE_\Sigma = \delta W + \delta Q ,$$

montrer que l'on a l'égalité

$$u_2 + P_2 v_2 + \frac{1}{2}(c_2)^2 = u_1 + P_1 v_1 + \frac{1}{2}(c_1)^2 .$$

1. Le même effet est obtenu si on place une bourre de coton dans une canalisation de section constante.

2. La baisse de pression dans l'étranglement est due aux importantes forces de frottement qui s'y manifestent.

En déduire que dans le cas d'un écoulement lent, la détente de Joule-Kelvin est isenthalpique. Si le gaz qui s'écoule est un gaz parfait, quelle est la variation de température  $T_2 - T_1$  associée? Montrer que dans ce cas, si l'on note  $dm$  la valeur commune de  $dm_1$  et de  $dm_2$ , alors la variation d'entropie  $dS_\Sigma$  de  $\Sigma$  est donnée par

$$dS_\Sigma = -dm \frac{R}{M} \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right),$$

où  $M$  est la masse molaire du gaz et  $R$  la constante des gaz parfaits. Que peut-on en conclure sur la détente de Joule-Kelvin? Pourrait-on observer une compression de Joule-Kelvin?

## 2 Détente de Joule-Gay-Lussac.

Une enceinte de volume  $2V_0$  est délimitée par une paroi indéformable et adiabatique. Une cloison rigide la sépare en deux parties de même volume. Dans l'état initial, une des cellules est remplie d'hydrogène (considéré comme un gaz parfait) à la pression  $3P_0$ , à la température  $T_0$  et l'autre est vide. On brise la cloison centrale et on attend l'état d'équilibre.

Montrer que  $T$  reste constante. Calculer la pression du gaz dans l'état final. Quelle est la variation d'entropie? La connaissance de la dépendance de  $C_V$  en fonction de  $T$  est-elle nécessaire?

## 3 Entropie d'un gaz parfait dont $C_V$ dépend de $T$ .

Le dioxyde de carbone a une capacité thermique molaire à volume constant donnée (entre 273 et 500 K) par la relation :

$$C_V = 23,83 + 22,15 \times 10^{-3} T \text{ (J.mol}^{-1}\text{.K}^{-1}\text{)}.$$

Établir à une constante près l'expression de l'entropie de  $n$  moles de ce gaz (supposé parfait) en fonction des variables  $T$  et  $V$ . Calculer la variation d'entropie  $\Delta S$  pour un échauffement isochore de cinq moles de  $\text{CO}_2$  de 289 à 400 K.

## 4 Bilan entropique.

Un solide de capacité thermique  $mc$  (indépendante de la température), initialement à la température  $T_0$ , est mis en contact thermique prolongé avec une source de chaleur de température  $T_S$  invariable (on ne précise pas si  $T_0$  est supérieure ou inférieure à  $T_S$ ). Exprimer entre l'état initial et l'état final :

- la variation d'entropie du solide,
- la variation d'entropie de la source,
- la variation d'entropie de l'univers, c'est à dire du système {solide + source} en fonction de  $x = T_0/T_S$ . Quel est son signe? Discuter.

## 5 Transformations réversibles et irréversibles.

Un cylindre vertical de section  $S = 200 \text{ cm}^2$ , est fermé par un piston horizontal de masse négligeable, mobile sans frottement. Une masse  $m = 2 \text{ g}$  d'hélium (traité comme un gaz parfait dont

la capacité thermique est indépendante de la température) est initialement enfermée dans le cylindre, dans les conditions  $T_0 = 300$  K et  $P_0 = 1$  bar. On prendra l'accélération de la pesanteur  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

### 5.1 Transformation adiabatique.

On considère ici que les parois du cylindre et du piston sont calorifugées (c'est à dire imperméables à la chaleur).

**A Transformation réversible.** On applique *progressivement* une surcharge de masse 100 kg sur le piston, jusqu'à atteindre l'état final  $(P_1, V_1, T_1)$ .

- Indiquer pourquoi la transformation peut être considérée comme réversible.
- Calculer le taux de compression  $x = P_1/P_0$ . La valeur de  $x$  dépend-elle de la façon dont on atteint  $P_1$  ?
- Exprimer  $V_1/V_0$  et  $T_1/T_0$  en fonction de  $x$  et  $\gamma$ . En déduire  $T_1$  et calculer la variation d'entropie du gaz.

**B Transformation irréversible.** On applique maintenant brutalement la surcharge. Le gaz atteint le nouvel état d'équilibre  $(P_2 = P_1, V_2, T_2)$ . Refaire tous les calculs précédents.

### 5.2 Transformation monotherme.

On considère ici que les parois du cylindre et du piston sont perméables à la chaleur et que le cylindre baigne dans un thermostat de température constante  $T_0 = 300$  K. Les conditions initiales  $(P_0, V_0, T_0)$  restent les mêmes que précédemment.

**A Transformation réversible.** On applique progressivement la surcharge de 100 kg. Comment peut-on appeler cette transformation ? Trouver la position d'équilibre du piston et les valeurs  $T_3$  et  $V_3$  de la température et de la pression. Calculer le travail  $W_3$  reçu par le gaz. Calculer la variation d'entropie  $\Delta S_3^{ther}$  du thermostat et la variation d'entropie de l'univers. Commenter.

**B Transformation irréversible.** On applique la surcharge brutalement, puis on attend que l'équilibre en température se fasse. Pourquoi la transformation n'est-elle pas isotherme ?

Le gaz atteint l'état d'équilibre  $(P_4 = P_1, V_4, T_4 = T_0)$ . Quel est alors le rapport  $V_4/V_0$  ? Quels sont le travail  $W_4$  reçu par le gaz, la variation d'entropie du gaz et celle du thermostat  $\Delta S_4^{ther}$  ? Quelle est ici la variation d'entropie de l'univers ? Commenter.

## 6 Oscillations adiabatiques.

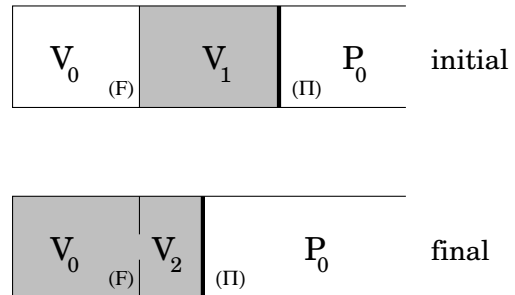
Un cylindre calorifugé est divisé en deux compartiments égaux par un piston isolé thermiquement qui peut glisser sans frottement. Les cylindres ont une section  $A$  et les compartiments ont à l'équilibre la même longueur  $L$ . Chaque compartiment contient une mole d'un gaz parfait avec  $C_P/C_V = \gamma$ , à la température  $T_0$ .

1/ On suppose que le piston est déplacé de manière réversible d'une distance  $x \ll L$ . Calculer au premier ordre en  $x$  les pressions  $P_1$  et  $P_2$  et les températures  $T_1$  et  $T_2$  des deux compartiments.

2/ Trouver la fréquence d'oscillation des petites oscillations adiabatiques du piston autour de sa position d'équilibre.

## 7 Détente irréversible.

Dans cet exercice on se propose d'étudier la variation d'entropie qui intervient lors d'une transformation irréversible d'un gaz. Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure ci-contre : un cylindre est fermé par un piston (II) mobile sans frottements. Une cloison fixe (F) délimite deux compartiments dans le cylindre. Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques. La face externe du piston est soumise à la pression atmosphérique  $P_0$ .



Initialement, le compartiment limité par le piston est rempli d'un gaz parfait dont la capacité thermique à volume constant  $C_V$  est indépendante de la température (on note  $\gamma = C_P/C_V$ ). La température est  $T_1$ , le volume  $V_1$ . L'autre compartiment, de volume  $V_0$  est vide.

Pour opérer la détente irréversible du gaz, on perce un trou dans la cloison fixe (F). Les conditions initiales sont telles qu'une fois l'état d'équilibre final atteint, le piston délimite un volume  $V_2$  entre sa face interne et la cloison (F). Dans l'état final, la température du gaz est  $T_2$ .

- 1/ Quelle est la pression du gaz dans l'état initial et dans l'état final ?
- 2/ Quel est le volume balayé par le piston dans son déplacement de sa position initiale à sa position finale ? En déduire le travail  $W$  fourni au gaz par le piston en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$  et  $P_0$ .
- 3/ Donner, en la justifiant, l'expression de la différentielle  $dU$  de l'énergie interne du gaz en fonction de la variation  $dT$  de la température, du nombre  $n$  de moles ainsi que des constantes  $\gamma$  et  $R$ .  
Pour le gaz considéré, calculer la variation de l'énergie interne en fonction des paramètres de l'état initial et de l'état final ( $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  et  $P_0$ ).

4/ Calculer le volume  $V_2$  et la température finale  $T_2$  en fonction de  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  et  $\gamma$ . La température finale est-elle supérieure ou inférieure à la température initiale ? Faire l'application numérique en prenant  $V_0 = V_1 = 1 \ell$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$  et  $\gamma = 1,4$ .

Quelle condition  $V_0$  et  $V_1$  doivent-ils remplir pour que le piston ne soit pas appliqué contre la cloison fixe dans l'état final ?

5/ Calculer alors la variation d'entropie  $\Delta S$  du gaz de l'expérience précédente en fonction de  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  et  $\gamma$ . Quel doit être le signe de  $\Delta S$  ? Vérifiez le dans le cas où  $V_0 = V_1$ .

6/ Refaire rapidement l'exercice en considérant le cas de parois conductrices de la chaleur. Quelle est ici la variation d'entropie du gaz ? Ce résultat est-il compatible avec l'irréversibilité de la transformation ? (indication : évaluer la variation d'entropie de l'univers).

## 8 Autres exercices et problèmes

Voici une liste d'exercices que vous pouvez traiter en vous reportant sur la page web de l'enseignement :

- Rattrapage 2003/2004 : problème 1 (non corrigé).
- Partiel 2005/2006 : problème 2 (corrigé).

Partiel 2008/2009 : problème 3 (non corrigé).  
Partiel 2012/2013 : problème 2 (corrigé).  
Partiel 2013/2014 : problèmes 1 et 2 (non corrigé).  
Partiel 2015/2016 : problème B (corrigé).