S3 PMCP 2016/2017

TD de thermodynamique n° 7
Phénomènes de diffusion

1 Réaction nucléaire.

Un faisceau monocinétique de neutrons, de densité de courant $J_0\,\vec{e}_x$ arrive en $x = 0$ dans un milieu contenant n_B noyaux de bore par unité de volume. Lors de la collision entre un neutron et un noyau de bore il se produit une réaction nucléaire au cours de laquelle le neutron est absorbé par le bore.

1/ Déterminer en régime stationnaire la densité de courant de neutrons $J(x)$ en un point d'abscisse x du mileu en fonction de J_0, n_B et de la section efficace σ de la collision neutron-bore.

2/ Calculer la proportion de neutrons absorbés après un parcours de longueur L. On prendra $n_B = 5 \times 10^{24}$ m^{-3}, $L = 12$ cm et $\sigma = 248$ barns (le barn est une unité de surface réservée à la section efficace en physique nucléaire et en physique des particules : 1 barn $= 10^{-28}$ m^2).

2 Équilibre d'une atmosphère isotherme.

On considère l'équilibre d'une atmosphère isotherme de gaz parfait.

1/ Donner les expressions de la masse volumique $\rho(z)$ du gaz en fonction de la masse m des molécules, de l'altitude z, de l'énergie d'agitation thermique k_BT, de l'accélération g de la pesanteur (supposée indépendante de z), et de la masse volumique au sol ρ_0.

2/ Montrer, en utilisant la loi de Fick en régime stationnaire, qu'il existe un courant de convection dirigé vers le haut. Calculer la vitesse moyenne u associée à ce courant en fonction du coefficient de diffusion D et des données du problème.

3/ En déduire qu'il doit exister un courant descendant de molécules de vitesse $-u$. Quel en est le moteur ? Montrer alors que les collisions subies par une molécule de gaz sont en moyenne équivalentes à une force de friction $\alpha\, u$ dirigée en sens inverse de la vitesse $-u$. Exprimer le coefficient de friction α en fonction de D et des données du problème [1].

Calculer u et α pour une atmosphère de diazote à 0 °C. On donne la masse molaire atomique de l'azote $\mathcal{M} = 14$ g.mol^{-1}, la constante des gaz parfaits $R = 8,314$ J.K^{-1}.mol^{-1}, $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}, $g = 9,8$ m.s^{-2} et le coefficient d'autodiffusion du diazote $D = 1,8 \times 10^{-5}$ m^2.s^{-1}.

4/ Indiquer comment les résultats des questions **1/** et **3/** permettent chacun déterminer une valeur expérimentale du nombre d'Avogadro (expériences de Jean Perrin en 1908 et 1909 respectivement).

1. Cette relation fut obtenue pour la première fois par Einstein en 1905.

3 Simple et double vitrage.

On se propose de comparer en régime stationnaire les déperditions de chaleur d'une fenêtre à simple vitrage avec celles d'une fenêtre à double vitrage.

1/ Préliminaire : Établir l'équation de propagation de la chaleur. On appellera μ la masse volumique, c la chaleur massique du milieu, et λ la conductivité thermique.

2/ On considère une vitre simple, d'épaisseur e et de surface S. On note T_1 la température extérieure et T_2 la température intérieure. Établir en régime permanent la relation entre $\vec{J}_E$, λ, T_1, T_2 et e. En déduire la quantité de chaleur qui traverse la vitre par seconde. On fera l'application numérique en prenant $T_1 = 0$ °C, $T_2 = 20$ °C, $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}, $e = 5$ mm et $S = 3$ m^2.

3/ Le double vitrage est constitué par deux vitres identiques à la précédente, séparées par une lame d'air de même épaisseur e. On note T_1' et T_2' les températures des deux faces des vitres en contact avec la lame d'air.

(a) Calculer T_1' et T_2' en fonction de λ, λ'(air) T_1 et T_2. Faire l'application numérique avec $\lambda' = 3 \times 10^{-2}$ W.m^{-1}.K^{-1}.

(b) Déterminer $\vec{J}_E$ et en déduire la quantité de chaleur qui traverse ce double vitrage par seconde. Conclusion ?

4 Barreau conducteur parcouru par un courant.

On considère un barreau cylindrique d'axe $x'Ox$ (vecteur directeur $\vec{e}_x$), de section S, conducteur de la chaleur et de l'électricité dont la paroi latérale est isolante électriquement et thermiquement. On se place dans une configuration où, au sein du barreau, la température T, la densité de courant électrique $\vec{J}_{\rm el}$ et le champ électrique $\vec{E}$ ne dépendent que de x et du temps t, avec $T = T(x,t)$, $\vec{J}_{\rm el} = J_{\rm el}(x,t)\,\vec{e}_x$ et $\vec{E} = E(x,t)\,\vec{e}_x$.

1/ On note μ la masse volumique du barreau et c sa capacité thermique massique. On considère une tranche du barreau située entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. En faisant le bilan thermique pour cette tranche pendant $\mathrm{d}t$ montrer que

$$\mu\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J_{\rm th}}{\partial x} + J_{\rm el}(x,t) E(x,t) \quad .$$

Indication : On rappelle que la chaleur créée par effet Joule dans la tranche considérée pendant $\mathrm{d}t$ est $\vec{J}_{\rm el}.\vec{E}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$. Justifier cette relation.

2/ Le barreau est caractérisé par une une conductivité thermique λ et une conductivité électrique σ (telle que partout dans le barreau $\vec{J}_{\rm el} = \sigma \vec{E}$). On se place en régime permanent où la température T est indépendante du temps et $J_{\rm el}$ est indépendant de x et t. On considère que le barreau a une longueur L et on fixe la température de ses extrémités : $T(0) = T(L) = T_0$.

(a) Donner la loi de variation de la température T au sein du barreau en fonction de x et des paramètres $J_{\rm el}$, L, T_0, λ et σ. Tracer la courbe correspondante.

(b) Calculer la température maximale atteinte dans le barreau en prenant $\lambda = 50$ W.m^{-1}.K^{-1}, $L = 25$ cm, $J_{\rm el} = 15 \times 10^5$ A.m^{-2}, $\sigma = 77 \times 10^4$ Ω^{-1}.m^{-1} et $T_0 = 300$ K.

5 Conduction thermique.

Un barreau cylindrique de section constante $S = 2$ cm^2 est constitué de deux barreaux soudés, de même section. L'un en aluminium, de conductivité thermique $\lambda_1 = 200$ W.m^{-1}.K^{-1} et de longueur $l_1 = 80$ cm, et l'autre en cuivre, de conductivité thermique $\lambda_2 = 390$ W.m^{-1}.K^{-1} et de longueur $l_2 = 50$ cm. Les extrémités libres du barreau d'aluminium et du bareau de cuivre sont respectivement maintenues aux températures $T_1 = 180$ °C et $T_2 = 0$ °C. Une gaine permet d'isoler thermiquement la surface latérale du barreau. Déterminer, en régime stationnaire, l'expression littérale puis la valeur numérique des grandeurs suivantes :

– La température au niveau de la soudure Al-Cu.

– Le gradient de température le long du barreau hétérogène.

– La quantité de chaleur qui traverse la section droite du barreau par unité de temps. Retrouver rapidement ce résultat en utilisant le concept de résistance thermique.

6 Brioche dans un micro-onde.

Une brioche est réchauffée dans un four à micro-ondes. Elle est modélisée par une sphère de rayon R constituée d'un matériau homogène de conductivité thermique λ, de capacité calorifique massique c et de masse volumique ρ. On fait l'hypothèse qu'à l'intérieur de la brioche la distribution de température est isotrope [de la forme $T(r,t)$] et que le four produit une puissance thermique constante, entièrement absorbée par la brioche, de sorte que pour $r < R$, la puissance volumique p produite par le four est uniforme et constante. L'air enveloppant la brioche ne présente aucune absorption thermique et est maintenu à une température constante T_0, de sorte que $T(r \geq R, t) = T_0$.

On note $\vec{J}_{\text{th}} = J_{\text{th}}(r,t)\,\vec{e}_r$ le vecteur densité de courant de chaleur et $\Phi(r,t)$ le flux thermique traversant une sphère de rayon r et de surface $S(r)(= 4\pi r^2)$.

1/ Rappeler la relation qui existe entre J_{th} et T, ainsi que celle entre Φ, J_{th} et S.

2/ En faisant, pendant dt, le bilan thermique sur une couche comprise entre les sphères de rayon r et $r + \mathrm{d}r$ démontrer que

$$c\,\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + p\ .$$

3/ On se place en régime permanent.

(a) Montrer qu'alors $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r = K_1 r + K_2/r^2$ pour $r \in [0, R]$ (où K_1 et K_2 sont des constantes réelles).

(b) Quelle relation existe-t-il entre $\Phi(R)$ et p ? En déduire la valeur de K_2.

(c) Tracer alors la courbe représentative de $T(r)$. Cette courbe a-t-elle un allure qui correspond à votre expérience quotidienne ?

4/ Améliorer le modèle en proposant une description qualitative réaliste de la dépendance temporelle de T.

7 Thermalisation entre deux solides

On considère deux corps solides (A et B) de températures initiales $T_A(t \leq 0) = T_A^0$ et $T_B(t \leq 0) = T_B^0$ ($T_A^0 > T_B^0$) et de capacités thermiques C_A et C_B. À l'instant $t = 0$ les deux corps sont mis en contact thermique par l'intermédiaire d'un fil conducteur de la chaleur. On veut étudier comment ce dispositif conduit à l'égalisation de la température entre les deux corps.

Le fil est un cylindre d'axe $x'x$, de section constante S, de longueur L. Il est réalisé dans un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Il est parcouru par une densité de courant thermique $J_{\text{th}}(x,t)$ et il règne en son sein un champ de température $T(x,t)$ avec $T(0,t) = T_A(t)$ (température du corps A) et $T(L,t) = T_B(t)$ (température du corps B).

1/ En faisant le bilan de la chaleur reçue pendant $\mathrm{d}t$ par un petit élément de fil situé entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, démontrer l'équation de conservation :

$$\mu\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial J_{\text{th}}}{\partial x} = 0\ . \tag{1}$$

2/ On se place désormais en régime "quasi-stationnaire" où le premier terme de gauche dans (1) est négligeable devant le second. Dans ce cas, tracer l'allure de $T(x,t)$ à un instant t donné pour $x \in [0, L]$. On placera les valeurs $T_A(t)$ et $T_B(t)$ sur la courbe.

3/ Soit $\Phi_{\text{th}}(t)$ la puissance thermique traversant, à l'instant t, le fil de la gauche vers la droite. Comment Φ_{th} est-elle reliée à J_{th} ? Exprimer $\Phi_{\text{th}}(t)$ en fonction de la différence $\theta(t) = T_A(t) - T_B(t)$ et de la quantité $R = L/(\lambda S)$.

4/ En faisant le bilan de la quantité de chaleur reçue par le corps A pendant $\mathrm{d}t$, relier $\mathrm{d}T_A/\mathrm{d}t$, C_A et $\Phi_{\text{th}}(t)$. Même question pour le corps B (attention aux signes !). En déduire une relation linéaire entre $T_A(t)$ et $T_B(t)$ valable pour tout $t \geq 0$.

Soit T_∞ la valeur commune de $T_A(t \to \infty)$ et de $T_B(t \to \infty)$. Que vaut T_∞ lorsque $C_A = C_B$? Et lorsque $C_A \gg C_B$? Discuter. On ne fera par la suite aucune hypothèse sur les valeurs relatives de C_A et C_B.

5/ Déduire de la question précécente l'équation différentielle à laquelle obéit la différence de température $\theta(t)$. Montrer que sa solution se met sous la forme $\theta(t) = \theta_0 \exp(-t/\tau)$ où l'on exprimera les constantes θ_0 et τ en fonction des données du problème. Vérifier que le paramètre τ a la dimension d'un temps.

6/ *Question hors barême :* On veut déterminer sous quelle condition l'approximation quasi-stationnaire utilisée dans cet exercice est valable. Pour cela on remplace chacune des contributions dans (1) par l'ordre de grandeur correspondant (par exemple $\partial T/\partial t$ est remplacé par T_∞/τ).

Montrer alors que l'on peut négliger le premier terme de gauche dans (1) dans la limite $C \ll \overline{C}$, où C est la capacité thermique totale du fil (à définir en fonction des données du problème) et $\overline{C}$ est une "moyenne"entre C_A et C_B (à définir également).

8 Fluctuation de température du sous-sol.

On se propose d'étudier l'évolution de la température du sous-sol au cours de l'année. On assimile localement le sol à un demi-espace ($x > 0$) homogène de masse volumique μ, de chaleur massique c et de conductivité thermique λ supposées constantes. On note $T(x,t)$ la température dans le sol à l'instant t et à la profondeur x. On suppose qu'à la surface ($x = 0$) la température évolue au cours de l'année suivant la loi :

$$T(0,t) = T_0 + A\,\cos(\omega\,t)\ ,$$

où A est une constante et $\tau = 2\pi/\omega = 1$ an.

1/ On pose $u = (T - T_0)/A$. Chercher une solution de l'équation de la chaleur sous la forme :

$$u(x,t) = \,\mathrm{Re}\,\{u_0\,\exp(\alpha\,x + \beta\,t)\}\ ,$$

où Re désigne la partie réelle. Exprimer les constantes complexes u_0, α et β en fonction de ω et de la diffusivité thermique D du sol. Que vaut la température à grande profondeur ?

2/ On pose $\delta = \sqrt{2\,D/\omega}$. Exprimer $u(x,t)$ en fonction de x/δ et $\omega\,t$. Décrire brièvement la signification physique de la solution obtenue. On donne $D = 1,2 \times 10^{-6}$ $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$. Calculez numériquement δ.

3/ La température de la surface du sol passe vers le 1er janvier par un minimum égal à -10 °C et vers le 1er juillet par un maximum égal à 30 °C. Vers quelle date la température est-elle minimale à la profondeur $x = 2$ m et quelle est cette valeur minimale ? Commentez.

4/ Pourquoi les variations de température du sol qui correspondent à l'alternance jour/nuit sont-elles pratiquement sans influence sur la température du sol à la profondeur $x = 2$ m ?

9 Autres exercices et problèmes

Voici une liste d'exercices que vous pouvez traiter en vous reportant sur la page web de l'enseignement :

Examen 2008/2009 : problème 1 (corrigé).
Examen 2009/2010 : problème 2 (non corrigé).
Examen 2010/2011 : problème 2 (corrigé).
Examen 2011/2012 : problème 1 (corrigé).
Examen 2013/2014 : problème 1 (non corrigé).
Examen 2014/2015 : problème B (non corrigé).