EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : 1er problème : 9 points ; 2ème problème : 11 points.

1 Machine à vapeur.

Préliminaire. Dans le diagramme de Clapeyron, représenter quelques isothermes d'Andrews traduisant l'équilibre entre les phases liquides et gazeuses d'un corps pur. Placer les courbes de saturation, de rosée et d'ébullition. Qu'est-ce que le point critique ? Comment définissez-vous la pression de vapeur saturante $P_s(T)$ sur le schéma ?

Dans une machine à vapeur, une masse m d'eau effectue la transformation cyclique suivante : l'eau liquide se trouve dans l'état A sur la courbe d'ébullition $[P_A = P_S(T_2), V_A, T_A = T_2]$. Elle est ensuite totalement vaporisée à température T_2 (jusqu'à atteindre l'état B). La vapeur saturante ainsi obtenue est injectée dans le piston dont le volume augmente. Pendant le même temps, la vapeur se condense partiellement et la température diminue jusqu'à la valeur T_1 (état C), la transition $B \to C$ étant adiabatique. Le reste de vapeur est alors totalement condensé à température T_1 jusqu'à un état D (qui correspond à l'entrée de l'eau dans la chaudière). Dans la chaudière, l'eau est à nouveau chauffée le long de la courbe d'ébullition jusqu'à la température T_2 (et on revient donc à l'état A). Toutes les phases de la transformation sont supposées **réversibles**.

1/ Représenter le cycle $ABCDA$ dans le diagramme de Clapeyron.

2/ Caractérisation du cycle.

(a) On considère pour simplifier que la capacité calorifique massique c de l'eau liquide est constante. Calculer la variation d'entropie entre D et A. Faire l'application numérique.

(b) Exprimer la variation d'entropie entre A et B en fonction de m, T_2 et de L_2, chaleur latente massique de vaporisation de l'eau à la température T_2. Faire l'application numérique.

(c) Exprimer la variation d'entropie entre B et C sachant que durant cette étape le fluide est contenu dans un piston isolé thermiquement.

(d) On note x le titre en vapeur au point C. Calculer $S_D - S_C$ en fonction de x, m, T_1 et de L_1, chaleur latente massique de vaporisation de l'eau à la température T_1.

(e) Déduire de ce qui précède l'expression de x en fonction des paramètres du problème. Faire l'application numérique.

3/ Évaluation du rendement de la machine à vapeur.

(a) Calculer le transfert thermique Q_2 fourni par la chaudière (source chaude[1]) pour chauffer la masse d'eau liquide de T_1 à T_2 puis pour la vaporiser à la température T_2 (phases DA et AB du cycle).

[1] Cette source n'est pas un vrai thermostat puisque sa température varie, mais cela n'a pas d'incidence sur la solution de l'exercice.

(b) Calculer de même la quantité de chaleur Q_1 reçue par la masse d'eau lors de la condensation de la vapeur (phase CD du cycle).

(c) Déduire des résultats précédents le travail W reçu par la masse d'eau au cours du cycle.

(d) La machine à vapeur est un moteur thermique. Définir son efficacité η et en donner la valeur numérique.

(e) Calculer l'efficacité η_C d'une machine ditherme fonctionnant suivant un cycle de Carnot entre les températures T_1 et T_2 (si on est pris par le temps on rappellera l'expression sans démonstration). Comparer avec η.

Données: $m = 1$ kg, $T_2 = 485$ K, $T_1 = 373$ K, $c = 4,18$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}, $L_2 = 1,89 \times 10^3$ kJ.kg^{-1}, $L_1 = 2,26 \times 10^3$ kJ.kg^{-1}.

2 Paradoxe de l'isolant cylindrique

On désire isoler un tuyau cylindrique de rayon $r = a_1$, de longueur L, porté à la température uniforme T_1. Pour ce faire, on dispose autour du tuyau un manchon isolant de conductivité thermique λ, compris entre $r = a_1$ et $r = a_2$. Le but du problème est de calculer le flux de chaleur évacué par le manchon en régime stationnaire. On veut que ce flux soit le plus faible possible. On supposera dans tout l'exercice que pour $r \in [a_1, a_2]$ la température du manchon varie selon une loi $T(r)$ avec $T(a_1) = T_1$ et $T(a_2) = T_2$ (T_2 est la température de la face externe du manchon, $T_2 < T_1$).

1/ Rappeler l'expression de la densité de courant thermique $\vec{J}(r)$ en fonction de $T(r)$ et λ (on notera $\vec{e}_r$ le vecteur radial normé).

2/ En faisant le bilan des flux thermiques radiaux pour un cylindre élémentaire compris entre r et $r + \mathrm{d}r$, montrer qu'en régime stationnaire $T(r)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0\,.$$

En déduire l'expression de $T(r)$ en fonction de a_1, a_2, T_1 et T_2.

3/ Le manchon évacue sa chaleur vers l'air (à température ambiante $T_a < T_2$) par des échanges surfaciques qui sont modélisés par une densité de courant thermique en $r = a_2$ de la forme $\vec{J}(a_2) = h(T_2 - T_a)\,\vec{e}_r$, où h est un paramètre phénoménologique constant. En écrivant la continuité de la densité de courant en $r = a_2$, donner l'expression de T_2 en fonction de T_a, T_1, λ, h, a_1 et a_2.

4/ On considère la quantité d'énergie Φ sortant radialement du système par unité de temps.

(a) Donner l'expression de Φ en fonction de $J(a_2)$, a_2 et L.

(b) On définit les "résistances thermiques" $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ en écrivant $T_1 - T_2 = \mathcal{R}_1\,\Phi$ et $T_2 - T_a = \mathcal{R}_2\,\Phi$. Donner l'expression de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ en fonction de L, a_1, a_2, λ et h.

(c) Montrer que l'on peut écrire $\Phi = (T_1 - T_a)/\mathcal{R}$ avec

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2\,\pi\,L}\left[\frac{1}{\lambda}\,\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \frac{1}{h\,a_2}\right]\,.$$

(d) Tracer l'allure de $\mathcal{R}$ en fonction de a_2 pour $a_2 \in [a_1, +\infty)$ dans le cas où $a_1 < \lambda/h$ (en particulier on placera précisément les éventuels extréma locaux).

5/ En vous basant sur l'allure du graphe de la question précédente démontrez le paradoxe qui fait l'objet de ce problème : dans certaines conditions (que vous préciserez) le manchon, au lieu d'isoler le tuyau, augmente le flux thermique sortant. Voyez vous une raison simple à ce phénomène ?