

## EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE

*Durée : 2 heures*

*Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.  
Barème approximatif : 1<sup>er</sup> problème : 12 points ; 2<sup>ème</sup> problème : 8 points.*

### 1 Déchets nucléaires : comprendre Fukushima.

On s'intéresse à un système formé par un mélange homogène de déchets nucléaires et de béton, modélisé par un cylindre de section  $S$ , de longueur  $l$  et d'axe  $Ox$ . On suppose qu'on est en **régime permanent** et que la température dans le cylindre est une fonction de  $x$  seulement. À cause des réactions nucléaires en son sein, le matériau dégage une puissance thermique volumique  $\sigma$  répartie uniformément dans le système.

- 1/(a) Rappeler la loi de Fourier reliant la température  $T$  au vecteur densité de courant thermique  $\vec{J}$ . On notera  $\lambda$  la conductivité thermique du milieu.
- (b) En faisant le bilan pendant  $dt$  sur une tranche  $[x, x+dx]$  entre les quantités de chaleur (algébriques) entrante en  $x$ , en  $x + dx$  et la chaleur créée par les réactions nucléaires, démontrer que la température dans le système est régie par une équation de la forme

$$\frac{d^2T}{dx^2} + a = 0 . \quad (1)$$

On donnera l'expression de la constante  $a$  en fonction des paramètres  $\sigma$  et  $\lambda$ . Vérifier l'homogénéité de la formule (si vous n'arrivez pas à démontrer la formule (1) l'argument dimensionnel peut vous permettre de déterminer la valeur de  $a$  en fonction de  $\sigma$  et  $\lambda$  et de passer à la suite).

2/ Les faces  $x = 0$  et  $x = l$  du cylindre sont maintenues à une température fixe  $T_0$  par une circulation d'eau froide.

- (a) Donner alors l'expression de  $T(x)$  pour  $x \in [0, l]$  et tracer la courbe correspondante. Quelle est la valeur de la température maximale  $T_{\max}$  dans le système ?  
Faire l'application numérique avec les paramètres :  $\sigma = 3,0 \text{ kW.m}^{-3}$ ,  $l = 0,5 \text{ m}$ ,  $\lambda = 1,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $T_0 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ .
- (b) Donner l'expression du flux de chaleur  $\Phi(x)$  dans le système. Tracer son allure. Vérifier que toute la puissance créée au sein du cylindre est évacuée par ses faces avant et arrière.

3/ La face en  $x = 0$  est toujours maintenue à la température  $T_0$ . La face en  $x = l$  n'est plus arrosée et les échanges thermiques ne s'y font plus qu'avec l'air ambiant (par rayonnement et convection), lui aussi à la température  $T_0$ . On admet que le flux thermique à travers cette face s'écrit  $\Phi(l) = h S [T(l) - T_0]$  où  $h$  est une constante positive qui décrit empiriquement les échanges thermiques de la face en  $x = l$  avec l'air ambiant. La situation de la question 2/ correspond à la limite  $h \rightarrow \infty$  (ou plus précisément  $h \gg \lambda/l$ ).

- (a) Déterminer la nouvelle expression de  $T(x)$  pour  $x \in [0, l]$ . Quelle est la valeur de la température  $T(l)$  ? Faire l'application numérique en prenant  $h = 5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ . Tracer rapidement la courbe  $T(x)$ .

- (b) Comparer la valeur du flux  $\Phi(l)$  avec celle obtenue en 2.b. Toute la puissance créée au sein du cylindre est elle évacuée par les deux faces (avant et arrière) ? Quelle est la fraction évacuée par la face située en  $x = l$  ?

## 2 Équilibre liquide-vapeur en présence d'un gaz inerte.

0/ Questions de cours :

- (a) Énoncer la deuxième loi de Joule.
- (b) Écrire deux identités thermodynamiques sous forme d'expressions des différentielles de l'enthalpie et de l'enthalpie libre en fonction des accroissements des variables d'état appropriées.

1/ On considère  $n$  moles d'un gaz parfait dont la capacité thermique à pression constant  $C_P$  ne dépend pas de la température. Soient  $P_0$  et  $T_0$  des pression et température de référence pour lesquelles l'enthalpie et l'entropie du système valent respectivement  $H_0$  et  $S_0$ .

- (a) Exprimer  $H - H_0$  et  $S - S_0$  en fonction de  $T$ ,  $P$ ,  $n$ ,  $R$  (constante des gaz parfaits) et des autres paramètres du problème.
- (b) Monter alors que l'enthalpie libre molaire du gaz parfait peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{G}(T, P) = RT \{ \ln P + \phi(T) \} \quad (2)$$

où l'on donnera l'expression de  $\phi$  en fonction de la seule variable d'état  $T$  et des paramètres du problème.

2/ On considère une cellule contenant un liquide en équilibre avec sa vapeur en présence d'un gaz inerte. On affuble d'un indice "1" les grandeurs afférentes à la vapeur (gaz 1) et d'un indice "2" celles afférentes au gaz inerte (gaz 2). Le gaz 1 est assimilé à un gaz parfait dont la capacité thermique  $C_P$  ne dépend pas de la température. Le mélange des deux gaz est un mélange idéal.

On note  $P_\alpha$  la pression partielle et  $\mathcal{G}_\alpha$  l'enthalpie libre molaire du gaz  $\alpha$ ,  $\mathcal{G}_\ell$  l'enthalpie libre molaire du liquide et  $P$  la pression totale (c'est en particulier celle qui est ressentie au sein du liquide).

- (a) Justifier rapidement (en vous inspirant du cours) que la condition d'équilibre liquide-vapeur s'écrit  $\mathcal{G}_\ell(T, P) = \mathcal{G}_1(T, P_1)$ .
- (b) On modifie faiblement la quantité de gaz inerte dans la cellule, en restant à **température constante**. Toutes les pressions changent mais on reste dans les conditions d'équilibre liquide-vapeur. On note  $dP$  et  $dP_1$  les variations respectives de la pression totale  $P$  et de la pression partielle  $P_1$ . En notant  $\mathcal{V}_\ell$  le volume molaire dans la phase liquide montrer que l'on a

$$\mathcal{V}_\ell dP = RT \frac{dP_1}{P_1} \quad (3)$$

Discuter des conséquences physiques contre-intuitives de cette relation: en particulier, comment varie  $P_1$  si on augmente la quantité de gaz inerte ?

- (c) On considère de l'eau en équilibre avec sa vapeur à  $T = 300$  K (sans autre gaz). Dans ce cas  $P = P_1 = 3,6 \times 10^3$  Pa. On augmente à température constante la pression totale au dessus de l'eau de 100 atm en ajoutant un gaz inerte qui ne se dissout pas dans l'eau. Calculer la variation de pression partielle de la vapeur d'eau. (*Indication*: la masse molaire de l'oxygène est de 16 g).