EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : 1er problème : 10 points ; 2ème problème : 10 points.

A Thermalisation entre deux solides

On considère deux corps solides (A et B) de températures initiales $T_A(t \leq 0) = T_A^0$ et $T_B(t \leq 0) = T_B^0$ ($T_A^0 > T_B^0$) et de capacités thermiques C_A et C_B. À l'instant $t = 0$ les deux corps sont mis en contact thermique par l'intermédiaire d'un fil conducteur de la chaleur. On veut étudier comment ce dispositif conduit à l'égalisation de la température entre les deux corps.

Le fil est un cylindre d'axe $x'x$, de section constante S, de longueur L. Il est réalisé dans un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Il est parcouru par une densité de courant thermique $J_{\rm th}(x,t)$ et il règne en son sein un champ de température $T(x,t)$ avec $T(0,t) = T_A(t)$ (température du corps A) et $T(L,t) = T_B(t)$ (température du corps B).

1/ En faisant le bilan de la chaleur reçue pendant dt par un petit élément de fil situé entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, démontrer l'équation de conservation :

$$\mu\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial J_{\rm th}}{\partial x} = 0 \; . \tag{1}$$

2/ On se place désormais en régime "quasi-stationnaire" où le premier terme de gauche dans (1) est négligeable devant le second. Dans ce cas, tracer l'allure de $T(x,t)$ à un instant t donné pour $x \in [0, L]$. On placera les valeurs $T_A(t)$ et $T_B(t)$ sur la courbe.

3/ Soit $\Phi_{\rm th}(t)$ la puissance thermique traversant, à l'instant t, le fil de la gauche vers la droite. Comment $\Phi_{\rm th}$ est-elle reliée à $J_{\rm th}$? Exprimer $\Phi_{\rm th}(t)$ en fonction de la différence $\theta(t) = T_A(t) - T_B(t)$ et de la quantité $R = L/(\lambda S)$.

4/ En faisant le bilan de la quantité de chaleur reçue par le corps A pendant dt, relier $\mathrm{d}T_A/\mathrm{d}t$, C_A et $\Phi_{\rm th}(t)$. Même question pour le corps B (attention aux signes !). En déduire une relation linéaire entre $T_A(t)$ et $T_B(t)$ valable pour tout $t \geq 0$.

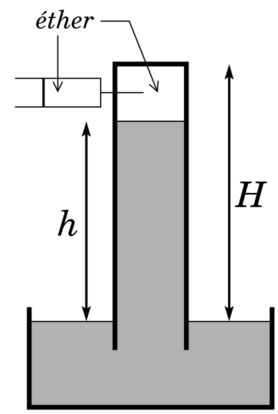
Soit T_∞ la valeur commune de $T_A(t \to \infty)$ et de $T_B(t \to \infty)$. Que vaut T_∞ lorsque $C_A = C_B$? Et lorsque $C_A \gg C_B$? Discuter. On ne fera par la suite aucune hypothèse sur les valeurs relatives de C_A et C_B.

5/ Déduire de la question précécente l'équation différentielle à laquelle obéit la différence de température $\theta(t)$. Montrer que sa solution se met sous la forme $\theta(t) = \theta_0 \exp(-t/\tau)$ où l'on exprimera les constantes θ_0 et τ en fonction des données du problème. Vérifier que le paramètre τ a la dimension d'un temps.

6/ *Question hors barème:* On veut déterminer sous quelle condition l'approximation quasi-stationnaire utilisée dans cet exercice est valable. Pour cela on remplace chacune des contributions dans (1) par l'ordre de grandeur correspondant (par exemple $\partial T/\partial t$ est remplacé par T_∞/τ).

Montrer alors que l'on peut négliger le premier terme de gauche dans (1) dans la limite $C \ll \overline{C}$, où C est la capacité thermique totale du fil (à définir en fonction des données du problème) et $\overline{C}$ est une "moyenne"entre C_A et C_B (à définir également).

B Détente dans un tube de Torricelli



Un tube barométrique vertical de section S plonge dans une cuve à mercure. Le dispositif est maintenu à la température ambiante T. On néglige la pression de vapeur saturante du mercure, de sorte que l'on peut considérer que la pression est nulle au sommet de la colonne de mercure de hauteur initiale h_0.

À l'aide d'une seringue on injecte progressivement de l'éther liquide au sommet de la colonne. Celui-ci se vaporise et la hauteur h de la colonne de mercure diminue progressivement. Au moment où le niveau se stabilise à une hauteur h_1 on cesse d'injecter de l'éther.

1/ Le mercure est considéré comme un liquide incompressible de masse volumique ρ. On note P_0 la pression atmosphérique. Exprimer P_0 en fonction de h_0 puis la pression P de l'éther au sommet de la colonne en fonction de h et h_0.

2/ Interpréter la stabilisation du niveau. Montrer que la mesure de h_0 et de h_1 permet d'accéder à la pression de vapeur saturante $P_s(T)$ de l'éther et, en faisant une approximation que vous expliciterez, au nombre n de moles d'éther vaporisées (on notera H la hauteur de la partie émergée du tube). Que se passerait-il si on continuait d'injecter de l'éther ?

3/ Calculer le travail W fourni par le mercure au système constitué des n moles d'éther qui se vaporisent. *Indication: on montrera que* $W = \int_{h_0}^{h_1} PS\mathrm{d}h$. Discuter le signe du résulat.

4/ Représenter l'état initial (état I) et l'état final (état II) des n moles d'éther initialement liquides sur un diagramme $P-V$ où l'on fera figurer la courbe de saturation et l'isotherme d'Andrews pertinent. On notera V_{I} (respectivement V_{II}) le volume occupé par les n moles d'éther dans l'état I (respectivement II). On représentera sur le graphe : V_{I}, V_{II}, P_0 et $P_s(T)$.

On fera par la suite l'approximation que dans la région liquide l'isotherme d'Andrews est exactement vertical (éther liquide incompressible).

5/(a) Exprimer la variation d'entropie $\Delta S = S_{\mathrm{II}} - S_{\mathrm{I}}$ en fonction de la masse m des n moles d'éther, de T et de la chaleur latente de vaporisation L_{vap} de l'éther à température T (on pourra calculer ΔS en choisissant un trajet adapté dans le diagramme $P-V$).

(b) Montrer de même que la variation d'enthalpie vaut $\Delta H = V_{\mathrm{I}}(P_s(T) - P_0) + mL_{\mathrm{vap}}$.

(c) En déduire la valeur de $\Delta U = \Delta H - \Delta(PV)$ en fonction de m, L_{vap}, $P_s(T)$, V_{I} et V_{II}. Montrer que l'expression de ΔU se simplifie dans la limite où l'on peut négliger V_{I} devant V_{II} et considérer l'éther comme un gaz parfait.

6/ Utiliser les résultats des questions précédentes pour calculer la quantité de chaleur reçue par l'éther (on négligera le travail fourni par l'opérateur sur la seringue). Calculer alors l'entropie créée au cours du processus. Conclure.