

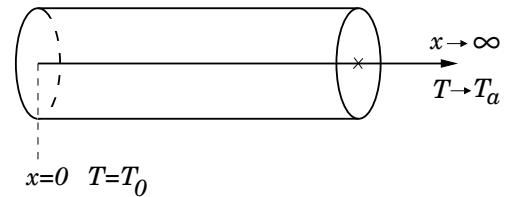
## EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.  
Barème approximatif : 1<sup>er</sup> problème : 10 points ; 2<sup>ème</sup> problème : 10 points.

## A Conductomètre d'Ingenhousz.

Une tige cylindrique de rayon  $R$  et d'axe  $Ox$  est constituée d'un métal de conductivité thermique  $\lambda$ . Cette tige est encastrée par l'une de ses extrémités (en  $x = 0$ ) dans un récipient contenant de l'eau bouillante, de telle sorte que cette extrémité est à une température  $T_0 = 373$  K. Le reste de la tige est en contact avec l'atmosphère de température  $T_a = 293$  K.



La température  $T$  au sein de la tige ne dépend que de la coordonnée  $x$  le long de l'axe, et du temps  $t$ . On admettra que les pertes thermiques sur la surface latérale de la tige (elle est en contact avec l'atmosphère) sont données par l'expression

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma} = h (T(x, t) - T_a). \quad (1)$$

où  $d\mathcal{P}/d\sigma$  est la puissance perdue par élément d'aire latérale, et  $h$  une constante positive, caractéristique des échanges thermiques entre la tige et l'atmosphère.

1/ On considère une tranche de la tige comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Établir le bilan énergétique et montrer qu'il conduit à l'équation

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{R} (T(x, t) - T_a) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2)$$

où  $\mu$  est la masse volumique de la tige, et  $c$  sa capacité thermique massique.

2/ On se place désormais en régime permanent. On considère que l'extrémité qui n'est pas en contact avec l'eau bouillante se situe à  $x = +\infty$  et a une température  $T_a$  (cf. figure). Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(x) = T(x) - T_a$ . Donner sa solution pour  $x \in \mathbb{R}^+$ . On fera apparaître une longueur caractéristique  $\delta$  que l'on exprimera en fonction de  $R$ ,  $h$  et  $\lambda$  (on vérifiera l'homogénéité de la formule).

3/ On compare, dans les conditions précédentes, le comportement de deux tiges de dimensions identiques, l'une en cuivre, l'autre en étain. Chaque tige est recouverte par une fine couche de paraffine dont la température de fusion est 333 K. On suppose que dans ces conditions, l'expression (1) est toujours valable et que le paramètre  $h$  prend la même valeur pour les barres d'étain et de cuivre. Sur la tige de cuivre, la paraffine fond à une abscisse  $x_1 = 15,6$  cm. Sur la tige en étain, cela se produit à  $x_2 = 6,4$  cm. Exprimer alors la conductivité thermique  $\lambda_2$  de l'étain en fonction de celle du cuivre ( $\lambda_1 = 390$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>), de  $x_1$  et de  $x_2$ . Faire l'application numérique.



Conductomètre d'Ingenhousz datant de 1881 conservé à Harvard.

## B Transitions allotropiques du Fer.

0/ Deux questions de cours:

Q<sub>1</sub>: Écrire l'identité thermodynamique adaptée à l'enthalpie libre  $G$  d'un système sous la forme d'une expression appropriée de la différentielle  $dG$ .

Q<sub>2</sub>: Soit  $s$  l'entropie massique d'une substance et  $c_p$  sa capacité thermique massique à pression constante. Démontrer que  $c_p = T(\partial s/\partial T)_P$ .

---

À relativement haute température, et sous pression atmosphérique, le Fer solide existe sous deux phases nommées  $\alpha$  et  $\gamma$  (correspondant à des arrangements différents des atomes dans l'espace). Entre  $T_1 = 1185$  K et  $T_2 = 1667$  K c'est la phase  $\gamma$  qui est stable, au dessous de  $T_1$  et en dessus de  $T_2$  c'est au contraire la phase  $\alpha$  qui est stable.

Dans tout le problème on considèrera que la pression est fixée et que les deux phases ont la même masse volumique (indépendante de  $T$ ), de sorte que le volume d'une quantité donnée de Fer ne change pas et que donc **la température est la seule variable thermodynamique pertinente**. La capacité thermique massique à pression constante<sup>1</sup> dans chaque phase est considérée comme une constante:  $c_\alpha = 0.775$  J/g et  $c_\gamma = 0.690$  J/g.

1/ Tracer très grossièrement les allures des enthalpies libres massiques  $g_\alpha(T)$  et  $g_\gamma(T)$  lorsque  $T$  varie de 1100 K à 1800 K. On indiquera pour quelle région de températures  $g_\alpha(T) > g_\gamma(T)$  et pour quelles températures les deux quantités sont égales.

2/ On se propose de déterminer la dépendance en température des entropies massiques pour chaque phase.

- Donner les lois de variation des entropies massiques  $s_\alpha(T)$  et  $s_\gamma(T)$ . On choisira l'origine des entropies de sorte que  $s_\alpha(T_1) = 0$  et on notera  $s_{\gamma,1} = s_\gamma(T_1)$ .
- En déduire les lois de variation des enthalpies libres massiques  $g_\alpha(T)$  et  $g_\gamma(T)$ .
- En calculant les deux expressions  $g_\alpha(T_2) - g_\alpha(T_1)$  et  $g_\gamma(T_2) - g_\gamma(T_1)$ , montrer que

$$s_{\gamma,1} = (c_\alpha - c_\gamma) \left[ \frac{T_2}{T_2 - T_1} \ln(T_2/T_1) - 1 \right]. \quad (3)$$

3/ Calculer les chaleurs latentes de transition  $L_{\alpha \rightarrow \gamma}(T_1)$  et  $L_{\gamma \rightarrow \alpha}(T_2)$ . Comparer avec les valeurs expérimentales  $L_{\alpha \rightarrow \gamma}(T_1) = (16.5 \pm 2)$  J/g et  $L_{\gamma \rightarrow \alpha}(T_2) = (19.5 \pm 2)$  J/g.

---

<sup>1</sup>Au vu de la remarque qui précède, la précision "à pression constante" est inutile. On a fait cette précision afin de pouvoir ultérieurement utiliser facilement les questions de cours qui figurent au début de l'énoncé.