L3 et Magistère 1$^{\text{ème}}$ année 4 mai 2015

EXAMEN de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures 30 minutes

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 11.5 pts ; B = 8.5 pts.

Formulaire – Rappels de cours

• On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour composantes respectives A^μ et A'^μ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, A^\nu$ avec

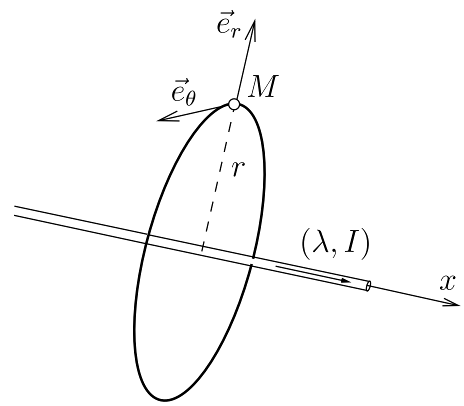
$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} .$$

Pour inverser la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.

• Un fil conducteur infiniment long et fin, assimilé à l'axe Ox, parcouru par un courant I et portant une charge linéique λ, crée, en un point M situé à une distance r du fil, des champs électrique et magnétique ayant pour expression:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{r}\,\vec{e}_r , \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{r}\,\vec{e}_\theta . \qquad (1)$$

Dans ces expressions λ et I sont des quantités algébriques, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont définis sur la figure ci-contre et ne dépendent pas du signe de λ ou I.



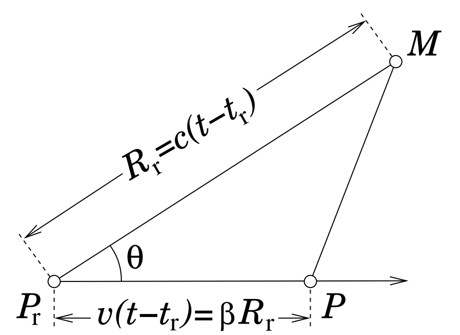
• Dans un milieu diélectrique isotrope d'indice n les équations de Maxwell prennent la forme:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0\, n^2} , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 , \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\partial_t\vec{B} , \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\,\vec{J}(\vec{r},t) + \mu_0\,\varepsilon_0\, n^2\,\partial_t\vec{E} . \qquad (2)$$

• Une particule de charge q se déplaçant dans le vide à vitesse constante $\vec{v}$ crée, en un point M, un potentiel électrique

$$\phi(M,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R_{\rm r}\left(1 - \hat{R}_{\rm r}\cdot\vec{\beta}\right)} , \quad \text{où} \quad \vec{\beta} = \vec{v}/c . \qquad (3)$$

Les notations sont définies sur la figure ci-contre: P est la position de la particule à l'instant t et $P_{\rm r}$ sa position à l'instant retardé $t_{\rm r}$ défini de sorte que: $P_{\rm r}M = c\,(t - t_{\rm r})$. On note $R_{\rm r} = P_{\rm r}M$ et $\hat{R}_{\rm r} = \overrightarrow{P_{\rm r}M}/R_{\rm r}$.



• L'équation de propagation du champ électrique dans le vide en l'absence de charge et de courant est (le champ $\vec{B}(\vec{r},t)$ vérifie la même équation)

$$\left(\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2\right)\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0}\,. \tag{4}$$

A Effet Cherenkov

Les déchets radioactifs placés dans les piscines de stockage d'un réacteur nucléaire émettent un rayonnement bleuté. C'est cet effet que nous allons étudier dans ce problème. Il correspond à l'émission de photons par des électrons issus de désintégrations radioactives et a lieu lorsque les électrons se déplacent plus vite que la lumière **dans le milieu**.

1/ Montrer que les équations de Maxwell (2) dans un milieu diélectrique peuvent être formellement ramenées aux équations dans le vide (en présence de charges et de courants) en remplaçant ε_0 par une valeur effective ε_0^* qu'on exprimera en fonction de ε_0 et n. Quelle est la vitesse c^* de propagation de la lumière dans le milieu ?

2/ En déduire le potentiel électrique créé par une particule chargée P en mouvement à vitesse constante v dans le milieu diélectrique. *Indication :* adapter l'équation (3) en utilisant ε_0^* et c^*.

(a) Montrer que si la vitesse v est supérieure à une vitesse critique que l'on déterminera, ce potentiel diverge dans une direction θ dont on donnera l'expression en fonction de c^* et v (l'angle θ est défini sur la figure).

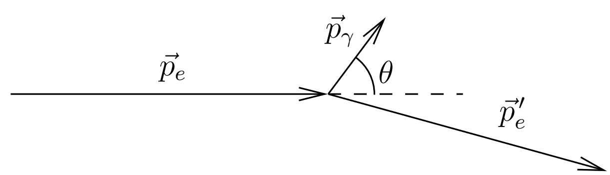
(b) Reproduire la figure en l'adaptant au cas où v est supérieure à la vitesse critique. Montrer que pour la direction θ qui vient d'être déterminée, le triangle $P_{\mathrm{r}}MP$ est rectangle en M.

(c) En déduire qu'à l'instant t, le lieu des points M où le champ diverge est un cône de sommet P et d'axe $\vec{v}/v$ dont on donnera l'ouverture angulaire en fonction de v et c^*.

(d) Comment varie l'ouverture du cône quand la vitesse de la particule augmente ? Quelles sont ses valeurs extrémales ? On donnera les valeurs numériques en prenant $n = 1.33$ (indice de l'eau).

3/ On va analyser le phénomène en utilisant des considérations cinématiques. La particule est un électron de masse $m = 511$ keV$/c^2$ dont on note la quadri-impulsion $\underline{P}_e$.

Lorsque l'effet Cherenkov se produit, l'électron émet un photon dans une direction faisant un angle θ (*a priori* indéterminé) avec la vitesse $\vec{v}$ de l'électron incident. On notera $\underline{P}'_e$ et $\underline{P}_\gamma$ les quadri-impulsions après l'émission.



(a) Écrire la forme que prend l'équation de propagation (4) dans le milieu d'indice n en l'absence de charge et de courant. En déduire la relation de dispersion d'une onde plane pour laquelle les champs ont une dépendance spatio-temporelle de la forme $\exp\{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\}$. Justifier alors que dans un milieu d'indice n, la quadri-impulsion d'un photon de pulsation ω se propageant selon la direction $\vec{u}$ ($|\vec{u}\,| = 1$) s'écrit $\underline{P}_\gamma = \hbar\,(\omega/c\,, n\,\omega\,\vec{u}/c)$. Exprimer $\underline{P}_\gamma^2$ et commenter le résultat.

(b) Donner les expressions relativistes de l'énergie E_e et de l'impulsion $\vec{p}_e$ initiales de l'électron en fonction de m, $\vec{v}$ et $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ (où $\beta = v/c$).

(c) Écrire la conservation de l'énergie-impulsion au cours de la réaction. En déduire une relation entre $\underline{P}_\gamma^2$ et $(\underline{P}_e \cdot \underline{P}_\gamma)$, puis l'expression de l'angle d'émission du photon:

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta}\left(1 + \frac{\hbar\omega}{2\,\gamma\, mc^2}(n^2-1)\right) \ . \tag{A1}$$

4/ L'électron se propage dans l'eau ($n = 1.33$) de la piscine de stockage d'un réacteur nucléaire en émettant un photon bleu de longueur d'onde $2\pi c/\omega = 0.46$ μm. Justifier par une évaluation des ordres de grandeur[1] qu'on peut faire une approximation qui simplifie grandement l'expression (A1).

(a) En déduire que l'effet Cherenkov ne peut se produire que si $v \geq c/n$. Que vaut l'angle θ correspondant ? Comparer avec le résultat de la question **2/**.

(b) Pour pousser la comparaison plus avant, on évaluera l'ordre de grandeur de la répercussion qu'a l'émission du photon sur l'impulsion de l'électron et on discutera l'approximation de translation rectiligne uniforme utilisée dans la question **2/**.

B Courant dans un fil

On considère un fil rectiligne d'axe Ox. Le fil contient des charges positives (des ions) immobiles correspondant à une charge électrique volumique $\rho_{\rm i}$ et une densité de courant $\vec{J}_{\rm i} = \vec{0}$. Il y a aussi des électrons (charge $\rho_{\rm e}$) se déplaçant à la vitesse $\vec{u} = u\,\vec{e}_x$ créant une densité de courant $\vec{J}_{\rm e} = \rho_{\rm e}\,\vec{u}$. Le fil étant globalement neutre, la densité totale de charge vaut $\rho = \rho_{\rm i} + \rho_{\rm e} = 0$.

1/ le quadri-courant **total** sera noté $\underline{J}$. Écrire ses composantes dans le référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel le fil est immobile.

2/ On considère un référentiel $\mathcal{R}'$ se déplaçant à vitesse constante $V\,\vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Déterminer les densités de charge et de courant totales dans $\mathcal{R}'$.

3/ Dans $\mathcal{R}$ une charge test q est immobile à une distance r du fil. Quelle force ressent-elle ?

4/ On va tenter de retrouver ce résultat en travaillant dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

(a) En utilisant les résultats de la question **1/**, déterminer dans $\mathcal{R}'$ les champs $\vec{E}\,'$ et $\vec{B}\,'$ créés par le fil. *Indication: on notera S la section du fil. Il est approprié d'introduire la charge linéique du fil dans $\mathcal{R}'$ ($\lambda' = \rho'\,S$) et le courant $I' = J'_x\,S$ afin d'utiliser* (1).

(b) Déterminer, toujours dans $\mathcal{R}'$, la force induite sur la particule (qui se déplace à vitesse constante dans $\mathcal{R}'$).

(c) Retrouver le même résultat en utilisant le concept de quadri-force dont on rappelle qu'elle s'exprime comme $\mathcal{F}^\mu = \gamma\,(\vec{F}_{\rm Lorentz} \cdot \vec{v}/c\,, \vec{F}_{\rm Lorentz})$ où $\vec{F}_{\rm Lorentz} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\,)$.

[1] Pour les applications numériques on utilisera $\hbar\,c \simeq 200$ MeV.fm où 1 fm$= 10^{-15}$ m.