L3 et Magistère 1ère année 13 mai 2015

EXAMEN de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures 30 minutes

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 5 pts ; B = 15 pts .

A Champs électrique et magnétique orthogonaux

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, règne un champ électrique $\vec{E} = E\,\vec{e}_z$ et un champ magnétique $\vec{B} = B\,\vec{e}_y$ perpendiculaires. On considère également un référentiel $\mathcal{R}'$ se déplaçant par rapport à $\mathcal{R}$ avec une vitesse rectiligne uniforme $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$.

1/ Écrire dans $\mathcal{R}$ le tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ pour ce cas particulier.

2/ Calculer le tenseur électromagnétique $F'^{\mu\nu}$ dans $\mathcal{R}'$. En déduire l'expression de $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$, champs électromagnétiques dans $\mathcal{R}'$.

3/ Vérifiez l'invariance de $\vec{E}.\vec{B}$ et de $\vec{E}^{\,2} - \vec{B}^{\,2}c^2$.

4/ Donner la valeur de la vitesse v de $\mathcal{R}'$ dans les deux cas suivants :

(a) Le champ électrique s'annule dans $\mathcal{R}'$.

(b) Le champ magnétique s'annule dans $\mathcal{R}'$.

5/ Dans le cas particulier où $E = Bc$, existe-t-il un référentiel $\mathcal{R}'$ où l'un des champs s'annule ? Justifier votre réponse sans employer les expressions explicites obtenues à la question **2/**.

B Particule chargée dans un champ électromagnétique

0/ *Question de cours:* On considère une particule suivant une trajectoire $\vec{r}(t)$ dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$. Définir le temps propre τ et la quadri-vitesse $\underline{U}$. Donner l'expression des coordonnées covariantes U_μ et contravariantes U^μ de la quadri-vitesse en fonction de la vitesse $\vec{v}(t)$ de la particule. Que vaut la pseudo-norme $U_\mu U^\mu$?

On étudie le mouvement d'une particule de masse m et de charge q dans un référentiel $\mathcal{R}$ où règne un champ électromagnétique uniforme et statique, décrit par $\vec{E} = E\,\vec{e}_y$ et $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$, avec $E \geq 0$ et $B \geq 0$, constants.

1/ Écrire les équations du mouvement en donnant explicitement l'expression des dérivées des composantes U_μ de la quadri-vitesse par rapport au temps propre τ en fonction de E, B, m, q et des U_ν.

2/ Déduire des équations du mouvement que la quantité

$$\Omega = B\,c\,U_0 + E\,U_1 \tag{B1}$$

est conservée au cours du temps. On exprimera Ω en fonction de la vitesse initiale.

3/ On suppose désormais que $U_3 = 0$.

(a) Montrer que cette hypothèse est compatible avec les équations du mouvement.

(b) En utilisant les équations du mouvement et la normalisation de la quadri-vitesse, démontrer l'identité

$$(E\,U_0 + B\,c\,U_1)^2 - (E^2 - B^2c^2)\,(U_2)^2 = \Omega^2 + (E^2 - B^2c^2)\,c^2\ . \tag{B2}$$

4/ Si $B\,c > E$ (ce qu'on supposera désormais) on peut utiliser la paramétrisation

$$E\,U_0 + B\,c\,U_1 = \mu\,\cos\chi\ \ ,\quad \sqrt{B^2c^2 - E^2}\,U_2 = \mu\,\sin\chi\ \ ,\quad \text{avec}\quad \mu > 0\ . \tag{B3}$$

(a) Montrer que μ et $\omega \equiv -\mathrm{d}\chi/\mathrm{d}\tau$ sont des constantes indépendantes de τ et donner leur expression. Démontrer que ω et χ sont des scalaires de Lorentz. Montrer que $\omega > 0$ si $q > 0$ (ce qu'on supposera désormais).

(b) On se place dans le cas particulier où la vitesse initiale de la particule est nulle, avec $E \neq 0$. Écrire explicitement les composantes de la quadrivitesse en fonction du temps propre. Au bout de quel temps propre τ^* la vitesse de la particule s'annule-t-elle à nouveau ?

(c) Exprimer le temps t dans le référentiel $\mathcal{R}$ en fonction du temps propre τ (on prendra $t = 0$ à $\tau = 0$). *Indication: commencer par exprimer* $\mathrm{d}t$ *en fonction de* $\mathrm{d}\tau$ *et* τ. Au bout de quel temps t^* (dans $\mathcal{R}$) la vitesse de la particule s'annule-t-elle de nouveau ?

5/ On fixe l'origine des coordonnées comme étant la position de la particule à l'instant $t = 0$. Montrer alors que l'équation de la trajectoire de la particule est

$$x(\tau) = \frac{EBc}{B^2c^2 - E^2}\,\frac{c}{\omega}\Big(\omega\tau - \sin(\omega\tau)\Big)\ ,\quad y(\tau) = \frac{E}{\sqrt{B^2c^2 - E^2}}\,\frac{c}{\omega}\Big(1 - \cos(\omega\tau)\Big)\ . \tag{B4}$$

Tracer son allure dans le plan xOy. Pour simplifier le graphe on pourra utiliser des unités adaptées pour chaque coordonnée (pas nécessairement les mêmes sur les deux axes).

6/ On veut vérifier la conservation de l'énergie totale de la particule au cours du mouvement.

(a) Justifier rapidement que pour le champ électromagnétique considéré dans ce problème on peut choisir un potentiel vecteur $\vec{A}$ ne dépendant pas du temps. Donner alors l'expression du potentiel scalaire ϕ.

(b) Vérifier que l'énergie totale de la particule (cf. son expression (1) dans les rappels) ne dépend pas du temps. Donner sa valeur.

Formulaire – Rappels de cours

• On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour composantes respectives A^μ et A'^μ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, A^\nu$ avec

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \,.$$

Pour inverser la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.

• On note E_x, E_y et E_z (resp. B_x, B_y et B_z) les composantes cartésiennes du champ électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ (resp. du champ magnétique $\vec{B}(\vec{r},t)$). La forme deux fois contravariante du tenseur électromagnétique est:

$$F^{\mu\nu}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

• Les équations du mouvement d'une particule de masse m et de charge q dans un champ électromagnétique s'écrivent sous forme covariante:

$$m\,\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = q\,F^{\mu\nu}\,U_\nu \;,$$

où τ est le temps propre et $\underline{U}$ la quadri-vitesse.

• L'énergie totale d'une particule de masse m et de charge q plongée dans un champ électromagnétique et suivant une trajectoire $\vec{r}(t)$ est

$$\mathcal{E} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\vec{v}^{\,2}(t)/c^2}} + q\,\phi(\vec{r}(t),t) \;, \tag{1}$$

où ϕ est le potentiel scalaire : $\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}$ et $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$.