EXAMEN de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures 30 mns

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 13 pts ; B = 5 pts ; C = 2 pts.

Formulaire – Rappel de cours

• On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesses $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour coordonnées respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}$ avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \ .$$

Pour inverser la relation entre $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.

• Lors d'un changement de référentiel inertiel, les champs électriques et magnétiques dans le nouveau référentiel [$\vec{E}\,'$ et $\vec{B}\,'$] s'expriment en fonction de ceux dans l'ancien [$\vec{E}$ et $\vec{B}$] selon les relations

$$\vec{E}\,' = \gamma\left(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B}\right) + (1-\gamma)\,\frac{\vec{V}\cdot\vec{E}}{V^2}\,\vec{V}\ , \quad \text{et} \quad \vec{B}\,' = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c^2}\wedge\vec{E}\right) + (1-\gamma)\,\frac{\vec{V}\cdot\vec{B}}{V^2}\,\vec{V}\ ,$$

où $\vec{V}$ est la vitesse du nouveau référentiel par rapport à l'ancien.

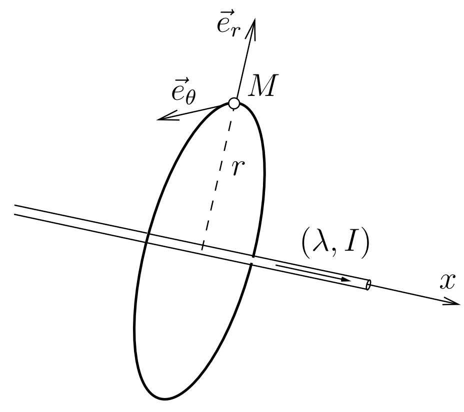
• On donne

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{argth} x\ , \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

• Un fil conducteur infiniment long et fin, assimilé à l'axe Ox, parcouru par un courant I et portant une charge linéique λ, crée, en un point M situé à une distance r du fil, des champs électrique et magnétique ayant pour expression:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{r}\,\vec{e}_r\ , \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{r}\,\vec{e}_\theta\ .$$

Dans ces expressions λ et I sont des quantités algébriques, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont définis sur la figure ci-contre et ne dépendent pas du signe de λ ou I.



A La fusée relativiste

01/ Rappeler l'expression de la quadri-impulsion $\underset{\sim}{P}$ d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}(t)$ dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$; on notera[1] $\gamma = (1 - \vec{v}^{\,2}/c^2)^{-1/2}$. En déduire une relation entre l'impulsion $\vec{p}$, la vitesse $\vec{v}$ et l'énergie $\mathcal{E}$.

02/ On ne considère qu'une dimension d'espace, et on définit la quadri-accélération $\underset{\sim}{\Gamma} = \mathrm{d}\underset{\sim}{U}/\mathrm{d}\tau$, où $\underset{\sim}{U}$ est la quadri-vitesse et τ le temps propre du point matériel.

(a) Montrer que dans $\mathcal{R}$ on a : $\underset{\sim}{\Gamma} = \gamma^4(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)\,(\beta, 1)$ où $\beta = v/c$.

(b) Définir le référentiel propre $\mathcal{R}_0$ du point matériel. En faisant une transformation de Lorentz de $\mathcal{R}$ vers le référentiel inertiel commobile à l'instant t avec $\mathcal{R}_0$ montrer que dans ce référentiel l'accélération propre s'écrit (en fonction des coordonnées dans $\mathcal{R}$): $\underset{\sim}{\Gamma}_0 = (0, \gamma^3\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$.

Une fusée se propulse en ligne droite dans l'espace en éjectant continûment du gaz vers l'arrière. Dans le référentiel propre $\mathcal{R}_0$ de la fusée, le gaz est éjecté avec une vitesse constante $\vec{u}_0 = -u_0\,\vec{e}_x$, où $u_0 > 0$. On va étudier dans un référentiel inertiel fixe $\mathcal{R}$ la vitesse acquise par la fusée. On ne considérera qu'une seule coordonnée spatiale, le long de l'axe Ox. On notera $\vec{v} = v(t)\,\vec{e}_x$ la vitesse de la fusée dans $\mathcal{R}$.

1/ On se place ici dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

(a) Donner l'expression de la quadri-impulsion $\underset{\sim}{P}_0$ de la fusée en fonction de sa masse M.

(b) Lorsque la fusée éjecte une masse $\mathrm{d}m$ de gaz ($\mathrm{d}m > 0$), elle voit sa masse, son énergie et son impulsion changer respectivement de $\mathrm{d}M$, $\mathrm{d}\mathcal{E}_0$ et $\mathrm{d}p_0$. En écrivant la conservation de la quadri-impulsion de l'ensemble {fusée+masse éjectée} donner l'expression de $\mathrm{d}M$, $\mathrm{d}p_0$ et $\mathrm{d}\mathcal{E}_0$ en fonction de $\mathrm{d}m$, u_0 et $\gamma_0 = (1 - u_0^2/c^2)^{-1/2}$.

(c) La variation de masse $\mathrm{d}M$ de la fusée est-elle égale à $-\mathrm{d}m$? Commenter.

2/ On se place maintenant dans $\mathcal{R}$.

(a) Exprimer les variations d'énergie $\mathrm{d}\mathcal{E}$ et d'impulsion $\mathrm{d}p$ associées à l'éjection de la masse $\mathrm{d}m$ en utilisant une transformation de Lorentz que vous définirez.

(b) Déduire de la question précédente et de la relation vectorielle établie en **01/** que lorsque la fusée voit sa masse changer de $\mathrm{d}M$ alors sa vitesse dans $\mathcal{R}$ change de $\mathrm{d}v$ avec

$$\frac{\mathrm{d}v}{1 - v^2/c^2} = -u_0\,\frac{\mathrm{d}M}{M}\ . \tag{A1}$$

(c) Intégrer cette équation et représenter l'allure de la courbe donnant v/c en fonction de $R = M_0/M$, où M_0 est la masse initiale de la fusée (on prendra une vitesse initiale nulle). On discutera en particulier les limites de v/c lorsque R tend vers 1 et $+\infty$. Quelle est la valeur caractéristique de R qui sépare le régime non relativiste du régime hyper-relativiste ?

[1] Attention, d'après sa définition γ dépend *a priori* du temps.

3/ On désire que le mouvement s'effectue à accélération propre constante (on la notera a_0).

(a) En utilisant le résultat de la question **02/**(b), montrer que l'on doit avoir

$$\frac{\mathrm{d}v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = a_0 \, \mathrm{d}t \; . \tag{A2}$$

(b) Intégrer cette équation en prenant comme condition initiale $v = 0$ à $t = 0$.

(c) Donner alors dans le référentiel propre la loi de variation $M(\tau)$ (où τ est le temps propre). *Indication :* Établir une relation entre $\mathrm{d}M$ et $\mathrm{d}\tau$.

B Force entre deux faisceaux

Deux faisceaux identiques de protons sont contraints à se déplacer parallèlement. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire la distance entre les faisceaux est notée d et la vitesse constante des protons $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$. On notera λ la densité de charge linéique d'un faisceau et $I = \lambda\, v$ le courant correspondant.

1/ Calculer, en fonction de λ et v, la force exercée par l'un des faisceaux sur un proton de l'autre faisceau. En déduire la force par unité de longeur F/L subie par chaque faisceau.

2/ Calculer de même F'/L', la force par unité de longeur dans le référentiel $\mathcal{R}'$ où les protons sont au repos. En déduire une relation entre les densités λ et λ' dans les référentiel $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

3/ Exprimer le quadri-vecteur courant $\underset{\sim}{J}$ dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. Retrouver alors d'une autre manière la relation entre λ et λ' déjà obtenue à la question précédente.

4/ À partir de ce résultat retrouver la loi de contraction des longueurs.

C Sélecteur de vitesse

Dans une région de l'espace règnent un champ électrique uniforme dirigé selon l'axe y ($\vec{E} = E\,\vec{e}_y$) et un champ magnétique uniforme dirigé selon z ($\vec{B} = B\,\vec{e}_z$). Un tel dispositif peut être réalisé en plaçant un long condensateur entre les pôles d'un aimant. Soit une particule de charge q se déplaçant entre les armatures du condensateur avec une vitesse non nulle dans la direction x.

1/ Déterminer en fonction de E et B la vitesse v pour laquelle la particule ne sera pas déviée[2].

2/ On considère ce dispositif à partir d'un référentiel $\mathcal{R}'$ se déplaçant à vitesse V selon l'axe Ox.

(a) Donner l'expression des champs électromagnétiques (soient $\vec{E}\,'$ et $\vec{B}\,'$) du dispositif dans $\mathcal{R}'$.

(b) Quelle est dans $\mathcal{R}'$ la vitesse v' pour laquelle la particule ne sera pas déviée ?

(c) Déduire de la question précédente une expression de v' en fonction de v et V. Commenter.

[2] Un tel dispositif peut donc servir de sélecteur de vitesse pour les particules chargées.