L3 et Magistère 1ème année 10 mars 2015

EXAMEN PARTIEL de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 9 pts ; B = 6.5 pts ; C = 4.5 pts.

Formulaire – Rappel de cours

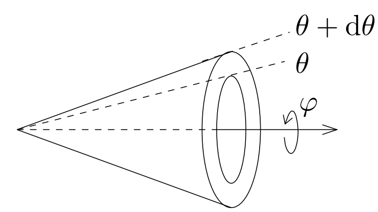
• On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour coordonnées respectives $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}$ avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} .$$

Pour inverser la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.

• Un objet de longueur L' au repos dans $\mathcal{R}'$ aura, dans $\mathcal{R}$, une longeur $L = L'/\gamma$. Deux évènements situés à la même position et séparés par une durée T' dans $\mathcal{R}'$ seront, dans $\mathcal{R}$, séparés par $T = \gamma\, T'$.

• L'angle solide élémentaire est $\mathrm{d}^2\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ (avec des notations évidentes). Lorsqu'on intègre sur φ on obtient l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ qui correspond au secteur angulaire compris entre les cônes d'ouverture θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$: $\mathrm{d}\Omega = 2\,\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, où $\theta \in [0, \pi]$.



A Désintégration en vol d'un méson π^0 en deux photons

Un méson π^0 de masse M est animé d'une vitesse constante $\vec{v}$ par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ supposé inertiel. Ce méson π^0 se désintègre en vol en deux photons ($\pi^0 \to \gamma_1 + \gamma_2$).

1/ Écrire sous forme quadri-vectorielle la conservation de l'énergie et de l'impulsion au cours de la désintégration. Exprimer les énergies et les modules des impulsions des photons émis dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse du π^0 en fonction de M et c.

2/ Soit θ la direction que fait l'un des deux photons émis par rapport à $\vec{v}$ dans le référentiel du laboratoire, et θ^* l'angle correspondant dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$.

(a) Écrire la transformation de Lorentz qui permet de passer de $\mathcal{R}^*$ à $\mathcal{R}$, puis exprimer l'énergie E du photon émis dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'angle d'émission θ^*.

(b) En déduire les valeurs extrémales $E_{\min}$ et $E_{\max}$ des énergies des photons émis dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire.

(c) Exprimer $\cos\theta^*$ en fonction de $\cos\theta$ et $\beta = |\vec{v}\,|/c$.

3/ Dans le référentiel du centre de masse les photons sont émis selon une distribution isotrope : si N_0 est le nombre total de photons émis, le nombre $\mathrm{d}N$ de photons émis dans l'angle solide $\mathrm{d}\Omega^*$ correspondant à un secteur angulaire d'ouverture $\mathrm{d}\theta^*$ et d'axe $\vec{v}$ est égal à $\mathrm{d}N = N_0\,\mathrm{d}\Omega^*/(4\pi)$.

(a) Trouver la fonction de distribution spatiale $f(\theta)$ des photons émis dans le référentiel du laboratoire telle que $\mathrm{d}N = N_0 f(\theta)\,\mathrm{d}\Omega/(4\pi)$.

(b) Exprimer l'énergie E du photon dans $\mathcal{R}$ en fonction de l'angle θ d'émission dans $\mathcal{R}$. En déduire $\mathrm{d}N/|\mathrm{d}E|$ et montrer que pour β fixé, le spectre d'énergie des photons émis est plat dans le référentiel du laboratoire, avec $\mathrm{d}N/|\mathrm{d}E| = N_0/(E_{\max} - E_{\min}) = C^{\mathrm{ste}}$.

(c) L'expérience donne $E_{\min} = 54 \pm 1$ MeV et $E_{\max} = 85 \pm 1$ MeV. En déduire la valeur de la masse du méson π^0 et le β correspondant.

B Observations radio

Un vaisseau spatial de longueur $\ell_0 = 600$ m s'éloigne en ligne directe de la Terre à vitesse constante. Une impulsion radio émise depuis la Terre est renvoyée par des réflecteurs disposés à l'arrière et à l'avant du vaisseau. La première impulsion réfléchie est reçue sur Terre 200 s après l'émission. Le signal issu de la seconde réflexion est reçu $\Delta t = 17.6\ \mu$s plus tard.

1/ Représentez schématiquement ce scénario sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$. On représentera la trajectoire d'espace-temps des extrémités du vaisseau, la propagation de l'impulsion radio, l'évènement d'émission $\underline{O}$ (pris comme origine des coordonnées spatiales et temporelle), les deux réflexions $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ et les deux réceptions sur Terre $\underline{B}_1$ et $\underline{B}_2$.

2/ Calculer la distance du vaisseau à la Terre (on fera ce calcul en se plaçant à l'instant de réflexion).

3/ On veut déterminer la vitesse V du vaisseau dans $\mathcal{R}$.

(a) Montrer par une construction géométrique sur le graphe précédent, ou par le raisonnement, que, dans $\mathcal{R}$, la longueur apparente ℓ du vaisseau, et l'intervalle de temps δt qui sépare les deux évènements de réflexion sont reliés par $\ell = (c - V)\,\delta t$.

(b) En déduire l'expression de $\beta = V/c$ en fonction de $c\,\delta t$ et ℓ_0.

(c) Relier δt et Δt puis donner la valeur numérique de β.

C Mesure de vitesse

Une voiture, assimilée à un miroir, s'éloigne d'un gendarme en ligne droite, à vitesse constante V. Le gendarme émet un rayonnement lumineux de pulsation ω_{i} qui, après réflexion sur la voiture/miroir, revient vers le gendarme avec une pulsation ω_{r}. Exprimer ω_{r} en fonction de ω_{i}.

Indications : (1) Utiliser le quadri-vecteur d'onde. (2) On notera ω'_{i} et ω'_{r} les pulsations dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au miroir et on justifiera par des arguments physiques que $\omega'_{\mathrm{i}} = \omega'_{\mathrm{r}}$.

U.S. Army soldier using a radar gun to catch speeding violators.