L3 et Magistère 1ère année
Physique fondamentale — 17 mars 2015

EXAMEN PARTIEL de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : I = 8 pts ; II = 3 pts ; III = 9 pts.
N.B.: Tous les résultats doivent être justifiés par un raisonnement. Vérifiez l'homogénéité de tous vos résultats.

On rappelle: $h = 6,6\,10^{-34}$ J.s; $c = 3\,10^{8}$ m.s^{-1}; $m_e = 9,1\,10^{-31}$ kg masse de l'électron.

Rappels de cours

• On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse constante $\overrightarrow{V} = V\,\overrightarrow{e_x}$. Si un quadrivecteur a pour coordonnées respectives $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,A^{\nu}$ avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}\ .$$

• Un objet de longueur L' au repos dans $\mathcal{R}'$ aura, dans $\mathcal{R}$, une longueur $L = L'/\gamma$. Deux évènements situés à la même position et séparés par une durée T' dans $\mathcal{R}'$ seront, dans $\mathcal{R}$, séparés par $T = \gamma\,T'$.

• Dans un référentiel $\mathcal{R}$, un point matériel de masse m et de vitesse v a une énergie cinétique $m(\gamma-1)c^2$.

I Mouvement hyperbolique

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, une fusée assimilée à un point suit une trajectoire d'équation horaire: $x(t) = L\sqrt{1+(ct/L)^2}$ $(L > 0)$ et $y(t) = z(t) = 0$. On notera $\mathcal{R}'$ le référentiel de la fusée ou référentiel propre.

1) a) Dans un diagramme d'espace-temps (x, ct), représenter la trajectoire de la fusée dans $\mathcal{R}$.

b) Dans $\mathcal{R}$, donner l'expression du quadrivecteur position de la fusée, $\underline{X}$. Calculer sa norme $\underline{X}^2$, montrer qu'elle a une valeur constante et donner cette valeur.

2) Exprimer la vitesse de la fusée dans $\mathcal{R}$, $v(t)$ en fonction de t, L et c puis en fonction de t, c et x.

3) Dans $\mathcal{R}'$, on considère 2 évènements situés à la même position et séparés d'un intervalle de temps $\mathrm{d}t'$. L'intervalle d'espace-temps correspondant dans $\mathcal{R}'$ est $\mathrm{d}s'^2$.

a) Exprimer l'intervalle d'espace-temps $\mathrm{d}s^2$ correspondant dans $\mathcal{R}$. Exprimer alors $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathrm{d}t'$. En utilisant le résultat du 2) montrer que $c\,t' = L \times \mathrm{Argsh}\,(c\,t/L)$.

b) Exprimer alors t puis x en fonction du temps propre t' ainsi que de L et c.

c) On définit $\underline{U} = \dfrac{\mathrm{d}\underline{X}}{\mathrm{d}t'}$. Justifier que $\underline{U}$ est effectivement un quadri-vecteur, comment s'appelle-t-il ? Exprimer $\underline{U}$ en fonction de t', c et L.

d) Exprimer enfin le quadrivecteur accélération $\underline{\Gamma}$ de la fusée d'abord en fonction de t' puis en fonction de t et x. Calculer sa norme. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

II Effet Doppler longitudinal

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, l'observateur A est au repos au point origine O de coordonnées $(0,0)$. Dans $\mathcal{R}$ l'observateur B s'éloigne de A en ligne droite et à vitesse constante v. Des signaux lumineux sont émis par B vers A à intervalles de temps réguliers $\Delta\tau$.

1) Sur un diagramme d'espace-temps dans $\mathcal{R}$, représenter la trajectoire de B ainsi que celles des photons qu'il émet. Indiquer également sur ce diagramme les temps $\Delta\tau$, Δt ainsi que la distance parcourue par B pendant Δt.

2) En fonction de Δt et β, exprimer le temps Δt_r écoulé entre 2 réceptions de signal par A. En déduire la relation entre la fréquence des signaux émis par B, f_e et la fréquence de réception f_r des ces signaux par A.

3) a) Rappeler la définition du quadrivecteur d'onde d'un photon.

b) Sachant que la phase d'une onde lumineuse est un invariant de Lorentz, retrouver la formule de Doppler précédemment établie.

III Diffusion Compton inverse

Dans l'Univers jeune, des masses de gaz d'hydrogène se contractent pour former des galaxies et on nomme ces systèmes amas de galaxies. En traversant un amas de galaxies, les photons du rayonnement de fond cosmique (corps noir à 2,7 K) subissent des collisions avec les électrons qui augmentent leur énergie: c'est l'effet Compton inverse. On considère donc la diffusion d'un photon de fréquence ν par un électron d'impulsion $\overrightarrow{p_e}$, d'énergie E_e et de facteur de Lorentz γ. Pour décrire ce processus, *on se place dans $\mathcal{R}$ le référentiel propre de l'électron après la collision* et on suppose que le photon diffusé de fréquence ν' se propage selon l'axe Ox. L'angle entre Ox et l'impulsion du photon incident est θ et l'angle entre Ox et $\overrightarrow{p_e}$ sera noté φ.

0) *Question de cours:* Rappeler la définition du quadrivecteur impulsion $\underline{P}$ d'une particule de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$. Que vaut la norme de $\underline{P}$? Exprimer alors $\underline{P}$ en fonction de E et $\overrightarrow{p}$, énergie totale et impulsion relativiste de la particule. Rappeler alors la relation entre E, p et m.

1) Rappeler la définition d'une collision élastique et montrer brièvement que l'effet Compton inverse est une collision élastique.

2) Faire un schéma représentant les impulsions et les angles θ et φ au cours de la diffusion.

On cherche maintenant à exprimer la variation de longueur d'onde du photon $\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$.

3) a) Ecrire la conservation de l'énergie relativiste au cours de la collision en utilisant les quadrivecteurs $\underline{P}$, $\underline{P_e}$ et $\underline{P'}$, $\underline{P'_e}$ du photon et de l'électron avant puis après la collision.

b) Exprimer p_e^2 en fonction de ν, ν' et $\cos\theta$.

c) En tenant compte de cette expression dans l'équation d'énergie, établir l'expression de $\Delta\lambda$.

d) Sachant que $\theta = 1$ radian, calculer $\Delta\lambda$.