EXAMEN PARTIEL de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 6 pts ; B = 17 pts. La question B.2 est indépendante de la question B.1 .

Formulaire – Rappel de cours

On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour coordonnées respectives $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, A^\nu$ avec

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \ .$$

Pour inverser la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.

A Contraction des longueurs pour gens pressés

On considère un train qui se déplace à vitesse constante V en direction d'un mur immobile. Soit $\mathcal{R}'$ un référentiel attaché au train et $\mathcal{R}$ un référentiel lié au sol (à une vache qui regarde le train). À $t = t' = 0$ le train émet une impulsion lumineuse (évènement origine) alors que le mur est à une distance L dans $\mathcal{R}$ (L' dans $\mathcal{R}'$). Soit $\mathcal{A}$ l'évènement : “l'impulsion atteint le mur”. On notera $\underline{A}$ (respectivement $\underline{A}'$) le quadri-vecteur correspondant dans $\mathcal{R}$ (respectivement dans $\mathcal{R}'$).

1/ Représenter la trajectoire d'univers du train, du rayon lumineux et celle du mur dans un diagramme espace-temps de $\mathcal{R}$ dans lequel vous placerez $\underline{A}$.

2/ Donner l'expression de $\underline{A}$. Montrer que $\underline{A}'$ est de la forme $(c\,\tau', c\,\tau')$. Que représente τ' ? Que vaut la norme de $\underline{A}$ et celle de $\underline{A}'$? Commentez ce résultat.

3/ Dans un diagramme espace temps de $\mathcal{R}'$, représentez les trajectoires d'univers du mur et de l'impulsion lumineuse. Placez $\underline{A}'$ et représentez la longueur L'. Établir la relation entre L' et τ'.

4/ Retrouvez le résultat de contraction des longueurs en utilisant la transformation de Lorentz sur $\underline{A}$.

B Photo-production de charme

Le plus léger des mésons contenant un quark charmé est le D^0. La production d'un méson D^0 et de son anti-particule $\bar{D}^0$ peut se faire en utilisant un faisceau de photons de haute énergie qui rentrent en collision avec des protons (immobiles dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$) selon la réaction

$$\gamma + p \to p + D^0 + \bar{D}^0 \ .$$

On notera m_p la masse du proton et m_0 celle du D^0 (c'est aussi celle du $\bar{D}^0$).

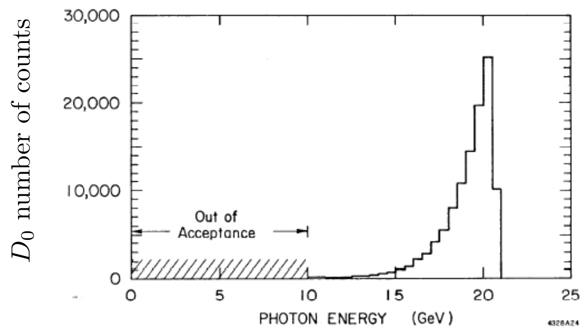
1/ On cherche à déterminer le seuil de réaction, c'est à dire l'énergie minimale du photon pour laquelle la réaction peut avoir lieu. On notera E_γ la valeur de cette énergie dans le référentiel du laboratoire.

(a) Rappeler la définition du référentiel de centre de masse $\mathcal{R}^*$.

(b) Au seuil de réaction l'impulsion dans $\mathcal{R}^*$ de chacune des particules produites est nulle. Exprimer alors dans $\mathcal{R}^*$ la somme des énergies incidentes $E^*_\gamma + E^*_{\mathrm{p}}$ en fonction de m_{p} et m_0.

(c) En écrivant la conservation de la quadri-norme incidente $(\underline{P}_\gamma + \underline{P}_{\mathrm{p}})^2$ entre le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$ et celui du laboratoire $\mathcal{R}$, donner l'expression de E_γ en fonction de m_{p} et m_0.

(d) On donne $m_{\mathrm{p}} = 938\ \mathrm{MeV/c^2}$ et $m_0 = 1865\ \mathrm{MeV/c^2}$. Donner la valeur numérique de E_γ. Est-elle compatible avec les taux de production mesurés au SLAC dans les année 1980 et reproduits sur la figure ci-contre ? D'après cette figure, quelle est l'énergie optimale du photon incident ?



2/ On veut donc créer un faisceau de photons très énergétiques. Pour cela on utilise la diffusion Compton "inverse" : un faisceau d'électrons de 30 GeV entre en collision frontale avec un faisceau monochromatique de photons de longueur d'onde $\lambda_1 = 266$ nm (un laser). La cinématique de la réaction est représentée sur la figure ci-dessous dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire et dans celui $\mathcal{R}'$ où l'électron (représenté par un point noir) est initialement au repos. Le photon incident est désigné par 1 et le photon diffusé par 2.

(a) Écrire la conservation de la quadri-impulsion dans $\mathcal{R}'$. En déduire l'expression de l'énergie E'_{e} de l'électron diffusé en fonction de E'_1 l'énergie du photon incident, de E'_2 l'énergie du photon diffusé et de m_e la masse de l'électron.

(b) Montrer que dans $\mathcal{R}'$ on a la relation:

$$E'_2 = \frac{E'_1}{1 + \frac{E'_1}{m_{\mathrm{e}}c^2}(1 - \cos\theta')} \ .$$

(c) Donner la valeur numérique du coefficient γ qui fait passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$. Donner alors les valeurs numériques de E_1, E'_1 et $E'_2(\theta' = \pi)$. On donne $m_{\mathrm{e}}c^2 = 511$ keV et hc =1.24 keV.nm.

3/ En écrivant $\cos\theta = -c\,p_{x2}/E_2$ (vous justifierez cette relation !) et une relation similaire dans $\mathcal{R}'$ et en utilisant la transformation de Lorentz, montrer que $\cos\theta = (\cos\theta' - \beta)/(1 - \beta\cos\theta')$. En déduire que dans $\mathcal{R}$ les photons sont presque tous émis vers l'avant ($\theta \simeq \pi$).

Exprimer alors l'énergie E_2 pour $\theta = \pi = \theta'$. A-t-on atteint le but escompté ?